PUBLICATIONS DE L'INSTITUT MATHÉMATIQUE
Nouvelle série, tome 11 (25), 1971. pp. 119—120

SUR UN THÉORÈME CONCERNANT LE CAS GÉNÉRAL D'ÉQUATION FONCTIONNELLE CYCLIQUE, LINÉAIRE, HOMOGÈNE A COEFFICIENTS CONSTANTS

S. B. Prešić et B. M. Zarić

(Communiqué le 5 Mars, 1971)

Soit S ensemble non vide et θ une application donnée de S dans S avec la propriété

$$\theta^n (M) = M \quad (M \in S),$$

n étant un nombre naturel fixe.

Dans cette note, on considère l'équation fonctionnelle cyclique

$$(1) \qquad a_0 f(M) + a_1 f(\theta M) + \cdots + a_{n-1} f(\theta^{n-1} M) = 0 \quad (M \in S),$$

où a_i $(i = 0, 1, 2, \ldots, n-1)$ sont des nombres réels (ou complexes) et la fonction inconnue f applique S dans l'ensemble des nombres réels (ou complexes).

Si l'on désigne, par convention, la fonction $f(\theta^k M)$ $(M \in S)$ par f^k $(k = 0, 1, 2, \ldots;$ θ^0 l'application identique), l'équation (1) prend la forme suivante

$$(1') \qquad a_0 f + a_1 f^1 + \cdots + a_{n-1} f^{n-1} = 0.$$

Posons

$$E(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_{n-1} x^{n-1}$$

(c'est *le polynome caractéristique de l'équation* (1')

C'est dans 1 (p. 369) qu'on a démontré le théorème suivant:

Soit

$$1 - x^n = D(x) \cdot F(x),$$

où $D(x)$ est le plus grand diviseur commun des polynomes $1 - x^n$ et $E(x)$. Alors la solution générale de l'équation

$$(1') \qquad E(f) = 0$$

est donnée par la formule

$$f = F(U),$$

où U désigne une application arbitraire de S dans l'ensemble des nombres réels (ou complexe). Il faut entendre ici par $F(U)$ la fonction

$$b_0 U(M) + b_1 U(\theta M) + \ldots + b_s U(\theta^s M) \qquad (M \in S)$$

(ou bien, d'après la convention ci—dessus, la fonction $b_0 U + b_1 U^1 + \cdots + b_s U^s$), le polynome $F(x)$ étant $b_0 + b_1 x + \cdots + b_s x^s$.

La démonstration de ce théorème que nous allons donner est plus simple que celle de Ghermanescu dans 1.

Dans cette démonstration nous allons utiliser les deux faits suivants:

1° Si $f=0$, alors $P(f)=0$ pour tout polynome P.

2° Si

$R(x)=P(x)\,Q(x)$ (P, Q, R étant des polynomes), alors on a

$$R(f)=P(Q(f))$$

pour toute fonction f.

L'assertion 1° est évidente, et l'assertion 2° peut être prouvée comme il suit: avec

$$P(x)=\sum_{k=0}^{p} a_k x^k,\quad Q(x)=\sum_{l=0}^{q} b_l x^l,$$

on a

$$P(Q(f))=\sum_{k=0}^{p} a_k\, Q(f)^k=\sum_{k=0}^{p} a_k \left(\sum_{l=0}^{q} b_l f^l\right)^k=\sum_{k=0}^{p} a_k \sum_{l=0}^{q} b_l f^{k+l}=R(f), \text{ c.q.f.d.}$$

Les polynomes $D(x)$, $1-x^n$ et $E(x)$ sont liés par une identité de la forme

$$D(x)=P(x)\,E(x)+Q(x)\,(1-x^n), \tag{2}$$

P et Q étant des polynomes. Au moyen de (2) nous allons démontrer que l'équation $E(f)=0$ est équivalente à l'équation $D(f)=0$.

En effet, si $E(f)=0$, nous avons, d'après 1°, 2° et (2),

$$D(f)=\mathrm{P}(E(f))+Q(f-f^n)=0.$$

Inversement, si $D(f)=0$ et $E(x)=G(x)\cdot D(x)$, alors

$$E(f)=G(D(f))=0,$$

Donc, $E(f)=0 \Leftrightarrow D(f)=0$.

Nous démontrons, ensuite que $f=F(U)$, avec U arbitrairement choisi, est la solution de (1').

On a $b(x)=1-x^n=D(x)\cdot F(x)$ et par suite

$$D(f)=D(F(U))=b(U)=U-U^n=0.$$

Démontrons enfin que la formule $f=F(U)$ contient toutes les solutions de l'équation (1'). Les polynomes D et F sont premiers entre eux et, par conséquent, il existent deux polynomes K et L tels que l'on a

$$1=F(x)\,K(x)+L(x)\cdot D(x).$$

Par suite, pour n'importe quel f,

$$f=F(K(f))+L(D(f)).$$

Donc, si l'on a en particulier $E(f)=0$, c'est-à-dire $D(f)=0$, on obtient

$$f=F(K(f))=F(U),\quad U=K(f).$$

BIBLIOGRAPHIE

[1] M. Ghermanescu, *Ecuatii functionale*, Bucarest, 1961, p. 366—369.