PUBLICATIONS DE L'INSTITUT MATHÉMATIQUE
Nouvelle série, tome 11 (25), 1971. pp. 93–97

SUR LA PERFECTION DES PROCÉDÉS CONTINUS PERMANENTS

Milivoje G. Lazić

(Communiqué le 23 Octobre 1970)

C'est en raison de la diversité de désignations et de l'incompatibilité de terminologies dans la littérature courante, que l'on donne tout d'abord, dans la Section 1, les symboles et les définitions les plus nécessaires. Les travaux dont on les a pris sont cités à la fin de chaque paragraphe de cette Section.

Dans la Section 2, le théorème 2 est le plus important, aussi bien pour la profondeur du résultat sur lequel sa démonstration est basée, qu'en raison de la possibilité d'en tirer des résultats nouveaux. Par exemple, sur ce théorème sont basées la démonstration du théorème 3, qui en est une conséquence intéressante, et celle du théorème 4, qui, avec le théorème 1, donne la possibilité d'obtenir certaines généralisations des résultats relatifs à la perfection d'une classe importante de procédés.

La Section 3 contient la constatation plus précise de ce fait-là.

1. Symboles, définitions et remarques

Une fonctionnelle $|x|$ définie sur un espace linéaire X est une *pseudonorme* si les conditions suivantes sont remplies:

$$1^\circ\ |0|=0 \qquad\qquad 3^\circ\ |-x|=|x| \text{ et}$$

$$2^\circ\ |x+y|\leqslant|x|+|y|, \qquad 4^\circ\ \lambda_n\to\lambda \text{ et } |x_n-x|\to 0$$

$$\text{entraînent } |\lambda_n x_n-\lambda x|\to 0.$$

$|x|$ est une *pseudonorme homogène* si les conditions 2° et

$$5^\circ\ |\lambda x|=|\lambda|\,|x|$$

sont remplies. Une pseudonorme $|x|$ est une *norme* lorsque $|x|=0$ entraîne $x=0$; on dit alors que le couple $(X, |x|)$ est un *espace* F^*. Si, de plus, existent des pseudonormes homogènes $|x|_k$ $(k=0, 1, \ldots)$ telles que

$$|x_n|\to 0 \text{ si et seulement si } |x_n|_k\to 0 \text{ pour tout } k=0, 1, \ldots,$$

alors nous disons que $(X, |x|)$ est un *espace* B_0^*. Un espace $F^*(B_0^*)$ complet (la fonctionnelle $d(x, y)=|x-y|$ en est une métrique) est un *espace* $F(B_0)$. [1]

Une fonctionnelle réelle (complexe) $L=L(t)$ additive et homogène, définie sur un espace linéaire L^0 de suites réelles (complexes) t, est un *procédé* définissant une limite sur L^0; on appelle alors le nombre $L(t)$ *limite* de la suite t par le procédé L et, en même temps, on dit que L^0 est le *domaine* du procédé L. [2]

Si pour deux procédés L et M donnés on a $L^0 \subseteq M^0$, nous disons que le procédé M est *plus général* que le procédé L. Dans le cas où les functionnelles $L=L(t)$ et $M=M(t)$ coïncident, on dit que les procédés L et M sont équivalents. Un procédé L est *parfait à un point* t_0 par raport à une classe de procédés $\mathcal{M}$ si, pour tout procédé permanent $M \in \mathcal{M}$ plus général que L, on a $M(t_0)=L(t_0)$. Lorsque cette conditions est remplie pour tout point du domaine L^0, nous disons simplement que le procédé L est *parfait* par rapport à la classe $\mathcal{M}$. [3]

Si X est une partie d'un espace topologique dont x_0 est un point d'accumulation possédant une base de voisinages dénombrable, et si $F=(f_n(x))$ est une suite de fonctionnelles définies sur $X_0=X\setminus\{x_0\}$, alors $L=L(X, x_0, F)$ désigne le procédé déterminé par la fonctionnelle $L=L(t)$ définie sur l'espace linéaire L^0 de suites $t=(r_n)$ telles que la série $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) r_n$ converge pour tout $x \in X_0$ et $\lim_{x\to x_0} \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) r_n = L(t)$ existe. Dans le cas où $X=[a, x_0)$ nous remplaçons le signe $L=L(X, x_0, F)$ par $L=L(a, x_0, F)$. Aux éléments X, x_0 et F donnés on peut associer un procédé d'une manière un peu plus générale, à savoir, nous désignerons par $L_g=L_g(X, x_0, F)$ le procédé déterminé par la fonctionnelle $L_g=L_g(t)$ définie sur l'espace linéaire L_g^0 de suites $t=(r_n)$ telles que $\lim_{x\to x_0} \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) r_n = L_g(t)$ existe. Un procédé $L_g(X, x_0, F)$ est plus général que le procédé $L(X, x_0, F)$ correspondant: pour tout $t \in L^0$, on a $L_g(t)=L(t)$ (ce qui veut dire que la fonctionnelle $L_g=L_g(t)$ est une extension de la fonctionnelle $L=L(t)$, correspondante). Dans les deux cas mentionnés, il s'agit aussi bien de procédés appliqués à des suites de nombres réels, que de ceux appliqués aux suites de nombres complexes. [2]

2. Résultats

Les domaines L^0 et L_g^0 des procédés $L(X, x_0, F)$ et $L_g(X, x_0, F)$, comme d'ailleurs le domaine de tout procédé, sont des espaces linéaires par rapport aux opérations „sommation de suites" et „multiplication d'une suite par un scalaire" — définies comme d'habitude. La structure topologique possible et le degré de sa compatibilité avec la structure algébrique mentionnée dépendent des éléments de départ X, x_0 et F. L. Włodarski [3] a découvert que pour certains procédés $L(a, x_0, F)$ le domaine L^0 peut obtenir la structure d'espace B_0. A savoir, il a proposé la définition suivante:

Un procédé $L(a, x_0, F)$ est *continu* lorsque les fonctions $f_n(x)$ $(n=0, 1, \ldots)$ sont continues dans l'intervalle $[a, x_0)$ et il existe une suite (a_n) $(a_0=a)$, croissante d'une manière monotone et convergente vers x_0, telle que, si, pour une suite (r_n) arbitraire la série $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) r_n$ converge pour $x=a_{m-1}$ et pour $x=a_m$, alors la même série converge uniformément dans l'intervalle $[a_{m-1}, a_m]$.

Cette définition a été complétée par la remarque importante suivante, concernant le cas où le procédé $L(a, x_0, F)$ est continu: si, pour une suite (r_n) arbitraire, la série $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) r_n$ converge pour tout x de l'intervalle $[a, x_0)$, alors la même série converge uniformément dans chaque intervale $[a, x_1]$ $(a<x_1<x_0)$. Donc, la fonction définie par la série mentionnée est alors continue dans l'intervalle $[a, x_0)$.

Pour les pseudonormes homogènes L. Włodarski a pris

$$|t|_n = |r_n| \quad (n=0, 1, \ldots),$$

$$|t|_{L,m} = \sup_p \left| \sum_{n=0}^{p} f_n(a_m)\, r_n \right| \quad (m=0, 1, \ldots) \text{ et}$$

$$|t|_L = \sup_{a \leqslant x < x_0} \left| \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)\, r_n \right|,$$

et il a démontré que $(L^0, |t|)$ avec

$$|t| = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} \cdot \frac{|t|_n}{1+|t|_n} + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{2^m} \cdot \frac{|t|_{L,m}}{1+|t|_{L,m}} + |t|_L$$

est un espace F. De la formule pour la norme $|t|$ résulte que $(L^0, |t|)$ est également un espace B_0. Ce fait s'est montré très important pour la perfection de certains procédés continus.

Dans [3] et [4] L. Włodarski a supposé que la classe $\mathcal{M}$ (de la définition d'un procédé parfait) est composée de procédés de la forme $M(b, y_0, G)$ et il a donné plusieurs résultats relatifs à la perfection des procédés continus permanents par rapport à une telle classe $\mathcal{M}$. Le but fondamental de cet article sont les résultats au moyen desquels nous obtenons quelques généralisations des résultats mentionnés de L. Włodarski, au sens de l'extension de la classe de procédés par rapport à laquelle nous démontrons la perfection.

Théorème 1. *Soit $L = L(a, x_0, F)$ un procédé continu et $M = M(Y, y_0, G)$ un procédé plus général que L. Alors la restriction $M^{(0)}(t)$ de la fonctionnelle $M(t)$ de M^0 à L^0 est une fonctionnelle linéaire (additive et continue) sur l'espace $(L^0, |t|)$.*

Démonstration. Notre résultat est une généralisation évidente du théorème VI (a) de L. Włodarski [3] relatif au cas $M = M(b, y_0, G)$. Nous exposons sa démonstration dans le but de faire ressortir la différence entre cette démonstration et celle de notre théorème 4, qui résout le même problème pour les procédés définis de la manière plus générale. A savoir, pour tout $t = (r_n) \in L^0$ on a $M^{(0)}(t) = M(t) = \lim\limits_{y \to y_0} \sum\limits_{n=0}^{\infty} g_n(y)\, r_n = \lim\limits_{p} \lim\limits_{q} \sum\limits_{n=0}^{q} g_n(b_p)\, r_n$, avec une suite (b_p) arbitraire d'éléments de Y_0 telle que $b_p \to y_0$. Il en résulte que la fonctionnelle $M^{(0)}(t)$ est additive et appartient au plus à la deuxième classe de Baire sur l'espace $(L^0, |t|)$ (puisque dans cet espace la convergence selon la norme entraîne la convergence en coordonnées). D'après un théorème de Banach ([5], p. 23), $M^{(0)}(t)$ est une fonctionnelle linéaire sur l'espace $(L^0, |t|)$.

Théorème 2. *Soit $L = L(a, x_0, F)$ un procédé continu et $M_g = M_g(Y, y_0, G)$ un procédé plus général que L. Il existe alors un voisinage 0_0 du point y_0, tel que la série $\sum\limits_{n=0}^{\infty} g_n(y)\, r_n$ converge pour tout $y \in Y_0 \cap 0_0$ et pour tout $t = (r_n) \in L^0$.*

D é m o n s t r a t i o n. Supposons le contaire, c'est-à-dire que pour tout voisinage O de y_0 on puisse trouver un $b \in Y_0 \cap 0$ et une suite $t=(r_n) \in L^0$ tels que la série $\sum_{n=0}^{\infty} g_n(b) r_n$ diverge. Il existent alors les points $b_p \in Y_0$ $(p=0, 1, \ldots)$ et les suites $t_p=(r_{n,p}) \in L^0$ $(p=0, 1, \ldots)$, tels que $b_p \to y_0$ et

(1) la série $\sum_{n=0}^{\infty} g_n(b_p) r_{n,p}$ diverge pour tout $p=0, 1, \ldots$.

Posons

$$B_{p,q}(t)=\sum_{n=0}^{q} g_n(b_p) r_n \quad (t=(r_n) \in L^0;\ p,\ q=0, 1, \ldots).$$

Pour tout p et q la fonctionnelle $B_{p,q}(t)$ est linéaire sur l'espace $(L^0, |t|)$ (voir la remarque entre parenthèses dans la démonstration du théorème 1). En vertu de (1), $\lim_q B_{p,q}(t_p)$ n'existe pour aucun $p=0, 1, \ldots$. D'après le théorème sur la condensation des singularités ([5], p. 24), l'ensemble H de suites t telles que $\lim_q B_{p,q}(t)$ n'existe pour aucun $p=0, 1, \ldots$ est de la deuxième catégorie dans l'espace $(L^0, |t|)$ et son complément y est de la première catégorie. Donc, l'ensemble H n'est pas vide. Autrement dit, il existe une suite $\bar{t}=(\bar{r}_n) \in L^0$ telle que $\lim_q B_{p,q}(\bar{t})$ n'existe pour aucun $p=0, 1, \ldots$, c'est-à-dire que

(2) la série $\sum_{n=0}^{\infty} g_n(b_p) \bar{r}_n$ diverge pour tout $p=0, 1, \ldots$.

D'autre part, de $L^0 \subseteq M_g^0$ (le procédé M_g est plus général que L) résulte que $\bar{t} \in M_g^0$ et, d'après la définition du procédé $M_g(Y, y_0, G)$, qu'il existe $\lim_{y \to y_0} \sum_{n=0}^{\infty} g_n(y) \bar{r}_n \ (=M_g(\bar{t}))$. De là et de $b_p \to y_0$ il suit que la série $\sum_{n=0}^{\infty} g_n(b_p) \bar{r}_n$ converge pour $p \geqslant p_0$ (et, si nous considérons tels p seulement, qu'il existe $\lim_p \sum_{n=0}^{\infty} g_n(b_p) \bar{r}_n$ avec la même valeur), ce qui est contraire à (2). La contradiction obtenue prouve notre théorème.

T h é o r è m e 3. *Si le domaine d'un procédé* $M_g(Y, y_0, G)$ *coïncide avec le domaine d'un procédé continu* $L(a, x_0, F)$, *alors le procédé* $M_g(Y, y_0, G)$ *est équivalent à un procédé* $N(Z, z_0, H)$.

D é m o n s t r a t i o n. Réellement, notre théorème est une conséquence du théorème 2. Car, d'après ce théorème-là, il existe un voisinage O_0 du point y_0, tel que la série $\sum_{n=0}^{\infty} g_n(y) r_n$ converge pour tout $y \in Y_0 \cap O_0$ et pour tout $t=(r_n) \in L^0=M_g^0$. Si nous posons $Z=Y \cap O_0$, $z_0=y_0$ et $H=(h_n(z))$, $h_n(z)$ étant la restriction de la fonctionnelle $g_n(y)$ de Y_0 à $Y_0 \cap O_0=Z_0$, nous obtenons un procédé $N(Z, z_0, H)$, dont l'équivalence au procédé $M_g(Y, y_0, G)$ est facile à établir. De même, il est évident que tous les procédés $N(Z, z_0, H)$, formés de telle manière, sont équivalents.

T h é o r è m e 4. *Supposons* $L=L(a, x_0, F)$ *un procédé continu et* $M_g=M_g(Y, y_0, G)$ *un procédé plus général que* L. *Alors la restriction* $M_g^{(0)}(t)$ *de de la fonctionnelle* $M_g(t)$ *de* M_g^0 *à* L^0 *est une fonctionnelle linéaire sur l'espace* $(L^0, |t|)$.

D é m o n s t r a t i o n. Dans la démonstration du théorème 1, on a employé d'une manière implicite le fait que $t=(r_n) \in M^0$, où $M=M(Y, y_0, G)$, suppose la convergence de la série $\sum_{n=0}^{\infty} g_n(y)\, r_n$ pour tout $y \in Y_0$. C'est précisément grâce à cette supposition que nous avons pu choisir la suite (b_p) dont il s'y agit d'une manière tout à fait arbitraire. D'autre part, $t=(r_n)\in M_g^0$, où $M_g = M_g(Y, y_0, G)$, exige la convergence de la série mentionnée seulement pour tout $t \in Y_0 \cap 0$, O étant un voisinage du point y_0 (et pouvant varier avec t). Il en résulte que nous ne pouvons pas, dans la démonstration de notre théorème, nous servir d'une suite (b_p) prise d'une manière arbitraire. A savoir, dans notre cas il pourrait arriver que, pour un p donné, la série

$$\sum_{n=0}^{\infty} g_n(b_p)\, r_n \left(= \lim_q \sum_{n=0}^{q} g_n(b_p)\, r_n \right)$$

diverge pour un $t=(r_n)\in L^0$. C'est pourqoi, on ne pourrait pas parler alors de la continuité sur l'espace $(L^0, |t|)$ de la fonctionnelle définie par la série méntionnée. Cependant, il résulte du théorème 2 que, pour $p \geqslant p_0$, avec un p_0 suffisamment grand, un tel cas ne peut pas se présenter. Par conséquent, si nous prenons les points $b_p\,(p=0, 1, \ldots)$ dans l'ensemble $Y_0 \cap 0_0$, où 0_0 est un des voisinages du point y_0 dont ce théorème 2 assure l'existence, alors la démonstration du théorème 4 peut marcher tout à fait à la manière de la démonstration du théorème 1.

3. Conclusion

Nous avons déjà dit que L. Włodarski avait étudié la perfection des procédés continus permanents par rappors à la classe $\mathcal{M}$ constituée de procédés de la forme $M(b, y_0, G)$. *Nos théorèmes* 1 *et* 4 *assurent la validité de ses résultats si l'on suppose la classe* $\mathcal{M}$ *constituée de procédés de la forme* $M(Y, y_0, G)$ *ou* $M_g(Y, y_0, G)$. Les démonstrations changent en ce que dans ce cas nouveau, au lieu de se référer au théorème VI (a) de [3], il faut s'appuyer sur le théorème 1 ou sur le théorème 4, suivant qu'un procédé de la forme $M(Y, y_0, G)$ ou de la forme $M_g(Y, y_0, G)$ est en question.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Mazur, S. et Orlicz, W., *Sur les espaces métriques linéaires* (I), Studia Math. 10 (1948), p. 184.

[2] Lazić, M., *Sur les procédés fonctionnels (de limitation)*, Mat. vesnik 6 (21), sv. 4, 1969, pp. 425—436.

[3] Włodarski, L., *Sur les méthodes continues de limitation* (I), Studia Math. 14 (1954), pp. 161—187.

]4] Włodarski, L., *Sur les méthodes continues de limitation* (II), Studia Math. 14 (1954), pp. 188—199.

[5] Banach, S., *Théorie des opérations linéaires*, Monografje Matematyczne I, New York, 1955.