PUBLICATIONS DE L'INSTITUT MATHÉMATIQUE
Nouvelle série, tome 11 (25), 1971. pp. 5—15

К ТЕОРИИ АНАЛИТИЧЕСКИХ ПОЗИТИВНЫХ И ОДНОЛИСТНЫХ КОНФОРМНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ ПОСРЕДСТВОМ ОБОБЩЕННЫХ ЦЕЛЫХ И МЕРОМОРФНЫХ ФУНКЦИЙ С КОНЕЧНЫМ ЧИСЛОМ НУЛЕЙ И ПОЛЮСОВ

Павел Тодоров

(Поступило 19 Февраля 1968)

§ 1. В работах [1] и [2] мы доказали следующую теорему:

Теорема 1. — *Вещественная часть произведения главных значений степеней* $(1-z_k)^{p_k}$ *с произвольными вещественными показателями* $p_k \neq 0$, $k=1, \ldots, n$,

$$P(z_1, \ldots, z_n) = (1-z_1)^{p_1} \cdots (1-z_n)^{p_n}, \qquad n \geq 1, \tag{1}$$

всегда положительна, если:

1) *комплексные числа* $z_1, \ldots, z_n$ *лежат в замкнутом круге*

$$|z| \leq \sin\frac{\pi}{2p}, \quad p = \sum_{k=1}^{n} |p_k| \text{ при } p > 1. \tag{2}$$

В этом случае только, если

$$z_k = \sin\frac{\pi}{2p} \cdot e^{\mp i \cdot \operatorname{sgn} p_k \cdot \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2p}\right)}, \qquad k = 1, \ldots, n, \tag{3}$$

где $\operatorname{sgn} p_k$ *есть знак* p_k *и знаки* $\mp$ *берутся только один раз в последовательности для* k, *то произведение* $P(z_1, \ldots, z_n) = \pm i \prod_{k=1}^{n} \cos^{p_k} \frac{\pi}{2p}$, *т. е. есть чисто мнимое число.*

2) *числа* $z_1, \ldots, z_n$ *лежат в замкнутом единичном круге*

$$|z| \leq 1 \quad \text{при} \quad 0 < p \leq 1. \tag{4}$$

В этом случае только, если хотя одно $z_k = 1$, *то произведение* $P(z_1, \ldots, z_n) = 0$ *при* $p_k > 0$ *или не имеет смысла при* $p_k < 0$.

Числа $\sin\frac{\pi}{2p}$ *соответственно* 1 *не могут быть заменены другими бо́льшими.*

В приложении теоремы 1 к теории однолистных функций [как мы показали в [1], [2], [3]] встречаются случаи, когда променливые числа $z_1, \ldots, z_n$ являются пропорциональными. В этом общем случае соответствующий круг изменений может увеличиться. Если $\lambda_k = |\lambda_k| \cdot e^{i\varphi_k}$, $k=1, \ldots, n$ является одной системой, состоящейся из n произвольных комплексных чисел, из которых ни одно не равно нулю, то имеем $z_k = z \cdot \lambda_k$, $k=1, \ldots, n$. При условии, что коэффициент пропорциональности z рассматривается как произвольное комплексное число, то произведение главных значений степеней $(1-z_k)^{p_k}$, с произвольными вещественными показателями $p_k \neq 0$, $k=1, \ldots, n$ имеет вид

$$P(z) = (1-\lambda_1 z)^{p_1} \cdots (1-\lambda_n z)^{p_n}, \quad n \geq 1, \tag{5}$$

и представляет, что легко видеть, голоморфную функцию в лучисто разрезной плоскости z с разрезами, выходящими радиально относительно $z=0$ из точек $\frac{1}{\lambda_k}$, т. е. по лучам $z = \frac{t}{\lambda_k}$, $k \geq 1$, $k=1, \ldots, n$. Очевидно, когда два числа λ_k равны, соответсвующие степени сводятся к одной (это замечание всегда надо иметь в виду), поэтому считаем λ_k, $k=1, \ldots, n$ все различными и построенными по невозрастающим модулям, т. е. $|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \cdots \geq |\lambda_n| > 0$; здесь $\lambda = \max_{1 \leq k \leq n} |\lambda_k| = |\lambda_k|_{1 \leq k \leq \nu} = |\lambda_1|$, $1 \leq \nu \leq n$. В граничных точках $\frac{1}{\lambda_k}$ разрезов, функции класса (5) вообще неаналитичны; условимся $\frac{1}{\lambda_k}$ рассматривать как нуль или полюс функции $P(z)$ соответно при $p_k > 0$ и $p_k < 0$. Так определяемый класс (5) представляет совокупность обобщенных целых и мероморфных функций с конечным числом нулей и полюсов $\frac{1}{\lambda_k}$, $k=1, \ldots, n$, частный случай которого есть класс целых рациональных функций (многочлены) и класс дробных рациональных функций (мероморфные функции в обыкновенном смысле), которые получаются когда p_k, $k=1, \ldots, n$ целые числа; в этом случае разрезы исчезают. Число $p = \sum_{k=1}^{n} |p_k| > 0$ будем именовать степенью функций (5).

Как известно, совокупность функций $w=f(z)$, которые отображают аналитически открытый единичный круг $|z|<1$ в правой полуплоскости, т. е. $\operatorname{Re} w \geq 0$ образует класс C функций Каратеодори. При етом отображении круг $|z|<1$ называется кругом позитивности (позитивный круг). Более общее говоря, круг позитивности есть каждый круг, который с помощью данной функции (класса) отображается аналитически в правой полуплоскости. Если подходящая линейная субституция трансформирует такой круг в единичный, то нормированная функция (класс) будет C функцией (C классом) Каратеодори. Особенный интерес представляют замкнутые круги позитивности, т. е. C класс Каратеодори, если мы рассматриваем его в замкнутом единичном круге $|z| \geq 1$. В этом случае, так как $\operatorname{Re} w \geq 0$ по $|z|=1$, то интеграл Шварца для класса C непосредственно превращается в классическое представление интегралом Рисса-Герглотца для этого же класса, т. е. оба интеграла идентичны, как мы указали, например в [3] (теорема 2, II).

Для выяснения вопроса, когда один замкнутый круг позитивности является максимальным для данного класса, необходима следующая дефиниция. Будем называть точную C функцию Каратеодори такой C функцией $f(z)$, $|z|\leq 1$, которая по окружности $|z|=1$ имеет хотя одну точку ζ, так что $\operatorname{Re} f(\zeta)=0$ или $\operatorname{Re} f(\zeta)=\infty$ (ζ полюс функции $f(z)$). Согласно принципу о минимуме гармонических функций следует, что для точных C функций замкнутый круг $|z|\leq 1$ является максимальным кругом позитивности. В этом аспекте один замкнутый круг является максимальным кругом позитивности для одного класса, если нормированный C класс содержит хотя одну точную C функцию. Основной проблем в рассматриваемом параграфе в предложенном исследовании есть определение максимального замкнутого круга позитивности с центром $z=0$ класса (5).

Следующая теорема, которая относится к интересующему нас вопросу, т. е. к аналитическим позитивным отображениям посредством функций (5) с другой стороны имеет важное приложение аналогично теореме 1 — как мы покажем в § 3 и 4 — в специальной теории однолистных конформных отображений.

Образуем функцию

$$T(r)=\sum_{k=1}^{n}|p_k|\cdot\arcsin|\lambda_k|\,r, \tag{6}$$

которая играет основную роль в дальнейших исследованиях. Эта функция в интервале $\left[0, \frac{1}{\lambda}\right]$ является непрерывной и возрастает стриктно от $T(0)=0$ до

$$T\left(\frac{1}{\lambda}\right)=\frac{\pi}{2}\cdot\sum_{k=1}^{\nu}|p_k|+\sum_{k=\nu+1}^{n}|p_k|\cdot\arcsin\frac{|\lambda_k|}{\lambda},\quad \lambda=\underset{1\leqslant k\leqslant\nu}{|\lambda_k|},\quad 1\leq\nu\leq n. \tag{6'}$$

Существует следующая фундаментальная теорема.

Теорема 2. — *I. Если* $T\left(\frac{1}{\lambda}\right)>\frac{\pi}{2}$, *то максимальный замкнутый круг позитивности с центром* $z=0$ *класса* (5) *есть замкнутый круг* $|z|\leq r_0$, *где* $r=r_0<\frac{1}{\lambda}$ *является единственным положительным корнем трансцендентного уравнения*

$$T(r)=\frac{\pi}{2}. \tag{7}$$

Только для функций двух подклассов

$$P^{*,**}(z)=$$
$$=(1-\lambda_1 z)^{p_1}\cdot\prod_{k=2}^{n}\left\{1-z\cdot|\lambda_k|\cdot e^{i\left[\varphi_1\pm\operatorname{sgn}p_1\cdot\left(\frac{\pi}{2}-\arcsin\lambda r_0\right)\mp\operatorname{sgn}p_k\cdot\left(\frac{\pi}{2}-\arcsin|\lambda_k|r_0\right)\right]}\right\}^{p_k} \tag{8}$$

есть соответственно по одной точке

$$\zeta^{*,**}=r_0\cdot e^{-i\left[\varphi_1\pm\operatorname{sgn}p_1\cdot\left(\frac{\pi}{2}-\arcsin\lambda r_0\right)\right]} \tag{9}$$

для которой (8) *чисто мнимое число*

$$P^{*,**}(\zeta^{*,**})=\pm i\prod_{k=1}^{n}\cos^{p_k}\arcsin|\lambda_k|\,r_0\qquad\left(r_0<\frac{1}{\lambda}\right). \tag{10}$$

II. Если $T\left(\frac{1}{\lambda}\right)\leq\frac{\pi}{2}$, *то максимальным замкнутым кругом позитивности с центром* $z=0$ *класса* (5) *является замкнутый круг*

(11) $$|z|\leq\frac{1}{\lambda}.$$

Только в точках

(12) $$\zeta_k=\frac{e^{-i\varphi_k}}{\lambda},\quad k=1,\ldots,\nu,\quad 1\leq\nu\leq n,$$

имеем $\operatorname{Re}P(\zeta_k)=0$ *или* ∞ *соответственно при* $p_k>0$ [ζ_k *нуль класса* (5)] *и* $p_k<0$ [ζ_k *полюс класса* (5)].

Доказательство. — Из геометрических соображений (рис. 1) видно, что по окружности $|z|=r$, $r\leq 1$, $z\neq 1$ имеем неравенство

(13) $$|\arg(1-z)|\leq\arcsin r,$$

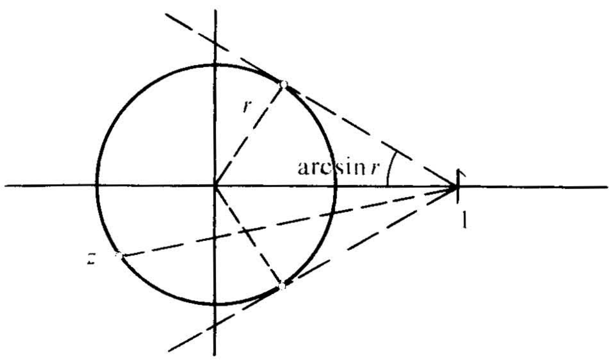

Рис. 1.

где равенство

(14) $$\arg(1-z)=\pm\arcsin r$$

возможно только, если имеем точно $r<1$ и

(15) $$z=r\cdot e^{\mp i\left(\frac{\pi}{2}-\arcsin r\right)}.$$

Из (5) получаем соотношение

(16) $$\arg P(z)=\sum_{k=1}^{n}p_k\cdot\arg(1-\lambda_k z),$$

которое в замкнутом круге $|z|\leq\frac{1}{\lambda}$ имеет смысл для всех z за исключением точек (12) по окружности $|z|=\frac{1}{\lambda}$, для которых $\arg P(\zeta_k)$ неопределенный.

I. Пусть $T\left(\frac{1}{\lambda}\right)>\frac{\pi}{2}$, Следовательно, согласно (6) существует всегда только одно $r_0<\frac{1}{\lambda}$, для которого $T(r_0)=\frac{\pi}{2}$, т. е. уравнение (7) имеет единственный положительный корень в интервале $0<r<\frac{1}{\lambda}$. При этом выборе r_0 подставим в (16) $z=r_0e^{i\varphi}$. Тогда по окружности $|z|=r_0$ с помощью (13) получаем

$$(17)\qquad |\arg P(z)|\leq\sum_{k=1}^{n}|p_k|\cdot|\arg(1-\lambda_k z)|\leq T(r_0)=\frac{\pi}{2}$$

и, следовательно, $\operatorname{Re}P(r_0e^{i\varphi})\geq 0$. Отсюда заключаем согласно принципу о минимуме гармонических функций, что гармоническая функция $\operatorname{Re}P(z)\neq\text{const}$ внутри круга $|z|<r_0$ принимает только положительные значения, т. е. имеем точно $\operatorname{Re}P(z)>0$.

Определим значения аргумента φ по окружности $|z|=r_0$ и соответствующие подклассы класса (5) для которых $\operatorname{Re}P(r_0e^{i\varphi})=0$. Для этого нужно в первом и втором символе цепи (17) иметь равенство, т. е. необходимо иметь хотя одну точку $\zeta=r_0e^{i\varphi}$, для которой

$$(18)\qquad \arg(1-\lambda_k\zeta)=\pm\operatorname{sgn}p_k\cdot\arcsin|\lambda_k|\,r_0,\quad k=1,\ldots,n,$$

где знаки $\pm$ берутся только один раз в последовательности для k. Согласно (14) и (15) это возможно, если аналогично (3) [сравни тоже и с [2], стр. 396, III, формула (10)] имеем

$$(19)\qquad \lambda_k\zeta=|\lambda_k|\,r_0\,e^{\mp i\cdot\operatorname{sgn}p_k\cdot\left(\frac{\pi}{2}-\arcsin|\lambda_k|\,r_0\right)},\quad k=1,\ldots,n.$$

Отсюда следует конгруэнция

$$(20)\qquad \varphi_k+\varphi\equiv\mp\operatorname{sgn}p_k\cdot\left(\frac{\pi}{2}-\arcsin|\lambda_k|\,r_0\right)(\mathrm{mod}\cdot 2\pi),\quad k=1,\ldots,n.$$

При $k=1$ находим два значения для φ:

$$(21)\qquad \varphi^{*,**}\equiv-\varphi_1\mp\operatorname{sgn}p_1\cdot\left(\frac{\pi}{2}-\arcsin\lambda r_0\right)(\mathrm{mod}\cdot 2\pi),$$

т. е. получаем точки (9). Подставляя (21) в (20) находим две системы значений для φ_k:

$$(22)\qquad \varphi_k^{*,**}\equiv\varphi_1\mp\operatorname{sgn}p_1\cdot\left(\frac{\pi}{2}-\arcsin\lambda r_0\right)\mp\operatorname{sgn}p_k\cdot\left(\frac{\pi}{2}-\arcsin|\lambda_k|\,r_0\right)(\mathrm{mod}\,2\pi),$$
$$k=2,\,3,\ldots,n,$$

т. е. получаем подклассы (8).

Значения (10) получаются из соотношения

$$(23)\qquad 1-\lambda_k\zeta=\cos\arcsin|\lambda_k|\,r_0\cdot e^{\pm i\cdot\operatorname{sgn}p_k\arcsin|\lambda_k|\,r},\quad k=1,\ldots,n,$$

которое следует из (18) и (19) (рис. 1).

Здесь нормированный C класс (5) есть $P(r_0 z)$, $|z|\leq 1$, который содержит оба подкласса $P^{*,**}(r_0 z)$ точные C функции Каратеодори. Следовательно найденный круг $|z|\leq r_0$ является максимальным замкнутым кругом позитивности с центром $z=0$ класса (5), когда $T\left(\frac{1}{\lambda}\right)>\frac{\pi}{2}$.

II. Пуст $T\left(\frac{1}{\lambda}\right)\leq\frac{\pi}{2}$. Если по окружности $|z|=\frac{1}{\lambda}$ исключим точки (12), то из (16) и (13) получаем

$$|\arg P(z)|\leq\sum_{k=1}^{n}|p_k|\cdot|\arg(1-\lambda_k z)|<T\left(\frac{1}{\lambda}\right)\leq\frac{\pi}{2}. \tag{24}$$

Следовательно $Re\,P(z)>0$ для всех точек по $|z|=\frac{1}{\lambda}$ для которых $\arg P(z)$ определенный. Так как любая маленькая окрестность точки ζ_k по окружности $|z|=\frac{1}{\lambda}$ отображается аналитически в правой полуплоскости, то согласно принципу о минимуме, в открытом круге $|z|<\frac{1}{\lambda}$ будем иметь точно $Re\,P(z)>0$.

Здесь класс C является $P\left(\frac{z}{\lambda}\right)$, $|z|\leq 1$ — составленным только из точных C функций. Следовательно круг (11) есть максимальный замкнутый круг позитивности с центром $z=0$ класса (5) в случае $T\left(\frac{1}{\lambda}\right)\leq\frac{\pi}{2}$.

Этим теорема 2 доказана.

§ 2. В этом параграфе рассмотрим отношение между теоремой 1 и теоремой 2. Именно покажем, что утверждения теоремы 2 вообще сильнее от утверждений теоремы 1, приложенных для класса (5). Для этой цельи установим связь между максимальным значением $T\left(\frac{1}{\lambda}\right)$ функции (6) и степенью p функций (5). Из (6′) получаем

$$T\left(\frac{1}{\lambda}\right)\leq p\cdot\frac{\pi}{2}, \tag{25}$$

где равенство возможно только, если $|\lambda_k|=\lambda$ для любого k, т. е. для функций

$$P_1(z)=\prod_{k=1}^{n}(1-\lambda z e^{i\varphi_k})^{p_k}. \tag{26}$$

Рассмотрим оба возможные случая в теореме 1.

1) Если степень $p>1$, то согласно теореме 1 вещественная часть функций (5) будет положительной (возможно неотрицательной) в круге $|z|\leq\min\limits_{1\leq k\leq n}\frac{1}{|\lambda_k|}\sin\frac{\pi}{2p}=\frac{1}{\lambda}\sin\frac{\pi}{2p}$.

Согласно (25) для значения $T\left(\frac{1}{\lambda}\right)$ могут быть две возможности:

а) $T\left(\frac{1}{\lambda}\right)>\frac{\pi}{2}$, т. е. теорема 2, I в силе. Тогда корень $r_0<\frac{1}{\lambda}$ уравнения (7) больше или возможно равен числу $\frac{1}{\lambda}\sin\frac{\pi}{2p}$. Действительно,

$$\frac{\pi}{2}=T(r_0)\leqslant\sum_{k=1}^{n}|p_k|\cdot\arcsin\lambda r_0=p\cdot\arcsin\lambda r_0, \tag{27}$$

где равенство $r_0=\frac{1}{\lambda}\sin\frac{\pi}{2p}$ возможно только для функций (26). Из (27) заключаем, что положительный корень r_0 уравнения (7) всегда находится в интервале

$$\frac{1}{\lambda}\sin\frac{\pi}{2p}\leqslant r_0<\frac{1}{\lambda}. \tag{7'}$$

Примечание 1. — Оба подкласса функций (26), вещественная часть которых превращается в нуль на окружности $|z|=r_0=\frac{1}{\lambda}\sin\frac{\pi}{2p}$, получим из общей формулы (8). Если $\operatorname{sgn}p_k=\operatorname{sgn}p_1$, $k=2, 3, \ldots, n$ и подставим $p_1'=p_1+\cdots+p_n$, т.е. $p=|p_1'|>1$, то соответствующие оба подкласса (8) функций (26) являются идентичными (едиственный случай) и имеют форму

$$\overline{P}_1(z)=(1-\lambda ze^{i\varphi_1})^{p_1'}. \tag{8'}$$

Следовательно вещественная часть функций (8') будет иметь два нуля на окружности $|z|=\frac{1}{\lambda}\sin\frac{\pi}{2p}$, которые получаем из (9), т. е.

$$\zeta^{*,**}=\frac{1}{\lambda}\sin\frac{\pi}{2p}\cdot e^{-i\left[\varphi_1\pm\operatorname{sgn}p_1'\cdot\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2p}\right)\right]}. \tag{9'}$$

Если $\operatorname{sgn}p_k=\operatorname{sgn}p_1$ для $k=2, 3, \ldots, s$ и $\operatorname{sgn}p_k=-\operatorname{sgn}p_1$ для $k=s+1, \ldots, n$, $s<n$ и подставим $p_1'=p_1+\cdots+p_s\,(\neq 0)$, $p_2'=p_{s+1}+\cdots+p_n\,(\neq 0)$, т.е. $\operatorname{sgn}p_2'=-\operatorname{sgn}p_1'$ и $p=|p_1'|+|p_2'|>1$, то из (8) находим искомые оба подкласса

$$P_1^{*,**}(z)=(1-\lambda ze^{i\varphi_1})^{p_1'}\left(1+\lambda ze^{i\left[\varphi_1\pm\operatorname{sgn}p_1'\cdot\frac{\pi}{p}\right]}\right)^{p_2'} \tag{8''}$$

функций (26), вещественные части которых имеют соответственно нули вида (9').

б) $T\left(\frac{1}{\lambda}\right)\leqslant\frac{\pi}{2}$, т. е. теорема 2, II в силе. Здесь круг $|z|\leqslant\frac{1}{\lambda}\sin\frac{\pi}{2p}$ согласно теореме 1, очевидно, является частью круга $|z|\leqslant\frac{1}{\lambda}$ согласно теореме 2, II.

2) Если степень $0<p\leqslant 1$, то из (25) имеем $T\left(\frac{1}{\lambda}\right)\leqslant\frac{\pi}{2}$, т. е. теорема 2, II тоже в силе. В этом случае круг $|z|\leqslant\frac{1}{\lambda}$, который получается согласно теореме 1 совпадает с кругом в теореме 2, II.

Примечание 2. — Укажем отношение функциии (6), которое она имеет к механике. В комплексной плоскости z точки $M_k : z_k = r + i \arcsin|\lambda_k| r$, $0 \leqslant r \leqslant \frac{1}{\lambda}$, $0 \leqslant \arcsin|\lambda_k| r \leqslant \arcsin\frac{|\lambda_k|}{\lambda} \leqslant \frac{\pi}{2}$, $k=1, \ldots, n$ расположены на одной прямой параллельно мнимой оси и остаются всегда в прямоугольнике $L: 0 \leqslant Re\, z \leqslant \frac{1}{\lambda}$, $0 \leqslant Im\, z \leqslant \frac{\pi}{2}$. Если рассматриваем точки M_k как систему материальных точек с соответствующим весом $|p_k|$, $k=1, \ldots, n$ то точка $G: z = r + \frac{i}{p} T(r)$, $0 \leqslant r \leqslant \frac{1}{\lambda}$, $0 \leqslant \frac{1}{p} T(r) \leqslant \frac{1}{p} T\left(\frac{1}{\lambda}\right) \leqslant \frac{\pi}{2}$ представляет центр тяжести (барицентр), где концентрирован весь вес p системы. Геометрическое место барицентра G является кривой $g: z = r + \frac{i}{p} T(r)$, $0 \leqslant r \leqslant \frac{1}{\lambda}$ расположеной в прямоугольнике L и, представляющей с другой стороны, график функции (6) разделенной степенью p. В этой механической постановке, когда $T\left(\frac{1}{\lambda}\right) > \frac{\pi}{2}$ (следовательно необходимо $p > 1$) положительный корень r_0 уравнения (7) можно определить из специального положения точек $M_k^0 : z_k^0 = r_0 + i \arcsin|\lambda_k| r_0$, $\frac{1}{\lambda} \sin\frac{\pi}{2p} \leqslant r_0 < \frac{1}{\lambda}$ с весом $|p_k|$, $k=1, \ldots, n$, которые имеют точку $G^0: z = r_0 + i \cdot \frac{\pi}{2p}$ для барицентра. Так как кривая g, на которой лежит G^0, известна, то непосредственно получаем r_0.

§ 3. Здесь поставим вопрос при каких условиях можно определить радиус ρ замкнутой круговой области с центром $z=0$, которая с помощью функций класса (5) отображается однолистно. Оказывается, что этот вопрос тесно связан с степенями

$$m_k = |p_1| + \cdots + |p_k - 1| + \cdots + |p_n| \tag{28}$$

функций

$$P_k(z) = (1-\lambda_1 z)^{p_1} \cdots (1-\lambda_k z)^{p_k - 1} \cdots (1-\lambda_n z)^{p_n}, \; k=1, \ldots, n \tag{5'}$$

класса (5). Их свойства раскрываются следующей интересной леммой, которая имеет и самостоятельный характер в теории чисел.

Лемма. — *Если $n \geqslant 2$, то степени $m_k > 1$, $k=1, \ldots, n$, кроме, возможно, одной, которая не больше* 1.

Только при $n=2$, в специальном случае $0 < p_{1,2} \leqslant 1$, $p_1 = p_2$ имеем $m_{1,2} = 1$.

Доказательство. — Рассмотрим сначала случай $n > 2$. При $j \neq k$ из (28) имеем $m_k > |p_k - 1| + |p_j|$ и $m_j > |p_j - 1| + |p_k|$, откуда

$$m_k + m_j > (|p_k - 1| + |p_k|) + (|p_j - 1| + |p_j|) \geqslant 1 + 1 = 2, \tag{29}$$

где равенство справа имеем только, если $0 < p_{j,k} \leqslant 1$. Следовательно, если, возможно, одна степень $m_j \leqslant 1$, то все остальные $m_k > 1$ $(k=1, \ldots, n, k \neq j)$.

Допустим, что $n=2$. Тогда

$$m_1 + m_2 = (|p_1 - 1| + |p_1|) + (|p_2 - 1| + |p_2|) \geqslant 2. \tag{29'}$$

Если $0<p_{1,2}\leqslant 1$ и $p_1=p_2$, то $m_{1,2}=1$. В остальных случаях хотя одно из чисел $m_{1,2}$ больше 1.

Лемма доказана.

Если допустим, что

(30) $$\arg\lambda_k \equiv \text{const.} \equiv \varphi\,(\text{mod}\cdot 2\pi), \quad \text{когда } \operatorname{sgn} p_k=+1,$$

и

(31) $$\arg\lambda_k \equiv \text{const.} \equiv \pi+\varphi\,(\text{mod}\cdot 2\pi), \quad \text{когда } \operatorname{sgn} p_k=-1,$$

установим следующую важную теорему.

Теорема 3. — I. *При $n\geqslant 2$ функции класса (5) реализируют однолистное отображение замкнутого круга $K: |z|\leqslant\rho$ с радиусом*

(32) $$\rho=\min_{1\leq k<n}\rho_k,$$

где ρ_k, $k=1,\ldots,n$, являются максимальными радиусами позитивности с центром $z=0$ функций (5').

II. *При $n=2$, в специальном случае $p_1=p_2=\dfrac{p}{2}$, $0<p\leqslant 2$ функции класса (5), т.е. функции*

(33) $$P(z)=\sqrt{(1-\lambda ze^{i\varphi})^p(1-\mu ze^{i\varphi})^p}, \quad \lambda>\mu>0,$$

где взято главное значение корня, осуществляют однолистное отображение замкнутого круга $|z|\leqslant\dfrac{1}{\lambda}$.

Доказательство. — Следуя принятой в [1], [2], [3] процедуре можно установить следующую формулу

(34) $$\frac{P(z_2)-P(z_1)}{z_2-z_1}=\sum_{k=1}^{n}p_k\lambda_k\int_0^1 P_k[z(t)]\cdot dt,$$

где $z(t)=(1-t)z_1+tz_2$ комплекснозначная функция, отображающая сегмент $0\leqslant t\leqslant 1$ в прямой отрезок z_1z_2, $z_1\neq z_2$, который не проходит через разрезы.

I. Случай $n=1$ тривиальный, а специальный случай $n=2$, $0<p_{1,2}\leqslant 1$, $p_1=p_2$, когда $m_{1,2}=1$ рассмотрим отдельно. Следовательно при $n\geqslant 2$ согласно свойствам степеней m_k $(m_k>1)$ и § 2, точка 1, а, б имеем $Re\,P_k[z(t)]\geqslant 0$, если $z(t)$ изменяется в замкнутом круге $C_k: |z(t)|\leqslant\rho_k$, $\dfrac{1}{\lambda}\sin\dfrac{\pi}{2m_k}\leqslant\rho_k\leqslant\dfrac{1}{\lambda}$. Для значения $k=j$, для которого, возможно, степень $m_j\leqslant 1$, согласно точке 2, § 2 имеем $Re\,P_j[z(t)]\geqslant 0$ в замкнутом круге $C_j: |z(t)|\leqslant\rho_j$, $\rho_j=\dfrac{1}{\lambda}$. Отсюда заключаем, что при $0<t<1$ в открытом круге $K: |z(t)|<\min\limits_{1\leq k\leq n}\rho_k=\rho$ вещественные части подинтегральных функций в правой стороне (34) будут положительны, откуда при $0\leqslant t\leqslant 1$ согласно известной теореме из анализа следует, что вещественные части и интегралов являются положительными. Если будем иметь ввиду (30) и (31) получаем, что все слагаемые в правой части (34) лежат с одной стороны прямой, которая получается после поворота мнимой оси на угол φ. Согласно теореме Гаусса о такой сумме, правая часть (34) не равна нулю, откуда следует, что $P(z_2) \neq P(z_1)$. Этим однолистность в замкнутом круге $K \equiv \min\limits_{1 \le k \le n} C_k$ доказана.

II. Рассмотрим специальный случай $n=2$, когда при $p_1 = p_2 = \frac{p}{2}$, $0 < p \leqslant 2$, степени $m_{1,2} = 1$. Согласно § 2, точка 2 имеем $Re\, P_k[z(t)] > 0$, $k = 1, 2$ в открытом круге $|z(t)| < \frac{1}{\lambda}$, $0 < t < 1$. Отсюда следует, что вещественные части и интегралов в (34) положительны, т.е. $P(z_2) \neq P(z_1)$, если z_1 и z_2 изменяются в замкнутом круге $|z| \leqslant \frac{1}{\lambda}$, $z \neq \frac{e^{-i\varphi}}{\lambda}$. Единственная особенная точка производной $P'(z)$ в этом круге есть $\zeta = \frac{e^{-i\varphi}}{\lambda}$, для которой $Re\, P'(\zeta) = \infty$. Так как точка ζ единственный простой нуль класса (33), его можно прибавить к однолистному замкнутому кругу $|z| \leqslant \frac{1}{\lambda}$, который вследствие разрезов максимален.

Этим теорема 3 доказана.

Примечание 3. — В [3] мы ввели однозначные аналитические функции, которые реализируют нормальное отображение замкнутого единичного круга $|z| \leqslant 1$. Это такие C функции Каратеодори, для которых круг $|z| \leqslant 1$ максимальный однолистный круг. Согласно теореме 3, II функции

$$(33') \qquad Q(z) = \sqrt{(1 - ze^{i\varphi})^p (1 - \varepsilon z e^{i\varphi})^p}, \quad 0 < \varepsilon < 1, \ 0 < p \leqslant 2$$

осуществляют максимальное отображение замкнутого круга $|z| \leqslant 1$. Следовательно будут нормальными эти $Q(z)$, которые являются C функциями Каратеодори.

Покажем, что только при: 1) $0 < \varepsilon < 1$, $0 < p \leqslant 1$ и 2) $0 < \varepsilon \leqslant -\cos\frac{\pi}{p}$, $1 < p < 2$ класс (33′) составлен из нормалых функций. Действительно, в обеих случаях, согласно теореме 2, II имеем $Re\, Q(z) \geqslant 0$, $|z| \leqslant 1$, потому что функция $T(r) = \frac{p}{2}(\arcsin r + \arcsin \varepsilon r)$, $0 \leqslant r \leqslant 1$ имеет максимум $T(1) = \frac{p}{2}\left(\frac{\pi}{2} + \arcsin \varepsilon\right) \leqslant \frac{\pi}{2}$.

Доказанная теорема 3 в этом параграфе непосредственно распространяется на общий класс аналитических функций, составленный путем линейного сочетания произвольного числа базисных обобщенных целых и мероморфных функций класса (5), а именно

$$(35) \qquad f(z) = \sum_{j=1}^{\nu} c_j \cdot (1 - \lambda_1^{(j)} z)^{p_1^{(j)}} \cdots (1 - \lambda_n^{(j)} z)^{p_n^{(j)}},$$

где произвольные комплексные коэффициенты c_j удовлетворяют условие $\arg c_j \cdot p_k^{(j)} \cdot \lambda_k^{(j)}$, определенный к mod. 2π, чтобы не зависеть от $j = 1, \ldots, \nu$ и $k = 1, \ldots, n$.

§ 4. В настоящем параграфе рассмотрим класс, составленный из голоморфных функций $\varphi(z)$, производные которых $\varphi'(z)$ являются обобщенными целыми или мероморфными функциями, т. е. образуют класс (5). Так конституированный класс является совокупностью интегралов типа Христофеля-Шварца

$$\varphi(z)=c_1+c_2\int_0^z(1-\lambda_1\zeta)^{p_1}\cdots(1-\lambda_n\zeta)^{p_n}\,d\zeta,\quad c_2\neq 0, \tag{36}$$

представляющие голоморфные функции в лучисто разрезной плоскости z с разрезами, выходящими из точек $\frac{1}{\lambda_k}$, $k=1,\ldots,n$ радиально по отношению начала. Если приложим процедуру при доказательстве теоремы 3, получим следующую весьма примечательную теорему.

Теорема 4. — I. *При* $T\left(\frac{1}{\lambda}\right)>\frac{\pi}{2}$, *каждый интеграл типа Христоффеля-Шварца* (36) *реализует однолистное конформное отображение замкнутого круга* $|z|\leqslant r_0$.

II. *При* $T\left(\frac{1}{\lambda}\right)\leqslant\frac{\pi}{2}$, *интегралы типа Христоффеля-Шварца* (36) *осуществляют однолистное комформное отображение замкнутого круга* $|z|\leqslant\frac{1}{\lambda}$, *из окружности которого остранены точки* (12).

ЛИТЕРАТУРА

[1] П. Тодоров, *О радиусе однолистности одного класса мероморфных функций*, Мат. весник, 2 (17) стр. 197—199, 1965, Београд.

[2] П. Тодоров, *К теории однолистных отображений посредством мероморфного класса Ф*, Мат. весник, 4 (19) стр. 393—398, 1967, Београд.

[3] P. Todorov, *Über die Möglichkeiten einer schlichten konformen Abbildung des Einheitskreises durch die hypergeometrische Funktion von Gauss*, Bulletin Cl. Sci., 5e Série, Tome LIII, 5, 1967 (Acad. royale Belgique).

П. Г. Тодоров, Бул. Ленин 20, Пловдив-2, Болгария