PUBLICATIONS DE L'INSTITUT MATHÉMATIQUE
Nouvelle série, tome 11 (25), 1971, p. 33—41

ОВЩЕЕ УТВЕРЖДЕНИЕ ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ДВИЖЕНИЯ И СОСТОЯНИЯ РАВНОВЕСИЯ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ

В. А. Вуйичич

(Сообщено 24-ого сентября 1969)

В этой статье мы отвечаем на самый себе поставленый вопрос: имея в виду что теория Ляпунова (1) решает задачу об устойчивости движения в общей постановке и что существуют общие дифференциальные уравнения невозмущенного и возмущенного движения системы материальных точек, возможно ли вывести некоторое математическое выражение, на основании которого легче судить об устойчивости движения или состояния равновесия? Нам уже раньше удалось получить некоторые общие результаты об устойчивости состояния равновесия (6), (7), об устойчивости стационарных движений (8) и об устойчивости движения системы материальных точек если конфигурационное пространство является евклидовым (9). Чтобы решить эту задачу для системы, пространства конфигурации которой являются римановым, следовало сперва разяснить некоторые замечания в связи с извесними (3) и принятыми дифференциальными уравнениями возмущенного движения систем. Поэтому в начале этой статье мы напишем дифференциальные уравнения невозмущенного и возмущенного движения механической системы в фазовом пространстве.

1. Рассмотрим движение N точек M_i $(i=1, 2, \ldots, N)$ массы которых m_i и $\boldsymbol{r}_i$ радиюс векторы положения точек. К точкам пусть приложено k голономных склерономных идеальных связей $f_j(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \ldots, \boldsymbol{r}_N)=0$, $(j=1, 2, \ldots, k<3N)$. Исходим из дифференциальных уравнений Лагранжа первого рода

$$\frac{d}{dt}(m_i \boldsymbol{v}_i)=\boldsymbol{F}_i+\sum_{j=1}^{k}\lambda_j \operatorname{grad}_{\boldsymbol{r}_i} f_j. \tag{1.1}$$

Выражая радиус векторы $\boldsymbol{r}_i$ как векторы функции от $n=3N-k$ обобщенных независимых координат Лагранжа q^α $(\alpha=1, 2, \ldots, n)$ т. е. $\boldsymbol{r}_i=\boldsymbol{r}_i(q^1, q^2, \ldots, q^n)$ мы вектор $\boldsymbol{K}_i$ количества движения M_i-той точки напишем следующим образом

$$\boldsymbol{K}_i=m_i \boldsymbol{v}_i=m_i\frac{d\boldsymbol{r}_i}{dt}=m_i\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q^\beta}\dot{q}^\beta \qquad (\beta=1, 2, \ldots, n). \tag{1.2}$$

Теперь умножим скалярно соотношения (1.2) и уравнения (1.1) на основные (базисные) векторы $\dfrac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q^\alpha}$. Если эты произведения суммируем по индексам i, получим

$$
(1.3)\qquad
\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{K}_i \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q^\alpha} = \sum_{i=1}^{N} m_i \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q^\alpha} \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q^\beta} \dot{q}^\beta = p_\alpha \\
&\frac{d}{dt} \sum_{i=1}^{N} \left(m_i \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q^\beta} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q^\alpha} \dot{q}^\beta \right) - \sum_{i=1}^{N} m_i \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q^\beta} \cdot \frac{\partial^2 \boldsymbol{r}_i}{\partial q^\alpha \partial q^\gamma} \dot{q}^\beta \dot{q}^\gamma = \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{F}_i \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q^\alpha}
\end{aligned}
$$

так как $\dfrac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q^\alpha} \perp \operatorname{grad}_{\boldsymbol{r}_i} f_j$; суммы „проекций“ векторов $\boldsymbol{K}_i$ количества движения материальных точек на касательное направление определяемое вектором $\dfrac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q^\alpha}$ представляют ковариантные составляющие обобщенного импульса p_α.

Зная что

$$
(1.4)\qquad a_{\alpha\beta} = \sum_{i=1}^{N} m_i \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q^\alpha} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q^\beta} = a_{\beta\alpha} (q^1, q^2, \ldots . q^n)
$$

ковариантные составляющие основного тензора пространства конфигурации, и что

$$
(1.5)\qquad \Gamma_{\beta\alpha\gamma} = \sum_{i=1}^{N} m_i \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q^\beta} \cdot \frac{\partial^2 \boldsymbol{r}_i}{\partial q^\alpha \partial q^\gamma} \Leftrightarrow \frac{\partial^2 \boldsymbol{r}_i}{\partial q^\alpha \partial q^\gamma} = \Gamma^\lambda_{\alpha\gamma} \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q^\lambda}, \quad (\lambda = 1, \ldots, n)
$$

коэффициенты связаности того-же пространства, мы получим

$$
(1.6)\qquad
\begin{cases}
a_{\alpha\beta} \dot{q}^\beta = p_\alpha \\
\dot{p}_\alpha - \Gamma_{\beta,\alpha\gamma} \dot{q}^\beta \dot{q}^\gamma = Q_\alpha
\end{cases}
$$

т. е.

$$
(1.7)\qquad
\begin{cases}
\dot{q}^\alpha = a^{\alpha\beta} p_\beta \\
\dfrac{Dp_\alpha}{dt} = \dot{p}_\alpha - \Gamma^\gamma_{\alpha\beta} p_\gamma \dot{q}^\beta = Q_\alpha
\end{cases}
$$

где $a^{\alpha\beta}$ контравариантные составляющие основного тензора, Q_α ковариантные составляющие вектора обобщеных сил, $\dfrac{D}{dt}$ оператор апсолютной производной. Эту систему от $2n$ дифференциальных уравнений относительно фазовых переменных q^α и p_α считаем системой дифференциальных уравнений невозмущенного движения голономной склерономной системы материальных точек.

Дифференциальные уравнения возмущенного движения системы в фазовом пространстве будем искать тоже исходя из соотношений (1.1) и (1.2).

Пусть положение i-той точки M_i^* в возмущенном движению определяет радиус-вектор*

$$\boldsymbol{r}_i^* = \boldsymbol{r}_i + \boldsymbol{\rho}_i = \boldsymbol{r}_i + \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q^\sigma} \xi^\sigma \tag{1.8}$$

где ξ^σ контравариантные составляющие вектора возмущения $\boldsymbol{\rho}_i = \{\xi^1, \xi^2, \ldots, \xi^n\}$.

Количество движения i-той точки будет

$$m_i \boldsymbol{v}_i^* = m_i \left(\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q^\alpha} \dot{q}^\alpha + \frac{\partial^2 \boldsymbol{r}_i}{\partial q^\beta \partial q^\sigma} \xi^\sigma \dot{q}^\beta + \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q^\sigma} \dot{\xi}^\sigma \right). \tag{1.9}$$

Если это выражение спроектируем (неортогональная проекция) на направление основного вектора координаты q^γ скалярным умножением на $\dfrac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q^\gamma}$ и суммируем по индексам i, в силу (1.3), получим

$$\sum_{i=1}^{N} m_i \boldsymbol{v}_i^* \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q^\gamma} = p_\gamma^* = p_\gamma + a_{\sigma\gamma} \left(\dot{\xi}^\sigma + \Gamma^\sigma_{\alpha\beta} \xi^\alpha \dot{q}^\beta \right)$$

или

$$\overset{*}{p}_\gamma - p_\gamma = \eta_\gamma = a_{\sigma\gamma} \left(\dot{\xi}^\sigma + \Gamma^\sigma_{\alpha\beta} \dot{q}^\beta \xi^\alpha \right) \tag{1.10}$$

где η_γ возмущение обобщенного импульса p_γ, и $\dfrac{D\xi^\sigma}{dt}$ абсолютная производная вектора возмущения в пространстве конфигурации системы.

Дифференциальные уравнения возмущенного движения точек, аналогично уравнениям (1.1), будут

$$\frac{d}{dt} (m_i \boldsymbol{v}_i^*) = \boldsymbol{F}_i^* + \sum_{j=1}^{k} \lambda_j \operatorname{grad}_{\boldsymbol{r}_i} f_j^* \tag{1.11}$$

или на основании (1.9), имея в виду (1.1),

$$m_i \left[\frac{\partial}{\partial q^\delta} \left(\frac{\partial^2 \boldsymbol{r}_i}{\partial q^\alpha \partial q^\sigma} \right) \dot{q}^\alpha \xi^\sigma \dot{q}^\delta + \frac{\partial^2 \boldsymbol{r}_i}{\partial q^\alpha \partial q^\sigma} \dot{\xi}^\sigma \dot{q}^\alpha + \frac{\partial^2 \boldsymbol{r}_i}{\partial q^\alpha \partial q^\sigma} \xi^\sigma \ddot{q}^\alpha + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial^2 \boldsymbol{r}_i}{\partial q^\alpha \partial q^\delta} \xi^\sigma \dot{q}^\delta + \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q^\sigma} \ddot{\xi}^\sigma \right] = \boldsymbol{F}_i^* - \boldsymbol{F}_i + (\lambda_j \operatorname{grad}_{\boldsymbol{r}_i} f_j^* - \lambda_j \operatorname{grad}_{\boldsymbol{r}_i} f_j).$$

Умножим полученые соотношения на $\dfrac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q^\gamma}$ и суммируем по индексу i. Если при этом обратим внимание на выражения (1.5) и (1.4), то получим

$$\begin{cases} \left(a_{\lambda\gamma} \partial_\delta \Gamma^\lambda_{\alpha\sigma} + a_{\gamma\varkappa} \Gamma^\lambda_{\alpha\sigma} \Gamma^\varkappa_{\lambda\delta} \right) \dot{q}^\delta \xi^\sigma \dot{q}^\alpha + a_{\lambda\gamma} \Gamma^\lambda_{\alpha\sigma} \dot{\xi}^\sigma \dot{q}^\alpha + \\ + a_{\lambda\gamma} \Gamma^\lambda_{\sigma\delta} \dot{\xi}^\sigma \dot{q}^\delta + \Gamma^\lambda_{\alpha\sigma} a_{\lambda\gamma} \xi^\sigma \ddot{q}^\alpha + a_{\sigma\gamma} \ddot{\xi}^\sigma = \psi_\gamma \end{cases} \tag{1.12}$$

---

* См. 151, стр. 623., (11, 14·4).

где

$$\psi_\gamma = \sum_{i=1}^{N} (\boldsymbol{F}_i^* - \boldsymbol{F}_i) \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q^\gamma} = Q_\gamma^* - Q_\gamma. \tag{1.13}$$

Производная по времени тензорного соотношения (1.10) будет

$$\dot{\eta}_\gamma = \frac{\partial a_{\sigma\gamma}}{\partial q^\delta} \left(\dot{\xi}^\sigma + \Gamma^\sigma_{\alpha\beta} \dot{q}^\alpha \xi^\beta\right) \dot{q}^\delta +$$

$$+ a_{\sigma\gamma} \left(\ddot{\xi}^\sigma + \partial_\delta \Gamma^\sigma_{\alpha\beta} \dot{q}^\alpha \xi^\beta \dot{q}^\delta + \Gamma^\sigma_{\alpha\beta} \dot{q}^\alpha \dot{\xi}^\beta + \Gamma^\sigma_{\alpha\beta} \dot{q}^\alpha \dot{q}^\beta\right).$$

Так как

$$\frac{\partial a_{\sigma\gamma}}{\partial q^\delta} = \Gamma_{\gamma\delta,\sigma} + \Gamma_{\sigma\delta,\gamma}$$

то следует:

$$\begin{aligned} \dot{\eta}_\gamma = {} & (\Gamma_{\gamma\delta,\sigma} + \Gamma_{\sigma\delta,\gamma}) \dot{\xi}^\sigma \dot{q}^\delta + a_{\sigma\gamma} \ddot{\xi}^\sigma + a_{\sigma\gamma} \frac{\partial \Gamma^\sigma_{\alpha\beta}}{\partial q^\delta} \dot{q}^\alpha \xi^\beta \dot{q}^\delta + \\ & + a_{\sigma\gamma} \Gamma^\sigma_{\alpha\beta} \ddot{q}^\alpha \xi^\beta + a_{\sigma\gamma} \Gamma^\sigma_{\alpha\beta} \dot{q}^\alpha \dot{\xi}^\beta + \Gamma_{\gamma\delta,\sigma} \Gamma^\sigma_{\alpha\beta} \dot{q}^\alpha \dot{\xi}^\beta \dot{q}^\delta + \\ & + \Gamma_{\sigma\delta,\gamma} \Gamma^\sigma_{\alpha\beta} \dot{q}^\alpha \xi^\beta \dot{q}^\delta. \end{aligned} \tag{1.14}$$

Сопоставляя дифференциальные уравнения (1.12) и (1.14) находим что уравнения (1.12) можно преобразовать к более простому виду

$$\dot{\eta}_\gamma - \Gamma_{\gamma\delta,\sigma} \dot{\xi}^\sigma \dot{q}^\delta - \Gamma_{\sigma,\gamma\delta} \Gamma^\sigma_{\alpha\beta} \dot{q}^\alpha \xi^\beta \dot{q}^\delta = \psi_\gamma$$

или

$$\dot{\eta}_\gamma - \Gamma_{\gamma\delta,\sigma} \left(\dot{\xi}^\sigma + \Gamma^\sigma_{\alpha\beta} \dot{q}^\alpha \xi^\beta\right) \dot{q}^\delta = \psi_\gamma,$$

т. е., в силу (1.8),

$$\dot{\eta}_\gamma - \Gamma^\lambda_{\gamma\delta} \eta_\lambda \dot{q}^\delta = \psi_\gamma. \tag{1.15}$$

Очевидно что левая часть этых уравнений абсолютная производная $\dfrac{D\eta_\gamma}{dt}$ вектора η_γ по времени t. Поэтому уравнения (1.10) и (1.15) которые представляют дифференциальные уравнения возмущенного движения в $2n$-мерном фазовом пространстве, мы напишем в виде

$$\begin{cases} \dfrac{D\xi^\alpha}{dt} = a^{\alpha\beta} \eta_\beta \\ \dfrac{D\eta_\alpha}{dt} = \psi_\alpha \end{cases} \tag{1.16}$$

Эта тензорная форма дифференциальных уравнений возмущенного движения склерономной голономной системы инвариянтна относительно любой системы координат. Обратим внимание на то что в уравнениях (1.16) составляющие возмущения вектора положения контравариантные и составляющие вектора возмущених η_γ обобщенного импульса коварианткые.

Конечно, уравнения (1.10) и (1.15) можно написать в форме:

$$(1.17)\qquad \begin{cases} \dfrac{d\xi^\alpha}{dt} = a^{\alpha\gamma}\eta_\gamma - a^{\delta\gamma}\Gamma^\alpha_{\beta\delta}p_\gamma\xi^\beta, \\ \dfrac{d\eta_\alpha}{dt} = a^{\delta\gamma}\Gamma^\lambda_{\alpha\delta}\eta_\lambda p_\gamma + \psi_\alpha. \end{cases}$$

Если конфигурационное пространство является евклидовым или движение механической системы рассматриваем относительно аффиных координат, коэффициенты связаности равнаются нулю и дифференциальные уравнения возмущенного движения получают вид

$$(1.18)\qquad \begin{cases} \dfrac{d\xi^\alpha}{dt} = a^{\alpha\gamma}\eta_\gamma, \\ \dfrac{d\eta_\alpha}{dt} = \psi_\alpha. \end{cases} \qquad (\alpha, \gamma = 1, 2, \ldots, n).$$

Когда функции ψ_α линейные относительно ξ^α и η_α очевидно что дифференциальные уравнения (1.17) и (1.8) тоже линейные с переменными коэффициентами в общем случае. Это показывает что нелинейность и уравнений (1.17) зависит только от степени разложения обобщенных сил Q_α. Действительно, рассмотрим продробнее выражения для функций ψ_α. В уравнениям (1.11) силы $\boldsymbol{F}_i^*$ зависят от:

$$\boldsymbol{r}_i + \boldsymbol{\rho}_i = \boldsymbol{\varphi}_i(q^1, \ldots, q^n; \xi^1, \ldots, \xi^n) \quad \text{и}$$

$$\boldsymbol{v}_i + \dot{\boldsymbol{\rho}}_i = \dot{\boldsymbol{\varphi}}_i(q^1, \ldots, q^n; \dot{q}^1, \ldots, \dot{q}^n; \xi^1, \ldots, \xi^n; \dot{\xi}^1, \ldots, \dot{\xi}^n)$$

т. е.

$$\boldsymbol{F}_i^* = \boldsymbol{F}_i(\boldsymbol{r}_k + \boldsymbol{\rho}_k; \boldsymbol{v}_k + \dot{\boldsymbol{\rho}}_k; t) = \boldsymbol{F}_i^*(q^\alpha, \dot{q}^\alpha; \xi^\alpha, \dot{\xi}^\alpha, t) = \boldsymbol{F}_i^*(\xi^\alpha, \eta_\gamma, t).$$

При $\xi^\alpha = 0$ и $\dot{\xi}^\alpha = 0$ (или $\eta_\alpha = 0$) будет $\boldsymbol{F}_i^* = \boldsymbol{F}_i$.

Поэтому, в силу (1.13), будет

$$\psi_\gamma = \sum_{i=1}^N (\boldsymbol{F}_i^* - \boldsymbol{F}_i) \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q^\gamma} =$$

$$= \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial \boldsymbol{F}_i}{\partial q^\alpha}\xi^\alpha + \frac{\partial \boldsymbol{F}_i}{\partial p_\alpha}\eta_\alpha + \frac{\partial^2 \boldsymbol{F}_i}{\partial q^\alpha \partial q^\beta}\xi^\alpha\xi^\beta + \cdots \right) \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q^\gamma} =$$

$$= \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial \boldsymbol{F}_i}{\partial q^\alpha}\xi^\alpha + \frac{\partial \boldsymbol{F}_i}{\partial p_\alpha}\eta_\alpha \right) \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q^\gamma} + \mu\,\Phi_\gamma(\xi^\alpha, \eta_\gamma, t),$$

откуда видно что функции Φ_γ нелинейние. Преобразуем сумму скалярных произведений производных векторов $\boldsymbol{F}_i$ и $\boldsymbol{r}_i$ следующим образом:

$$\sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial \boldsymbol{F}_i}{\partial q^\alpha}\xi^\alpha + \frac{\partial \boldsymbol{F}_i}{\partial p_\alpha}\eta_\alpha \right) \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q^\gamma} =$$

$$= \sum_{i=1}^N \left\{ \left[\frac{\partial}{\partial q^\alpha}\left(\boldsymbol{F}_i \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q^\gamma} \right) - \boldsymbol{F}_i \cdot \frac{\partial^2 \boldsymbol{r}_i}{\partial q^\alpha \partial q^\gamma} \right] \xi^\alpha + \frac{\partial}{\partial p_\alpha}\left(\boldsymbol{F}_i \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q^\gamma} \right)\eta_\alpha \right\}$$

так как векторы $\dfrac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q^\gamma}$ не зависят от обобщенных импульсов. Имея в виду (1.5) и то что обобщенные силы $Q_\gamma = \sum\limits_{i=1}^{N} \boldsymbol{F}_i \cdot \dfrac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q^\gamma}$, мы преобразованную сумму приводим затем к виду

$$\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\partial \boldsymbol{F}_i}{\partial q^\alpha}\xi^\alpha + \frac{\partial \boldsymbol{F}_i}{\partial p_\alpha}\eta_\alpha\right)\cdot\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q^\gamma} = \left(\frac{\partial Q_\gamma}{\partial q^\alpha} - Q_\lambda \Gamma^\lambda_{\alpha\gamma}\right)\xi^\alpha +$$

$$+\frac{\partial Q_\gamma}{\partial p_\alpha}\eta_\alpha = \nabla_\alpha Q_\gamma \xi^\alpha + \frac{\partial Q_\gamma}{\partial p_\alpha}\eta_\alpha,$$

где $\nabla_\alpha Q_\gamma$ ковариантная производная ковариантных составляющих обобщенных сил Q_γ. Поэтому окончательно получаем

$$\psi_\gamma = \nabla_\alpha Q_\gamma \xi^\alpha + \frac{\partial Q_\gamma}{\partial p_\alpha}\eta_\alpha + \mu \Phi_\gamma. \tag{1.19}$$

В часности следует, что линейние дифференциальные уавнения возмущенного движения голономной склерономной системы в явном виде будет

$$\begin{cases} \dot{\xi}^\alpha = a^{\alpha\gamma}\eta_\gamma - a^{\delta\gamma}\Gamma^\alpha_{\beta\delta} p_\gamma \xi^\beta, \\ \dot{\eta}_\alpha = \left(a^{\delta\gamma}\Gamma^\lambda_{\alpha\delta} p_\gamma + \dfrac{\partial Q_\alpha}{\partial p_\lambda}\right)\eta_\lambda + \nabla_\gamma Q_\alpha \xi^\gamma. \end{cases} \tag{1.20}$$

2. Так как мы имеем дифференциальные уравнения возмущенного движения механической системы относительно возмущенных фазовых переменных, то условия устойчивости невозмущенного движения рассматриваемой системы будем искать по Ляпунову.

Для этой цели ищем функцию Ляпунова $V = V(\xi^1, \ldots, \xi^n; \eta_1, \ldots, \eta_n; t)$ в виде суммы двух инвариант; одной, в виде квадратной определенно положительной формы

$$U = \frac{1}{2} a^{\alpha\beta}\eta_\alpha \eta_\beta,$$

и другой определенно положительной функции $W = W(\xi^1, \xi^2, \ldots, \xi^n; t)$ которая зависит только от составляющих ξ^α вектора возмущенния ρ и времени t, т. е.

$$V = \frac{1}{2} a^{\alpha\beta}\eta_\alpha \eta_\beta + W. \tag{2.1}$$

Производную по времени вычислаем посредством уравнений (1.16) или уравнений (1.17) так как обичная производная инварианты по параметру равняется абсолютной производной той-же инварианты, т. е. $\dfrac{dV}{dt} = \dfrac{DV}{dt}$. Как известно получим

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2} a^{\alpha\beta}\eta_\alpha \eta_\beta\right) = \frac{1}{2}\frac{D}{dt}(a^{\alpha\beta}\eta_\alpha\eta_\beta) = a^{\alpha\beta}\frac{D\eta_\alpha}{dt}\eta_\beta. \tag{2.2}$$

Тем-же способом, в силу того что W скалярная функция вектора ξ^α и времени t в пространстве конфигурации, находим

$$(2.3) \qquad \frac{dW}{dt}=\frac{DW}{dt}=\nabla_\alpha \frac{D\xi^\alpha}{dt}+\frac{\partial W}{dt}=\frac{\partial W}{\partial \xi^\alpha}\frac{D\xi^\alpha}{dt}+\frac{\partial W}{\partial t}.$$

Это показывает что производная по времани функции Ляпунова (2.1) в силу уравнений возмущенного движения (1.13) будет

$$(2.4) \qquad \dot{V}=a^{\alpha\beta}\frac{D\eta_\alpha}{dt}\eta_\beta+\frac{\partial W}{\partial \xi^\alpha}\frac{D\xi^\alpha}{dt}+\frac{\partial W}{dt}=a^{\alpha\beta}\left(\psi_\alpha+\frac{\partial W}{\partial \xi^\alpha}\right)\eta_\beta+\frac{\partial W}{\partial t}.$$

Следуя теорему Ляпунова об устойчивости движения, на основании выражения (2.4) можно судить об устойчивости движения рассматримаемой механической системы. Для выражения (2.4) нужно знать основной тензор конфигурационного пространство и обобщенные силы Q_α, чтобы найти функции ψ_γ; функцию $W=W(\xi^1, \ldots, \xi^n; t)$ надо искать так чтобы билы выполнены заданые определения. Все это упрощает задачу в том, что не нужно составлять дифференциальные уравнения возмущенного движения системы. Функцию W тоже проще определить чем функцию Ляпунова V, так как функция W не зависит от $\eta_1, \ldots, \eta_n$. Добавим к тому что функция W имеет некоторые особености функции Ляпунова, но не в фазовом пространстве, а в пространстве конфигурации. Поэтому не трудно объяснить и ее физическое и геометрическое значение. Заметим и то, что выражение (2.4) инвариатно относительно любой системы координат. Мы уже доказали раньше существование выражения (2.4) в евклидовом пространстве или относительно любых аффиных координат. Здесь доказано что выражение (2.4) сохраняется и в пространстве Римана.

Так как выражение (2.4) производная функции Ляпунова по времени t, то в силу дифференциальных уравнений возмущенного движения системы можно сформулировать следующее утверждение:

Если существует определенно положительная функция W зависимая от координат вектора возмущения $\xi^1, \ldots, \xi^n$, такая что выражение

$$(2.5) \qquad a^{\alpha\beta}\left(\psi_\alpha+\frac{\partial W}{\partial \xi^\alpha}\right)\eta_\beta+\frac{\partial W}{\partial t}$$

отрицательное или тожественно равняется нулю, невозмущенное движение $\xi^\alpha=0$, $\eta_\alpha=0$ склерономной голономной системы, при наличии возмущающих факторов ψ_γ, устойчиво по Ляпунову.

3. В часности на основании этого утверждения (или критерия) получаем некоторые интересные результаты.

а) Для линейных дифференциальных уравнений возмущенного движения (1.20), когда обобщенные силы Q_α не зависят от скоростей материальных точек и $\nabla_\gamma Q_\alpha$ зависит явно от времени t то выражение (2.4) будет

$$(3.1) \qquad a^{\alpha\beta}\left(\nabla_\gamma Q_\alpha \xi^\gamma+\frac{\partial W}{\partial \xi^\alpha}\right)\eta_\beta$$

так как в этом случае функцию W берем независимую от времени t, и $\dfrac{\partial Q_\alpha}{\partial p_\lambda}\equiv 0$.

Если коэффициенты $\nabla_\gamma Q_\alpha$ определяют определенно отрицательную матрицу можно всегда найти определенно положительную форму $2W = c_{\alpha\gamma}\xi^\alpha\xi^\gamma$ такую чтобы при $c_{\alpha\gamma} = -\nabla_\gamma Q_\alpha$ выражение (3.1) равналось тожественно нулю и тем самым показать что невозмущенное движение $\xi^\alpha = 0$, $\eta_\gamma = 0$ рассматриваемой системы устойчиво.

б) Кроме предположения о линейности дифференциальных уравнений возмущенного движения и явной независимости сил Q_α от времени t, допустим что силы Q_α зависят от обобщенных скоростей, т. е. обобщенных импульсов. Выражение (2.4) будет

$$a^{\alpha\beta}\left(\frac{\partial Q_\alpha}{\partial p_\gamma}\eta_\gamma + \nabla_\gamma Q_\alpha \xi^\gamma + \frac{\partial W}{\partial \xi^\alpha}\right)\eta_\beta$$

или при $c_{\alpha\beta} = -\nabla_\gamma Q_\alpha$,

$$a^{\alpha\beta}\frac{\partial Q_\alpha}{\partial p_\gamma}\eta_\gamma\eta_\beta. \tag{3.2}$$

Очевидно, что если матрица $a^{\alpha\beta}\dfrac{\partial Q_\alpha}{\partial p_\gamma}$ отрицательная, например в случае диссипативных сил, то невозмущенное движение $\eta_\gamma = 0$, $\xi^\alpha = 0$ рассматриваемой механической системы устойчиво.

в) Не трудно, конечно, сделать и другие выводы аналогично теоремам Ляпунова об устойчивости состояния равновесия потенциальной механической системы. В основе существует известная разница, так как коэффициенты $a^{\alpha\beta}\dfrac{\partial Q_\alpha}{\partial p_\gamma}$ и $a^{\alpha\beta}\nabla_\gamma Q_\alpha$ в общем случаю не совпадают с коэффициентами линейной системы дифференциальных уравнений движения (возмущенного состояния равновесия); функция не представляет потенциал сил, а какую то другую потенциальную функцию относящуюся к траектории изображающей точки механической системы.

4. Основаность и смысл нашего расуждения и выводов иллюстрируем известным примером.

Пусть движение колебательной механической системы описивается посредством n дифференциальных линейных уравнений второго порядка

$$a_{\alpha\beta}\ddot{q}^\beta + b_{\alpha\beta}\dot{q}^\beta + g_{\alpha\beta}\dot{q}^\beta + c_{\alpha\beta}q^\beta = 0,$$

где $c_{\alpha\beta}q^\beta = \dfrac{\partial \Pi}{\partial q^\beta}$ потенциальные, $b_{\alpha\beta}\dot{q}^\beta = \dfrac{\partial R}{\partial \dot{q}^\alpha}$ диссипативные и $-g_{\alpha\beta}\dot{q}^\beta$ гироскопические силы, у которых коэффициенты $c_{\alpha\beta} = c_{\beta\alpha}$, $b_{\alpha\beta} = b_{\beta\alpha}$, $g_{\alpha\beta} = -g_{\beta\alpha}$ постояные. Уравнения (4.1) эквивалентные уравнениям (1.7), в которых силы Q_α надо преобразовать к виду

$$Q_\alpha = -c_{\alpha\beta}q^\beta - b_{\alpha\beta}a^{\beta\gamma}p_\gamma - g_{\alpha\beta}a^{\beta\gamma}p_\gamma.$$

Функции ψ_γ, в смысле (1.9), будут

$$\psi_\gamma = -c_{\alpha\gamma}\xi^\alpha - b_{\gamma\beta}a^{\beta\alpha}\eta_\alpha - g_{\gamma\beta}a^{\beta\alpha}\eta_\alpha.$$

Если функцию W берем в виде

$$W = \frac{1}{2}c_{\alpha\beta}\xi^\alpha\xi^\beta$$

то для выражения (2.5) получим отрицательную функцию

$$-b^{\gamma\delta}\eta_{\gamma}\eta_{\delta}$$

где $b^{\gamma\delta}=a^{\alpha\delta}b_{\alpha\beta}a^{\beta\gamma}$. Отсюда следует что невозмущенное движение $\xi^{\alpha}=0$ и $\eta_{\alpha}=0$ (или $q^{\alpha}=q^{\alpha}(t)$ и $p_{\alpha}=p_{\alpha}(t)$) колебательной механической системы устойчиво.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Ляпунов А. М., *Общая задача об устойчивости движения*, Сбор. со . т. II Изд. АН СССР, 1956.

[2] Гантмахер, Ф. Р., *Лекции по аналитической Механике*, Москва, 1960.

[3] Synge I. L., *Tensorial methods in Dynamics*, Toronto, 1936.

[4] Четаев, Н. Г., *Устойчивость движения*, Москва, 1955.

[5] Лурье, А. И., *Аналитическая механика*, Москва, 1961.

[6] Вуйичич, В. А. *Критерий об устойчивости состояния динамических точек*, Publ. Inst. Math., Nouvelle série T. 8 (22), 1968., Beograd.

[7] Vujičić, V. A., *General conditions of stability of the state of the Dynamic system of a variable mass*, Tensor, N. S., Vol. 19. (1968), Tokio.

[8] Vujičić, V. A., *Über die Stabilität der stationären Bewegungen*, ZAMM, Band 48, 1968.

[9] Вуйичич, В. А., *Общее следствие прямого метода Ляпунова об устойчивости*, Publ. Inst. Math. T. 9 (23), 1969. Beograd.

[10] Vujičić, V. A., *Covariant equations of disturbed motion of mechanical systems*, Tensor, N. S., Vol. 22 (1971).