PUBLICATIONS DE L'INSTITUT MATHEMATIQUE
Nouvelle serie, tome 11 (25), 1971, pp. 61—72

ПОЧТИ ПЕРИОДИЕСКИЕ СЕМЕЙСТВА ДВИЖЕНИЙ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Ч. Джая

(Поступило 12 июня 1970)

Рекуррентные и почти периодические движения динамической системы Birkhoff-a определены в [1] (стр. 402—429), где изложены основные определения и установлен ряд теорем, связывающих между собой различные виды движений. В [4] и [5] обобщено определение рекуррентного движения в дисперсной динамической системе, то-есть в системе без единственности в метрическом пространстве, а в [6] определены рекуррентность и периодичность в топологических пространствах. В настоящей статье рассматривается, так же, как в [2] и [3], семейство динамических систем и определено рекуррентное и почти периодическое семейство движений. Некоторые определения и теоремы „перенесены" из теории одной динамической системы на семейство динамических систем, а некоторые теоремы свойственны только семейству динамических систем. Для каждой динамической системы предполагается, что выполнено условие единственности, то есть рассматривается множество динамических систем[1] Birkhoff-a.

1. Предварительные определения и теоремы.

Рассмотрим некоторое множество Д. С. f_α (α пробегает некоторое множество индексов J) в произвольном полном метрическом пространстве R ([1], стр. 346). Обозначим это множество $F \equiv \bigcup_{\alpha \in J} \{f_\alpha (p, t)\}$, где $p \in R$ а $t \in I$, причем I обозначает множество всех действительных чисел[2].

Если $p = \text{const.}$, то множество $\bigcup_\alpha \{f_\alpha (p, t)\} \equiv F_p$ назовем как в [2] семейством движений Д. С. Все движения этого семейства „исходят" из точки p, так как $f_\alpha (p, 0) = p$ для каждого движения из F_p.

Совокупность траекторий $\bigcup_\alpha \{f_\alpha (p, I)\} \equiv T_p$ называется динамической воронкой семейства движений F_p. Аналогично определяются положительная T_p^+ и отрицательная T_p^- динамическая полуворонка ([2], [3]). Положительная

---

[1] Для сокращения в дальнейшем вместо слов „динамическая система" пишем только Д. С.

[2] Вместо $\bigcup_{\alpha \in J}$ пишем дальше только $\bigcup_\alpha$.

полуворонка, например, определяется равенством $T_p^+ \equiv \bigcup_\alpha \{f_\alpha(p, I^+)\}$, где I^+ множество всех неотрицательных действительных чисел.

Если $p = \text{const.}$ и $t = \text{const.}$, то множество $\bigcup_\alpha \{f_\alpha(p, t)\} \equiv S_t^p$ называется сечением воронки T_p в момент t.

Обозначим $\pi(A, B)$ и $\tau(A, B)$ соответственно полуотклонение множества A от множества B и отклонение между множествами A и B ([7], стр. 293).

Множество Д. С. F будем называть также семейством Д. С. F. Через S_t^A — обозначим $\bigcup_{p \in A} S_t^p = \bigcup_{p \in A} \bigcup_\alpha \{f_\alpha(p, t)\}$.

Определение 1.1.

Семейство движений F_p называется непрерывно зависящим от начальной точки p, если для любых чисел $\varepsilon > 0$ и $T > 0$ найдется такое число $\delta(\varepsilon, T) > 0$, что для каждого $t \in [-T, +T]$ выполнено неравенство

$$\tau(S_t^p, \; S_t^q) < \varepsilon, \tag{1.1.}$$

если только $\rho(p, q) < \delta$.

Для сокращения это свойство семейства F_p назовем свойством II_0. Легко доказывается, что если в компактном пространстве R все семейства $F_p \, (p \in R)$ непрерывно зависят от начальной точки, тогда эта непрерывность равномерна, т. е. число δ не зависит от точки p.

Определение 1.2.

Семейство движений F_p называется равностепенно непрерывным по начальным данным, если для любых чисел $\varepsilon > 0$ и $T > 0$ найдется такое число $\delta(\varepsilon, T) > 0$, что для всяких $t \in [-T, +T]$ и $\alpha \in J$ выполнено неравенство

$$\rho[f_\alpha(p, t), f_\alpha(q, t)] < \varepsilon, \tag{1.2}$$

если только $\rho(p, q) < \delta$.

Это свойство назовем свойством II_1. Из свойства II_1 следует свойство II_0.

Если в компактном пространстве R все семейства $F_p \, (p \in R)$ обладают свойсвом II_1, то и эта непрерывность равномерна, т. е. число δ не зависит от точки p.

Определение 1.3.

Скажем, что семейство движений F_p обладает S — свойством, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta(\varepsilon) > 0$ такое, что

$$\tau(S_t^p, \; S_t^q) < \varepsilon, \tag{1.3}$$

для всех $t \in I$, если только $\rho(p, q) < \delta$.

Определение 1.4.

Семейство движений F_p называется равностепенно устойчивым по Ляпунову, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое число $\delta > 0$, что для любых $t \in I$ и $\alpha \in J$

$$\rho[f_\alpha(p, t), f_\alpha(q, t)] < \varepsilon, \tag{1.4}$$

если только $\rho(p, q) < \delta$.

Назовем эту устойчивость для сокращения L_j — устойчивостью или L_j — свойством. Из L_j — устойчивости семейства следует S — свойство.

Аналогично тому как это сделано в [1] (стр. 412), легко доказать следующее утверждение:

Если все семейства $F_p (p \in R)$ компактного пространства обладают S — свойством, соответственно L_j — устойчивостью, то они обладают этим свойством равномерно, т. е. число δ, фигурирующее в определениях (1.3) и (1.4) не зависит от точки p.

Замечание. Если точку q в определениях 1.1 — 1.4 предполагать принадлежащей некоторому множеству $B \subset R$, то эти определения можно перефразировать добавляя слова „относительно множества $B \subset R$“, аналогично тому как это сделано в [1] (стр. 412)]. В вышеуказанных определениях $q \in R$.

Можно также определить только $S^+ (S^-)$ — свойство или $L_j^+ (L_j^-)$ — устойчивость, если эти свойства относятся к неотрицательным (неположительным) значениям параметра t. В основном мы займемся свойствами, соответствующими неотрицательным значениям t, как это и делается обычно.

Определение 1.5.

Семейство движений F_p обладает R — свойством, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое число $\delta(\varepsilon) > 0$, что для любых чисел t, t_1, $t_2 \in I$

$$\tau(S^p_{t_1+t}, S^p_{t_2+t}) < \varepsilon, \tag{1.5}$$

если только $\tau(S^p_{t_1}, S^p_{t_2}) < \delta$.

Определение 1.6.

Семейство Д. С. F обладает T — свойством, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое число $\delta(\varepsilon) > 0$, что для любых двух множеств $A, B \subset R$ и любого $t \in I$

$$\tau(S^A_t, S^B_t) < \varepsilon, \tag{1.6}$$

если только $\tau(A, B) < \delta$.

Из R — свойства не следует вообще говоря T — свойство, также как из T — свойства не вытекает R — свойство.

Аналогично определяются $R^+ (R^-)$ и $T^+ (T^-)$ свойства, соответственно для неотрицательных (неположительных) значений параметра t.

Теорема 1.1. *Если в компактном метрическом пространстве R функция $f(x, t)$ непрерывна по $x (x \in R)$, то для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое число $\delta(\varepsilon, t) > 0$, что из $\tau(A, B) < \delta$ следует $\tau[f(A, t), f(B, t)] < \varepsilon$ $(A, B \subset R)$.*

Возьмем произвольное фиксированное число $\varepsilon > 0$. Пусть $\delta\left(\frac{\varepsilon}{3}, t\right) > 0$ число соответствующее непрерывности функции $f(x, t)$ по x. Из неравенства $\tau(A, B) < \delta$ следует, что для каждого $x \in A$ существует, по крайней мере одно $y' \in B$ такое, что $\rho(x, y') < \delta$. Обозначим множество $\{y'\}$ через B'. В силу непрерывности

$$\text{(a)} \qquad \rho[f(x, t), f(y', t)] < \frac{\varepsilon}{3}$$

и если, образуя объединения в левой части неравенства, заставляя x, т. е. y', пробегать все точки множества A, т. е. B', получаем

$$\text{(1.7)} \qquad \tau[f(A, t), f(B', t)] < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Таким же образом из $\tau(A, B) < \delta$ следует, что для каждого $y \in B$ существует, по крайней мере одно $x' \in A$ такое, что $\rho(x', y) < \delta$. Если обозначим множество $\{x'\}$ через A' и поступим как выше, получим

$$\text{(1.8)} \qquad \tau[f(A', t), f(B, t)] < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Из (1.7) получается, что $\pi[f(A, t), f(B', t)] < \frac{\varepsilon}{3}$, тогда и $\pi[f(A', t), f(B', t)] < \frac{\varepsilon}{3}$. Таким же образом из (1.8) получается $\pi[f(B', t), f(A', t)] < \frac{\varepsilon}{3}$, т. к. $A' \subset A$ и $B' \subset B$. Из последних двух неравенств следует

$$\text{(1.9)} \qquad \tau[f(A', t), f(B', t)] < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Из (1.7), (1.8) и (1.9) имеем $\tau(f(A, t), f(B, t)] < \varepsilon$, и тем самым теорема доказана.

Следствие 1.1. Если в компактном пространстве семейство F_p для каждой точки $p \in R$ обладает L_j — свойством, тогда семейство Д. С. F обладает T — свойством.

Доказательство аналогично, как в теореме 1.1, т. к. в компактном пространстве L_j — устойчивость равномерная, то число δ, которому соответсвует неравенство (a), не зависит от точки x и конечно, в силу L_j — свойства, ни от индекса $\alpha \in J$. Поэтому для каждой функции f_α из F получается, что из $\tau(A, B) < \delta$ $(A, B \subset R)$ вытекает $\tau[f_\alpha(A, t), f_\alpha(B, t)] < \varepsilon$ для каждого $\alpha \in J$ и каждого $t \in I$. Если перейти к объединениям по α в левой части неравенства, получается $\tau(S_t^A, S_t^B) < \varepsilon$.

2. Почти периодические семейства движений.

Определение 2.1.

Семейство движений F_p называется рекуррентным, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое число $L(\varepsilon) > 0$, что для любых двух чисел $t_1, t_2 \in I$ существует число $t_0 \in [0, L]$, для которого выполнено неравенство

$$\text{(2.1)} \qquad \tau(S_{t_1}^p, S_{t_2+t_0}^p) < \varepsilon.$$

Определение 2.2.

Семейство движений называется почти периодическим, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое число $T(\varepsilon) > 0$, что на любом отрезке времени длины T найдется число s такое, что для каждого $t \in I$

$$\tau(S_t^p,\ S_{t+s}^p) < \varepsilon. \tag{2.2}$$

Множество таких чисел $\{s\}$ называется множеством ε — смещений семейства движений F_p. Очевидно, что число T определяет некоторое относительно плотное множество чисел $\{s\}$ ([1] стр. 407).

Определение 2.3.

Семейство движений F_p называется периодическим, если существует такое число $\omega > 0$, что $S_{t+\omega}^p = S_t^p$ для всех $t \in I$.

Число ω называется периодом семейства движений F_p.

Очевидно, что если семейство F_p имеет период ω, то и $S_{t+n\omega}^p = S_t^p$ $(n = \pm 1, \pm 2, \ldots)$ для всех $t \in I$. Периодические семейства движений — частный случай почти периодических. Действительно, $\{n\omega\}$ относительно плотное множество чисел, причем $\tau(S_t^p,\ S_{t+n\omega}^p) = 0$.

Очевидно, что из периодичности каждого движения $f_\alpha(p, t)$ с тем же самым периодом ω, вытекает периодичность с периодом всего семейства F_p этих движений.

Наоборот, если семейство F_p периодическое с периодом ω, то и каждое движение $f_\alpha(p, t) \in F_p$ периодическое с периодом ω. В самом деле, из определения 2.3 следует, что при $t = 0$ $S_\omega^p = p$, и потому $f_\alpha(p, \omega) = p$ для каждого $\alpha \in J$, а это и означает, что движение $f_\alpha(p, t)$ обладает периодом ω. Из вышесказанного непосредственно вытекает

Теорема 2.1. *Для того, чтобы семейство движений F_p было периодическим, необходимо и достаточно, чтобы $S_\omega^p = p$ при некотором $\omega > 0$.*

Теорема 2.2. *Каждое почти периодическое семейство движений рекуррентно.*

Пусть произвольно взятому $\varepsilon > 0$ соответствует согласно определению 2.2 число $T(\varepsilon)$. Положим $L(\varepsilon) = T(\varepsilon)$ и возьмем любые два числа $t_1,\ t_2 \in I$.

Покажем, что существует такое $t_0 \in [0, L]$, что выполнено неравенство (2.1). На основании определения 2.2

$$\tau(S_{t_1}^p,\ S_{t_1+s}^p) < \varepsilon, \tag{2.3}$$

для любого s из некоторого относительно плотного множества $\{s\}$, в частности можем считать, что $t_2 - t_1 \leqslant s \leqslant t_2 - t_1 + T$. Тогда $s = t_2 - t_1 + t_0$, где $t_0 \in [0, T] = [0, L]$. Подставляя значение s в (2.3) получаем (2.1).

Теорема 2.3. *Если почти периодическое семейство движений F_p равностепенно устойчиво по Ляпунову, тогда и каждое движение $f_k \in F_p$ почти периодическое с тем же самым множеством ε — смещений.*

Для произвольно взятого $\varepsilon > 0$ выберем число $\delta(\varepsilon) > 0$, соответствующее определению 1.4. Определим затем, согласно почти периодичности, число $T(\delta) > 0$, которое определяет относительно плотное множество чисел $\{s\}$. Можно считать $\delta < \varepsilon$. На основании определения 2.2 для всех $t \in I$ и $s \in \{s\}$

$$\tau(S_t^p,\ S_{t+s}^p) < \delta < \varepsilon. \tag{2.3}$$

Предположим теперь, противное, т. е., что существует движение $f_k \in F_p$ для которого при каких-то $t_0 \in I$ и $s \in \{s\}$

$$\rho\,[f_k(p, t_0), f_k(p, t_0+s)] \geqslant \varepsilon. \tag{2.4}$$

Однако из (2.3) при $t=0$ следует, что $\tau(p, S_s^p) < \delta$ и поэтому $\rho\,[p, f_k(p, s)] < \delta$. Ввиду выбора числа δ будет, в частности, $\rho\,[f_k(p, t_0), f_k(p, s+t_0)] < \varepsilon$, что противоречит неравенству (2.4).

Как следствие из определения 2.2 можно вывести следующее утверждение:

Предположим, что семейство F_p почти периодично, возьмем произвольное $\varepsilon > 0$ и допустим, что $\tau(S_{t_1}^p, S_{t_2}^p) < \frac{\varepsilon}{3}$. В силу определения 2.2 найдется число $T\left(\frac{\varepsilon}{3}\right)$, определяющее относительно плотное множество чисел $\{s\}$. Тогда $\tau(S_{t_1}^p, S_{t_1+s}^p) < \frac{\varepsilon}{3}$ и $\tau(S_{t_2}^p, S_{t_2+s}^p) < \frac{\varepsilon}{3}$, а отсюда

$$\tau(S_{t_1+s}^p, S_{t_2+s}^p) \leqslant \tau(S_{t_2+s}^p, S_{t_2}^p) + \tau(S_{t_2}^p, S_{t_1}^p) + \tau(S_{t_1}^p, S_{t_1+s}^p) < \varepsilon.$$

Теорема 2.4. *Если в компактном пространстве R семейство движений F_p почти периодическое и коммутативное* [2], *то семейство F_q, где q — любая точка динамической воронки T_p, является почти периодическим с тем же самым множестом ε — смещений.*

Пусть $q = f_k(p, t_0)$ — произвольная, но фиксированная точка на воронке T_p, а $\varepsilon > 0$ — любое число и пусть ему, согласно непрерывности функции $f_k(p, t)$ на основании теоремы 1.1 соответствует такое число $\delta(\varepsilon) > 0$, что $\tau\,[f_k(A, t_0), f_k(B, t_0)] < \varepsilon$, если $\tau(A, B) < \delta$. В силу почти периодичности семейства F_p этому числу δ соответствует некоторое $T(\delta) > 0$, определяющее относительно плотное множество чисел $\{s\}$ так, что для всякого $t \in I$

$$\tau(S_t^p, S_{t+s}^p) < \delta. \tag{2.5}$$

Ввиду коммутативности семейства F_p будет

$$\bigcup_\alpha \{f_\alpha(f_k(p, t_0), t)\} = f_k(\bigcup_\alpha \{f_\alpha(p, t)\}, t_0)$$

(см. доказательство в [2], стр. 392), то есть $S_t^q = f_k(S_t^p, t_0)$ и для семейства F_q получается, что

$$\tau(S_t^q, S_{t+s}^q) = \tau\,[f_k(S_t^p, t_0), f_k(S_{t+s}^p, t_0)].$$

Из условия (2.5) в силу выбора числа δ следует, что

$$\tau(S_t^q, S_{t+s}^q) = \tau\,[f_k(S_t^p, t_0), f_k(S_{t+s}^p, t_0)] < \varepsilon,$$

что и означает почти периодичность семейства F_q.

Замечание. Условие компактности можем заменить устойчивостью по Лагранжу, так как в этом случае множество T_p компактно [3].

Теорема 2.5. *Если в компактном пространстве семейство F_p почти периодическое, коммутативное и обладает свойством II_0, то оно обладает S — свойством относительно динамической воронки T_p.*

Пусть для произвольно взятого $\varepsilon>0$ число $T\left(\frac{\varepsilon}{3}\right)>0$ соответствует почти периодичности семейства F_p и определяет множество $\{s\}$. Найдем $\delta\left(\frac{\varepsilon}{3}\right)>0$ так, чтобы согласно свойству II_0 было удовлетворено неравенство $\tau(S_t^p, S_t^q)<\frac{\varepsilon}{3}$ для каждого $t\in[0, T]$, если $\rho(p, q)<\delta$. Фиксируем произвольное $t\in I$. На основании свойств множества $\{s\}$ найдется такое $s\in\{s\}$, что $-t\leqslant s\leqslant -t+T$, т. е. $0\leqslant s+t\leqslant T$. Тогда при $q\in S(p, \delta)\cap T_p$

$$\tau(S_{t+s}^p, S_{t+s}^q)<\frac{\varepsilon}{3}. \tag{2.6}$$

В силу почти периодичности семейства F_p

$$\tau(S_t^p, S_{t+s}^p)<\frac{\varepsilon}{3}, \tag{2.7}$$

а на основании теоремы 2.4 и для каждой точки $q\in T_p$

$$\tau(S_t^q, S_{t+s}^q)<\frac{\varepsilon}{3}. \tag{2.8}$$

Неравенства (2.6), (2.7) и (2.8) дают $\tau(S_t^p, S_t^q)<\varepsilon$, что и требовалось доказать.

Теорема 2.6. *Если в компактном пространстве семейство F_q для каждого $q\in T_p$ обладает S — свойством относительно T_p, тогда для любого $\varepsilon>0$ найдется такое $\delta>0$, что из $\tau(S_{t_1}^p, S_{t_2}^p)<\delta$ следует $\tau\left(S_t^{S_{t_1}^p}, S_t^{S_{t_2}^p}\right)<\varepsilon$, для каждого $t\in I$.*

Согласно S — свойству для любого $\varepsilon>0$ найдется такое число $\delta\left(\frac{\varepsilon}{3}\right)>0$, что $\tau(S_t^r, S_t^q)<\frac{\varepsilon}{3}$ при $\rho(r, q)<\delta$ $(r, q\in T_p)$ и любых $t\in T$.

Пусть

$$\tau(S_{t_1}^p, S_{t_2}^p)<\delta. \tag{2.9}$$

Отсюда следует, что каждой точке $q\equiv f_i(p, t_1)\in S_{t_1}^p$ соответствует по крайней мере одна точка $r\equiv f_k(p, t_2)\in S_{t_2}^p$ так, что $\rho(q, r)<\delta$.

Согласно выбору числа δ

$$\tau(S_t^q, S_t^r)<\frac{\varepsilon}{3}. \tag{2.10}$$

Множество всех точек $\{r\}\equiv\tilde{S}_{t_2}^p$ содержится в $S_{t_2}^p$. Если перейти к объединениям в левой части неравенства (2.10), получим

$$\tau\left(S_t^{S_{t_1}^p}, S_t^{\tilde{S}_{t_2}^p}\right)<\frac{\varepsilon}{3}. \tag{2.11}$$

Затем из (2.9) следует, что каждой точке $r' \in S^p_{t_2}$, соответсвует хотя бы одна точка $q' \in S^p_{t_1}$ так, что $\rho(q', r') < \delta$. Поступая как раньше, получаем

$$\tau\left(S_t^{\tilde{S}^p_{t_1}}, S_t^{S^p_{t_2}}\right) < \frac{\varepsilon}{3}, \tag{2.12}$$

где $\tilde{S}^p_{t_1} \subset S^p_{t_1}$.

Как и в теореме 1.1 можно показать, что из (2.11) и (2.12) следует

$$\tau\left(S_t^{\tilde{S}^p_{t_1}}, S_t^{\tilde{S}^p_{t_2}}\right) < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{2.13}$$

Из (2.11), (2.12) и (2.13) получается, что для всех $t \in I$

$$\tau\left(S_t^{S^p_{t_1}}, S_t^{S^p_{t_2}}\right) < \varepsilon,$$

что и требовалось доказать.

Теорема 2.7. *Если в локально компактном пространстве выполнено S — свойство, то множество M точек q семейства движений F_q $(q \in M)$ которых L — устойчивы, открыто.*

Пусть q произвольная точка множества M. Тогда, согласно условию теоремы, множество $\overline{T}_q = \overline{\bigcup_\alpha \{f_\alpha(q, I)\}}$ компактно. Кроме того, найдется такое $\varepsilon > 0$, что множество $\overline{S(\overline{T}_q, \varepsilon)}$ компактно. Выберем согласно S — свойству число $\delta(q, \varepsilon) > 0$ такое, чтобы из $\rho(q, r) < \delta$ следовало $\tau(S^q_t, S^r_t) < \varepsilon$ для всех $t \in I$. Если взять объединения в левой части неравенства, считая что t пробегает множество I, получим

$$\tau\left(\bigcup_{t \in I} S^q_t, \bigcup_{t \in I} S^r_t\right) = \tau(T_q, T_r) < \varepsilon,$$

откуда

$$\pi(T_r, T_q) < \varepsilon, \text{ т. е. } T_r \subset S(T_q, \varepsilon) \subset S(\overline{T}_q, \varepsilon).$$

Поэтому, $\overline{T}_r \subset \overline{S(\overline{T}_q, \varepsilon)}$ что доказывает компактность множества $\overline{T}_r$ и тем самым L — устойчивость семейства F_r, для каждого $r \in S(q, \delta)$.

Лемма 2.1. *Если семейство F_p рекуррентно, то для любого $\varepsilon > 0$ существует такое относительно плотное множество чисел $\{t\}$, что для каждого $t \in \{t\}$ выполнено неравенство $\tau(p, S^p_t) < \varepsilon$.*

Согласно определению рекуррентного семейства движений, из $\tau(S^p_{t_1}, S^p_{t_2+t_0}) < \varepsilon$, где $t_0 \in [0, L(\varepsilon)]$, получается, если положить $t_1 = 0$, $t_2 + t_0 = t$, $\tau(p, S^p_t) < \varepsilon$. Так как теперь $t \in [t_2, t_2 + L]$ и t_2 взято произвольно, то $\{t\}$ относительно плотное множество чисел. (Отсюда сразу следует $\rho(p, f_\alpha(p, t)) < \varepsilon$ для каждого $f_\alpha \in F_p$).

Теорема 2.8. *Если семейство F_p L_j — устойчиво и рекуррентно, то оно является почти периодическим.*

Для произвольно взятого $\varepsilon > 0$ выберем число $\delta(\varepsilon)$ соответствующее L_j — устойчивости так, чтобы при $\rho(p, q) < \delta$ было $\rho[f_\alpha(p, t), f_\alpha(q, t)] < \varepsilon$, для каждого $\alpha \in J$ и всех $t \in I$.

Так как семейство F_p рекуррентно, то по лемме 2.1 $\tau(p, S_s^p)<\delta$ для относительно плотного множества чисел $\{s\}$. Отсюда $\rho[p, f_\alpha(p, s)]<\delta$ при всех $\alpha \in J$ и, ввиду выбора числа δ, $\rho[f_\alpha(p, t), f_\alpha(p, t+s)]<\varepsilon$ для всех $t \in I$. Если образуем объединения в левой части по всем $\alpha \in J$, имеем $\tau(S_t^p, S_{t+s}^p)<\varepsilon$, что говорит о почти периодичности семейства F_p.

Теорема 2.9. *Если семейство движений F_p рекуррентно и обладает R — свойством, то оно является почти периодическим.*

Возьмем произвольное $\varepsilon>0$ и выберем $\delta(\varepsilon)>0$ согласно R — свойству семейства F_p. В силу рекуррентности найдется, по лемме 2.1, для этого δ такое относительно плотное множество чисел $\{s\}$, что $\tau(p, S_s^p)<\delta$, т. е. $\tau(S_o^p, S_s^p)<\delta$. Тогда в силу выбора δ для любого $t \in I$, $\tau(S_t^p, S_{t+s}^p)<\varepsilon$, что и требовалось доказать.

Теорема 2.10. *Пусть семейство движений F_p равностепенно непрерывно по начальным данным. Если оно рекуррентно и обладает R^+ — свойством, то оно является почти периодическим.*

Для произвольно взятого $\varepsilon>0$ определим число $\delta\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)>0$, соответствующее R^+ — свойству. В силу рекуррентности согласно лемме 2.1 сущесвует такое относительно плотное множество чисел $\{s\}$, что

$$\tau(p, S_s^p)<\frac{\delta}{2}. \tag{2.14}$$

Докажем, что каждое $s \in \{s\}$ является ε — смещением для семейства движений F_p. Для фиксированного $s \in \{s\}$ найдем число $\sigma\left(\frac{\delta}{2}\right)>0$ так, чтобы в силу свойства II_1 из $\rho(p, q)<\delta$ следовало $\rho[f_\alpha(p, s), f_\alpha(q, s)]<\frac{\delta}{2}$ для каждого $\alpha \in J$. Возьмем теперь любое $t \in I$. В силу рекуррентности найдется число $t_1<t$ так, что $\tau(p, S_{t_1}^p)<\min(\sigma, \delta)$ или, что то же,

$$\tau(S_o^p, S_{t_1}^p)<\min(\sigma, \delta). \tag{2.15}$$

Отсюда в частности следует, что $\rho[p, f_\alpha(p, t_1)]<\sigma$ для каждого $\alpha \in J$ и в силу выбора σ $\rho[f_\alpha(p, s), f_\alpha(p, t_1+s)]<\frac{\delta}{2}$. Если образуем объединения в левой части последнего нераʙенства по всем $\alpha \in J$, получаем

$$\tau(S_s^p, S_{t_1+s}^p)<\frac{\delta}{2}. \tag{2.16}$$

Неравенства (2.14) и (2.16) дают $\tau(p, S_{t_1+s}^p)<\delta$, т. е. $\tau(S_o^p, S_{t_1+s}^p)<\delta$. Из этого неравенства и (2.15) согласно выбору числа δ, учитывая что $t-t_1>0$, получаем

$$\tau(S_{t-t_1}^p, S_{t+s}^p)<\frac{\varepsilon}{2} \quad \text{и} \quad \tau(S_{t-t_1}^p, S_t^p)<\frac{\varepsilon}{2}.$$

Отсюда $\tau(S_t^p, S_{t+s}^p)<\varepsilon$. Теорема доказана.

Теорема 2.11. *Пусть $\{f_n(p, t)\}$ последовательность движений равномерно сходящаяся к функции $f_0(p, t)$ при $t \in (-\infty, +\infty)$. Если можно найти такое натуральное число N, что каждое семейство движений $F_p^m = \bigcup_{n \geqslant m} \{f_n(p, t)\}$ при $m \geqslant N$ является почти периодическим с тем же самым множеством ε — смещений, то и фукция $f_0(p, t)$ является почти периодической с тем же самым множеством ε — смещений.*

Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$ и пусть $N\left(\frac{\varepsilon}{6}\right)$ такое натуральное число, что в силу равномерной сходимости последовательности $\{f_n(p, t)\}$ для каждых $n \geqslant N$ и $h \geqslant N$ и для всех $t \in I$

$$\rho\,[f_n(p, t), f_h(p, t)] < \frac{\varepsilon}{6}. \tag{2.17}$$

Предположим, что для этого N семейство $F_p^N = \bigcup_{n \geqslant N} \{f_n(p, t)\}$ почти периодическое с множеством $\frac{\varepsilon}{6}$ — смещений $\{s\}$, т. е. что $\tau(S_t^p, S_{t+s}^p) < \frac{\varepsilon}{6}$ для всех $t \in I$. Тогда можно найти для $f_n(p, t) \in S_t^p$ точку $f_h(p, t+s) \in S_{t+s}^p$ $(n, h \geqslant N)$ такую, что

$$\rho\,[f_n(p, t), f_h(p, t+s)] < \frac{\varepsilon}{6}. \tag{2.18}$$

Неравенства (2.17) и (2.18) дают

$$\rho\,[f_h(p, t), f_h(p, t+s)] < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{2.19}$$

В силу равномерной сходимости

$$\rho\,[f_h(p, t), f_0(p, t)] < \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{и} \quad \rho\,[f_h(p, t+s), f_0(p, t+s)] < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{2.20}$$

Неравенства (2.19) и (2.20) дают

$$\rho\,[f_0(p, t), f_0(p, t+s)] < \varepsilon,$$

что доказывает почти периодичность функции $f_0(p, t)$.

Теорема 2.12. *Пусть коммутативное семейство движений F_p является устойчивым по Лагранжу* [3] *и почти периодическим. Если семейства движений $F_{p'}$, $(p' \in T_p)$ обладают S — свойством относительно $\overline{T}_p$ равномерно по p', то и каждое семейство движений F_q, где $q \in \overline{T}_p$, почти периодическое с тем же самым множеством ε — смещений что и семейство F_p.*

Возьмем точку $q \in \overline{T}_p \setminus T_p$, так как если $q \in T_p$, утверждение теоремы сразу следует из теоремы 2.4. В силу L — устойчивости множество $\overline{T}_p$ компактно, и по теореме 2.4, все семейсва F_r $(r \in T_p)$ почти периодические с тем же самым множеством ε — смещений. Возьмем сходящуюся последовательность точек $\{q_n\} \subset T_p$ так, что $\lim_{n \to \infty} q_n = q$, и произвольное число $\varepsilon > 0$.

Если $\{s\}$ относительно плотное множество $\frac{\varepsilon}{3}$ — смещений, соответствующее условию почти периодичности семейств F_r, то для всех $t \in I$ и каждого q_n

$$\tau(S_t^{q_n}, S_{t+s}^{q_n}) < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{2.21}$$

В силу равномерности S — свойства найдется такое число $\delta\left(\frac{\varepsilon}{3}\right) > 0$ что $\tau(S_t^{p'}, S_t^{q'}) < \frac{\varepsilon}{3}$ для каждого $p' \in \overline{T}_p$, если $q' \in S(p', \delta) \cap \overline{T}_p$. Тогда найдем такое натуральное число N, что $\rho(q_n, q) < \delta$ для всех $n \geqslant N$. Тогда для всех $t \in I$

$$\tau(S_t^{q_n}, S_t^{q}) < \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{и} \quad \tau(S_{t+s}^{q_n}, S_{t+s}^{q}) < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{2.22}$$

Неравенства (2.21) и (2.22) дают $\tau(S_t^q, S_{t+s}^q) < \varepsilon$, что означает почти периодичность семейства F_q.

Теорема 2.13. *Пусть семейство F_p L^+ — устойчиво и выполнено свойство* II_0 *для любого семейства F_q $(q \in \overline{T}_p^+)$. Если полуворонка T_p^+ обладает S^+ — свойством относительно T_p^+, то все семейства F_r $(r \in \Omega_{pF})$ обладают S^+ — свойством относительно Ω_{pF}* [2].

Из компактности множества $\overline{T}_p^+$ вытекает равномерность свойства II_0 в $\overline{T}_p^+$ и S^+ — свойства в T_p^+.

Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$ и определим согласно S^+ — свойству такое число $\delta\left(\frac{\varepsilon}{3}\right) > 0$, что для всех $t > 0$ $\tau(S_t^x, S_t^y) < \frac{\varepsilon}{3}$, где $x, y \in T_p^+$, если $\rho(x, y) < \delta$.

Пусть $\bar{t} > 0$, а $q_1, q_2 \in \Omega_{pF}$ такие, что $\rho(q_1, q_2) < \frac{\delta}{3}$. Определим число $\eta\left(\frac{\varepsilon}{3}, \bar{t}\right) > 0$, соответствующее свойству II_0 и положим $\sigma = \min\left(\eta, \frac{\delta}{3}\right)$. Так как $q_1, q_2 \in \Omega_{pF}$, то найдутся точки $p_1 = f_1(p, t_1)$ и $p_2 = f_2(p, t_2)$ такие, что $\rho(p_1, q_1) < \sigma$ и $\rho(p_2, q_2) < \sigma$. Тогда будет

$$\rho(p_1, p_2) < \rho(p_1, q_1) + \rho(q_1, q_2) + \rho(q_2, p_2) < \delta. \tag{2.23}$$

Согласно вюбору числа δ на основании S^+ — свойства, из (2.23) получается

$$\tau(S_{\bar{t}}^{p_1}, S_{\bar{t}}^{p_2}) < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{2.24}$$

Тогда в силу свойства II_0

$$\tau(S_{\bar{t}}^{p_1}, S_{\bar{t}}^{q_1}) < \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{и} \quad \tau(S_{\bar{t}}^{p_2}, S_{\bar{t}}^{q_2}) < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{2.24}$$

Неравенства (2.24) и (2.25) дают $\tau(S_{\bar{t}}^{q_1}, S_{\bar{t}}^{q_2}) < \varepsilon$, что ввиду произвольности выбора числа $\bar{t}$, доказывает теорему.

ЛИТЕРАТУРА

[1] В. В. Немыцкий, В. В. Степанов, *Качественная теория дифференциальных уравнений*, Москва-Ленинград, 1947.

[2] Č. Đaja, *Über stabile Familien der Bewegungen dynamischer Systeme im Sinne von Poisson*, Mat. vesnik, 6 (21), sv. 4. 1969 (389—395).

[3] Č. Đaja, *Einige Eigenschaften der Familie dynamischer Systeme in metrischen Räumen*, Topology and its applications, Beograd, 1969 (140—145).

[4] Е. А. Барбашин, *К теории обобщенных динамических систем*, Уч. записки Моск. гос. унив. вып. 135, мат. II, 1948 (110—133).

[5] М. И. Минкевич, *Теория интегральных воронок в динамических системах без единственности*, Уч. записки Моск. гос. унив. вып. 135, II, 1948 (134—151).

[6] И. У. Бронштейн, *Рекуррентность, периодичность и транзитивность в динамических системах без единственности*, Доклады Акад. наук СССР, 1963, т. 151, № 1 (15—18).

[7] F. Hausdorff, *Grundzüge der Mengenlehre*, N. Y. 1949.