PUBLICATIONS DE L'INSTITUT MATHÉMATIQUE
Nouvelle série, tome 11 (25), 1971. pp. 99—105

SUR CERTAINES INÉGALITÉS INTÉGRALES ET LEURS APPLICATIONS

D. M. Simeunović

(Communiqué le 27 Novembre 1970)

1. Le but de cet article est de donner une preuve unifiée pour une suite d'inégalités élémentaires habituellement obtenues par des procédés différents et quelquefois compliqués (voir [2]—[6]). Le procédé que nous exposons ici, nous permet également d'établir d'une manière simple la convexité logarithmique d'une classe générale de fonctions définies par des intégrales où figurent des paramètres. Cette convexité logarithmiques de différentes fonctions est parfois démontrée d'une manière plus compliquée, comme par exemple dans le cas de la fonction $\Gamma(t)$ (voir, par exemple [7]).

Nous considérerons ici les propriétés des fonctions données par des intégrales définies où figurent des paramètres dans l'exposant. La forme générale des telles fonctions, considérées dans cet article, est donnée par les intégrales:

$$\text{(a)} \qquad I(t)=\int_a^b [f(x)]^t g(x)\,dx,$$

$$\text{(b)} \qquad I(t,\, u)=\int_a^b [f(x)]^t [g(x)]^u h(x)\,dx.^{1)}$$

Nous démontrerons, dans la section 2, deux théorèmes sur les intégrales (a) et (b), et ensuite, dans la section 3, nous donnerons certaines applications de ces inégalités, dans des cas où le choix des fonctions $f(x)$ et $g(x)$ est simple, ce qui nous permettra d'obtenir immédiatement une suite d'inégalités élémentaires.

2. Théorème 1. *Soient $f(x)$ et $g(x)$ des fonctions non négatives sur le segment $[a, b]$, et soit t un paramètre réel, tels que nous avons*

$$\text{(1)} \qquad I(t)=\int_a^b [f(x)]^t g(x)\,dx.$$

Nous avons alors:

1° *La fonction $I(t)$ satisfait à l'inégalité*

$$\text{(2)} \qquad I(s+\alpha+\beta)\leqslant[I(s+\alpha p)]^{\frac{1}{p}}\,[I(s+\beta q)]^{\frac{1}{q}} \qquad \left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1,\ p>1\right),$$

à condition qu'existent les intégrales au second membre.

---

1) Le segment $[a, b]$ peut être infini.

2° *La fonction $I(t)$, définie par* (1) *jouit de la convexité logarithmique, c'est-à-dire que*

$$I^2\left(\frac{t_1+t_2}{2}\right) \leqslant I(t_1)\, I(t_2). \tag{3}$$

Cette fonction est par suite également convexe au sens ordinaire du terme.

Remarque. L'intégrale $I(t)$ définie par (a) peut être donnée dans une forme plus générale, comme une intégrale de Stieltjes:

$$I_1(t) = \int_a^b [f(x)]^t\, g(x)\, dh(x)$$

où $h(x)$ est une fonction non décroissante sur $[a, b]$. Les affirmations 1° et 2° sont alors valables dans une forme analogue.

Démonstration de 1°. Étant donné que

$$f^{s+\alpha+\beta}\, g = \left(f^{\frac{s}{p}+\alpha}\, g^{\frac{1}{p}}\right)\left(f^{\frac{s}{q}+\beta}\, g^{\frac{1}{q}}\right),$$

nous aurons dans notre cas, d'après l'inégalité de Hölder

$$\int_a^b f^{s+\alpha+\beta}\, g\, dx = \int_a^b \left(f^{\frac{s}{p}+\alpha}\, g^{\frac{1}{p}}\right)\left(f^{\frac{s}{q}+\beta}\, g^{\frac{1}{q}}\right) dx \leqslant \left(\int_a^b f^{s+\alpha p}\, g\, dx\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^b f^{s+\beta q}\, g\, dx\right)^{\frac{1}{q}},$$

ce qui, d'après (1), représente l'inégalité (2).

Pour la preuve de 2° il faut poser, dans (2), $s=0$, $p=q=2$, $\alpha=\frac{t_1}{2}$, $\beta=\frac{t_2}{2}$.

Théorème 2. *Soient $f(x)$, $g(x)$ et $h(x)$ des fonctions non négatives sur le segment $[a, b]$, et t, u, des paramètres réels tels qu'existe la fonction*

$$I(t, u) = \int_a^b [f(x)]^t\, [g(x)]^u\, h(x)\, dx. \tag{4}$$

Nous avons alors:

3° *La fonction $I(t, u)$ satisfait à l'inégalité*

$$I(s+\alpha+\beta,\ r+\gamma+\delta) \leqslant \tag{5}$$
$$\leqslant [I(s+\alpha p,\ r+\gamma p)]^{\frac{1}{p}}\, [I(s+\beta q,\ r+\delta q)]^{\frac{1}{q}} \quad \left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1,\ p>1\right),$$

à condition qu'existent les intégrales au second membre.

4° *La fonction $I(t, u)$ possède la convexité logarithmique, c'est-à-dire*

$$I^2\left(\frac{t_1+t_2}{2},\ \frac{u_1+u_2}{2}\right) \leqslant I(t_1, u_1)\, I(t_2, u_2). \tag{6}$$

La démonstration de 3° s'obtient par l'application de l'inégalité de Hölder à l'identité

$$f^{s+\alpha+\beta} g^{r+\gamma+\delta} h = \left(f^{\frac{s}{p}+\alpha} g^{\frac{r}{p}+\gamma} h^{\frac{1}{p}}\right)\left(f^{\frac{s}{q}+\beta} g^{\frac{r}{q}+\delta} h^{\frac{1}{q}}\right).$$

Pour prouver 4° il faut poser dans (5) $s=r=0$, $p=q=2$, $\alpha=\frac{t_1}{2}$, $\beta=\frac{t_2}{2}$, $\gamma=\frac{u_1}{2}$, $\delta=\frac{u_2}{2}$.

Des exemples de fonctions de la forme (1), respectivement (4), sont donnés par les fonctions $\Gamma(t)$ et $B(t, u)$:

$$\Gamma(t)=\int_0^\infty x^t \cdot \frac{e^{-x}}{x}\,dx=\int_0^\infty x^{t-1} e^{-x}\,dx \qquad (t>0),$$

$$B(t, u)=\int_0^1 x^t (1-x)^u \cdot \frac{1}{x(1-x)}\,dx=\int_0^1 x^{t-1}(1-x)^{u-1}\,dx \quad (t>0,\ u>0).$$

D'après le théorème 1, respectivement 2, ce sont des fonctions qui ont la convexité logarithmique.

Pour $\alpha=0$, $\beta=1$, $p=q=2$, $s=t$, on obtient de (2) l'inégalité

$$I^2(t+1) \leqslant I(t)\, I(t+2). \tag{2'}$$

Pour $t=n-1=0, 1, 2, \ldots$, (2′) se réduit à l'inégalité

$$I^2(n) \leqslant I(n-1)\, I(n+1), \quad n=1, 2, \ldots \tag{2''}$$

obtenue par G. Pólya et G. Szegö [1, vol. I, sect. II, problème 199] en prenant des fonctions positives et continues $f(x)$ et $g(x)$ sur le segment $[a, b]$.

3. Applications. De (2), (3) et (2′), ainsi que de (5) et (6) on peut obtenir une suite d'inégalités particulières. Nous nous bornerons ici à un cas simple quant au choix des fonctions $f(x)$ et $g(x)$. Nous obtiendrons une inégalité et nous démontrerons, entre autre, qu'elle contient plusieurs résultats connus.

Exemple. Soient $f(x)=x$, $g(x)=\frac{1}{x}$. Nous avons alors, pour $t\neq 0$, d'après (1)

$$I(t)=\int_a^b x^t \cdot \frac{1}{x}\,dx=\frac{b^t-a^t}{t}.$$

Pour $b \geqslant a>0$ et $t>0$ de (2′) nous avons l'inégalité

$$\left(\frac{b^{t+1}-a^{t+1}}{t+1}\right)^2 \leqslant \frac{(b^t-a^t)(b^{t+2}-a^{t+2})}{t(t+2)},$$

qu'on peut écrire dans la forme

$$\frac{(b^{t+1}-a^{t+1})^2}{(t+1)^2} \leqslant \frac{(b^{t+1}-a^{t+1})^2-(b-a)^2(ab)^t}{t(t+2)},$$

d'où

$$b^{t+1}-a^{t+1} \geqslant (t+1)(b-a)(ab)^{\frac{t}{2}}. \tag{7}$$

Si nous posons, dans (7), $t+1=r$, nous obtenons l'inégalité

$$b^r-a^r \geqslant r(b-a)(ab)^{\frac{r-1}{2}} \quad (b \geqslant a>0;\ r>1). \tag{8}$$

Cette relation devient une égalité pour $b=a$ ou $r=1$.

Si nous posons, dans (8), $b=y^{\frac{1}{r}}$, $a=x^{\frac{1}{r}}$ et $r=\frac{1}{s}$ $(0<s<1)$ nous obtenons l'inégalité

$$y^s-x^s \leqslant s(y-x)(xy)^{\frac{s-1}{2}} \quad (y \geqslant x>0;\ 0<s<1). \tag{9}$$

Ceci se réduit à l'égalité pour $y=x$ ou bien $s=0$, respectivement $s=1$.

De (8) et (9) on peut obtenir une suite d'inégalités particulières. Nous nous bornerons ici à l'inégalité (8) dont nous tirerons, entre autre, plusieurs résultats connus. Certains d'entre eux seront généralisés, d'autre seront rendus plus précis. Nous exposons certains de ces résultats, où n est un entier positif:

$$1-x^{2n}>2nx^n(1-x) \quad (0 \leqslant x<1) \tag{10}$$ [2, p. 139]

$$\frac{x^{\alpha+1}-x^{-(\alpha+1)}}{x^\alpha-x^{-\alpha}}>\frac{\alpha+1}{\alpha x} \quad (\alpha>0;\ x>1) \tag{11}$$ [2, p. 181]

$$\frac{1+a+a^2+\cdots+a^n}{a+a^2+a^3+\cdots+a^{n-1}} \geqslant \frac{n+1}{n-1} \quad (a>0;\ n \geqslant 2) \tag{12}$$ [2. p. 142]

$$\frac{1-x^{n+1}}{n+1}>\frac{1-x^n}{n}\sqrt{x} \quad (0<x<1) \tag{13}$$ [3, p. 123]

En posant $b=1$, $a=x$ $(0<x<1)$ et $r=2n$ dans (8), on obtiendra l'inégalité

$$1-x^{2n}>2nx^{n-\frac{1}{2}}(1-x) \quad (0<x<1). \tag{14}$$

Cette inégalité est plus précise que (10).

Si on pose, dans (8), $b=x^\alpha$, $a=x^{-\alpha}$ $(\alpha>0;\ x>1)$ et $r=\frac{\alpha+\beta}{\alpha}$ $(\alpha>0,\ \beta>0;$ donc $r>1)$ on obtient l'inégalité

$$\frac{x^{\alpha+\beta}-x^{-(\alpha+\beta)}}{x^\alpha-x^{-\alpha}}>\frac{\alpha+\beta}{\alpha} \quad (\alpha>0,\ \beta>0;\ x>1). \tag{15}$$

En substituant, dans (15) x par $\frac{1}{x}$, où on a maintenant $0<x<1$, on aura de nouveau l'inégalité (15), ce qui signifie qu'on a la relation

$$\frac{x^{\alpha+\beta}-x^{-(\alpha+\beta)}}{x^\alpha-x^{-\alpha}}>\frac{\alpha+\beta}{\alpha} \quad (\alpha>0,\ \beta>0;\ x>0 \text{ et } x \neq 1). \tag{16}$$

L'inégalité (16) peut être écrite dans la forme

$$\frac{x^{2\alpha+2\beta}-1}{x^{\beta}(x^{2\alpha}-1)} > \frac{\alpha+\beta}{\alpha} \quad (\alpha>0,\ \beta>0;\ x>1), \tag{17}$$

c'est-à-dire dans la forme

$$\frac{1-x^{2\alpha+2\beta}}{x^{\beta}(1-x^{2\alpha})} > \frac{\alpha+\beta}{\alpha} \quad (\alpha>0,\ \beta>0;\ 0<x<1). \tag{18}$$

Pour $\beta=1$ il résulte de (15)

$$\frac{x^{\alpha+1}-x^{-(\alpha+1)}}{x^{\alpha}-x^{-\alpha}} > \frac{\alpha+1}{\alpha} \quad (\alpha>0;\ x>1). \tag{19}$$

L'inégalité (19) est plus précise que (11).

Remarquons que le signe d'égalité dans (12) est valable pour $a=1$. Pour cette raison nous considérerons le cas pour $a>0$ et $n\neq 1$. Si on pose, dans (17), $\alpha=\frac{n-1}{2}$, $\beta=1$ et $x=a>1$ et en divisant le premier membre par $(a-1)$ on obtient l'inégalité (12) pour $a>1$. On obtient la même inégalité de (18) pour $0<a<1$.

L'inégalité (13) résulte de (18) pour $\alpha=\frac{n}{2}$ et $\beta=\frac{1}{2}$.

On peut aussi obtenir, de (8), les inégalités suivantes:

$$2^{n} > 1+n\,2^{\frac{n-1}{2}} \qquad \text{[2, p. 119]}$$

$$\frac{x^{n}}{1+x+x^{2}+\cdots+x^{n-1}} \leqslant \frac{1}{2n+1} \qquad \text{[2, p. 144]}$$

$$\alpha^{n}-1 \geqslant n\left(\alpha^{\frac{n+1}{2}}-\alpha^{\frac{n-1}{2}}\right) \quad (\alpha\geqslant 1) \qquad \text{[2, p. 162]}$$

de même qu'une suite d'autres résultats. Ainsi, par exemple, pour $b=x^{s}$, $a=x^{-s}\,(x\geqslant 1,\ s>0)$ on obtient de (8) l'inégalité

$$x^{rs}-x^{-rs} \geqslant r\,(x^{s}-x^{-s}) \quad (x\geqslant 1;\ r\geqslant 1,\ s\geqslant 0). \tag{20}$$

Si nous posons $x=e$ dans (20), nous obtiendrons l'inégalité

$$\operatorname{sh} rs \geqslant r \operatorname{sh} s \quad (r\geqslant 1,\ s\geqslant 0).$$

En partant de (8) on peut obtenir d'autres résultats. *Ainsi: Pour la fonction*

$$f(x)=c_0+\sum_{k=1}^{n} c_k x^{r_k} \quad (c_k\geqslant 0,\ k=1,2,\ldots,n;\ r_k\geqslant 1) \tag{21}$$

on a l'inégalité

$$f(b)-f(a) \geqslant (b-a)\,f'\left(\sqrt{ab}\right) \quad (b\geqslant a>0). \tag{22}$$

Démonstration. De (21) on a

$$f(b)-f(a)=\sum_{k=1}^{n} c_k\,(b^{r_k}-a^{r_k}). \tag{23}$$

D'après (8) on a les relations

$$b^{r_k}-a^{r_k}\geqslant r_k\,(b-a)\left(\sqrt{ab}\right)^{r_k-1},\quad k=1,2,\ldots,n,$$

et d'après celà on peut écrire (23) sous la forme

$$f(b)-f(a)\geqslant(b-a)\sum_{k=1}^{n}c_k\,r_k\left(\sqrt{ab}\right)^{r_k-1},$$

ce qui, en d'autres termes, représente (22) étant donné que

$$f'\left(\sqrt{ab}\right)=\sum_{k=1}^{n}c_k\,r_k\left(\sqrt{ab}\right)^{r_k-1}.$$

Soit $r_k=k=1,2,\ldots,$ *et soit la série*

$$f(x)=c_0+c_1x+\sum_{k=2}^{\infty}c_kx^k\quad(c_k\geqslant0,\ k=2,3,\ldots.)\tag{24}$$

convergente pour $|x|\leqslant R$. *On a alors, pour* $a,b\in[0,R]$, *l'inégalité*

$$f(b)-f(a)\geqslant(b-a)f'\left(\sqrt{ab}\right)\quad(b\geqslant a>0).$$

Exemple. Étant donné que

$$\operatorname{tg}x=\sum_{k=1}^{\infty}c_{2k-1}x^{2k-1}\quad\left(c_{2k-1}>0,\ k=1,2,\ldots;\ 0\leqslant x<\frac{\pi}{2}\right),$$

on a

$$\operatorname{tg}\beta-\operatorname{tg}\alpha\geqslant(\beta-\alpha)\left(1+\operatorname{tg}^2\sqrt{\alpha\beta}\right)\quad\left(\frac{\pi}{2}>\beta\geqslant\alpha\geqslant0\right).$$

Considérons de nouveau la fonction

$$I(t)=\int_a^b x^t\cdot\frac{1}{x}\,dx\quad(b\geqslant a>0),$$

d'où il résulte que $I(0)=\ln b-\ln a$, $I(1)=b-a$, $I(2)=\dfrac{b^2-a^2}{2}$.

L'inégalité (2'), pour $t=0$ se réduit à $I^2(1)\leqslant I(0)\,I(2)$, ce qui, pour notre exemple, mène à l'inégalité

$$(b-a)^2\leqslant(\ln b-\ln a)\cdot\frac{b^2-a^2}{2}\quad(b\geqslant a>0),$$

qui pour $b>a>0$ peut être écrite dans la forme

$$\frac{b+a}{2}>\frac{b-a}{\ln b-\ln a}\quad(b>a>0).\tag{25}$$

Il existe plusieurs preuves de l'inégalité (25). L'une d'elles est donnée dans [4], une autre dans [5, p. 158], une troisième dans [2, p. 192], et encore deux preuves dans [6, p. p. 273 et 274].

Partant du théorème 2 nous avons tiré la conclusion que la fonction $B(t, u)$ a la propriété de convexité logarithmique, d'où résulte, d'après (6), l'inégalité

$$B^2\left(\frac{t_1+t_2}{2}, \frac{u_1+u_2}{2}\right) \leqslant B(t_1, u_1)\, B(t_2, u_2),$$

qui se réduit, pour $t_1=p+r$, $t_2=p-r$, $u_1=q+s$, $u_2=q-s$ ($p>r>0$, $q>s>0$) à

$$B^2(p, q) \leqslant B(p+r, q+s)\, B(p-r, q-s). \tag{26}$$

Soit $f(x)=x^r(1-x)^s$ ($r>0$, $s>0$). On a alors

$$M=\max_{0<x<1}\{f(x)\}=\left(\frac{r}{r+s}\right)^r\left(\frac{s}{r+s}\right)^s.$$

A la suite de

$$B(p+r, q+s)=\int_0^1 x^{p+r-1}(1-x)^{q+s-1}\,dx=\int_0^1 f(x)\, x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx$$

$$\leqslant M\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx=\left(\frac{r}{r+s}\right)^r\left(\frac{s}{r+s}\right)^s B(p, q),$$

(26) se réduit à l'inégalité

$$B(p, q) \leqslant \left(\frac{r}{r+s}\right)^r\left(\frac{s}{r+s}\right)^s B(p-r, q-s) \quad (p>r>0,\ q>s>0)$$

obtenue par P. Kesava Menon [8] (cf. [6], p. 289).

BIBLIOGRAPHIE

[1] G. Pólya und G. Szegö, *Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis*, Berlin, 1925. Traduction russe D. A. Raikov, Moscou, 1956.

[2] D. S. Mitrinović, *Nejednakosti*, Beograd 1965.

[3] G. H. Hardy, J. E. Littlewood and G. Pólya, *Inequalities*, Cambridge 1934. Traduction russe V. I. Levin, complétée par V. I. Levin et S. B. Steckin, Moscou 1948.

[4] B. Ostle and H. L. Terwillinger, Proceedings of the Montana Academy of Sciences, 17 (1957), 69—70.

[5] D. S. Mitrinović, *Elementary Inequalities*, Groningen 1964.

[6] D. S. Mitrinović, *Analytic Inequalities*, Springer—Verlag, Berlin—Heidelberg—New York, 1970.

[7] E. T. Whittaker and G. N. Watson, *A Course of Modern Analysis*, Cambridge, 1927.

[8] P. Kesava Menon, *Some inequalities involving the* Γ— *and* ζ*-functions*. Math. Student 11, 10—12 (1943).