PUBLICATIONS DE L'INSTITUT MATHÉMATIQUE
Nouvelle série, tome 9 (23), 1969. pp. 65—70

DÉTERMINANTS ET POLYNÔMES DE LAGUERRE GÉNÉRALISÉS

Letterio Toscano

(Reçu le 1. Octobre 1969)

1. Pour l'effet de représenter au moyen des déterminants les polynômes que nous avons déjà introduit [1] qui généralisent ceux de Laguerre, calculons tout d'abord les deux déterminants suivants:

$$D_1(n;\ \alpha,\ \nu)=\begin{vmatrix} 1 & (\alpha+1,\ \nu) & (\alpha+1,\ 2\nu) & \cdots & (\alpha+1,\ \overline{n-1}\,\nu) \\ 1 & (\alpha+2,\ \nu) & (\alpha+2,\ 2\nu) & \cdots & (\alpha+2,\ \overline{n-1}\,\nu) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ 1 & (\alpha+n-1,\ \nu) & (\alpha+n-1,\ 2\nu) & \cdots & (\alpha+n-1,\ \overline{n-1}\,\nu) \\ 1 & (\alpha+n,\ \nu) & (\alpha+n,\ 2\nu) & \cdots & (\alpha+n,\ \overline{n-1}\,\nu) \end{vmatrix},$$

$$D_2(n;\ \alpha,\ \nu;\ m+1)=$$

$$=\begin{vmatrix} 1 & (\alpha+1,\ \nu) & \cdots & (\alpha+1,\ \overline{m-1}\,\nu) & (\alpha+1,\ \overline{m+1}\,\nu) & \cdots & (\alpha+1,\ n\nu) \\ 1 & (\alpha+2,\ \nu) & \cdots & (\alpha+2,\ \overline{m-1}\,\nu) & (\alpha+2,\ \overline{m+1}\,\nu) & \cdots & (\alpha+2,\ n\nu) \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ 1 & (\alpha+n-1,\ \nu) & \cdots & (\alpha+n-1,\ \overline{m-1}\,\nu) & (\alpha+n-1,\ \overline{m+1}\,\nu) & \cdots & (\alpha+n-1,\ n\nu) \\ 1 & (\alpha+n,\ \nu) & \cdots & (\alpha+n,\ \overline{m-1}\,\nu) & (\alpha+n,\ \overline{m+1}\,\nu) & \cdots & (\alpha+n,\ n\nu) \end{vmatrix},$$

où $m,\ n,\ \nu$ sont des nombres entiers et positifs, α un nombre réel quelconque, $(k,\ \nu)=k(k+1)\ldots(k+\nu-1)$. Mais avant tout, remarquons que le procédé et les résultats seront toujours valables lorsque ν n'est pas un nombre entier, et il faudra remplacer $(k,\ \nu)$ par le rapport $\dfrac{\Gamma(k+\nu)}{\Gamma(k)}$ où $\Gamma(x)$ est la fonction *gamma eulérienne de seconde espèce.*

2. En premier lieu observons que

$$(k+1,\ \nu)-(k,\ \nu)=(k+1)(k+2)\cdots(k+\nu)-$$
$$-k(k+1)\cdots(k+\nu-1)=\nu(k+1,\ \nu-1).$$

Ensuite appliquons sur les lignes de $D_1(n;\ \alpha,\ \nu)$ les opérations $(n)-(n-1)$, $(n-1)-(n-2),\ldots,\ (2)-(1)$; et développons selon les éléments de la première colonne. On a

$$D_1(n;\ \alpha,\ \nu) =$$

$$= \begin{vmatrix} \nu(\alpha+2,\ \nu-1) & 2\nu(\alpha+2,\ 2\nu-1) & \cdots & (n-1)\nu(\alpha+2,\ \overline{n-1}\,\nu-1) \\ \nu(\alpha+3,\ \nu-1) & 2\nu(\alpha+3,\ 2\nu-1) & \cdots & (n-1)\nu(\alpha+3,\ \overline{n-1}\,\nu-1) \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \nu(\alpha+n-1,\ \nu-1) & 2\nu(\alpha+n-1,\ 2\nu-1) & \cdots & (n-1)\nu(\alpha+n-1,\ \overline{n-1}\,\nu-1) \\ \nu(\alpha+n,\ \nu-1) & 2\nu(\alpha+n,\ 2\nu-1) & \cdots & (n-1)\nu(\alpha+n,\ \overline{n-1}\,\nu-1) \end{vmatrix}.$$

En D_1 $(n;\ \alpha,\ \nu)$ divisons les éléments de la 1^e colonne par ν, de la 2^e par $2\nu, \ldots$, de la $(n-1)^e$ par $(n-1)\nu$. Divisons encore les éléments de la 1^e ligne par $(\alpha+2,\ \nu-1)$, de la 2^e par $(\alpha+3,\ \nu-1), \ldots$, de la $(n-1)^e$ par $(\alpha+n,\ \nu-1)$. On obtient la relation de récurrence

$$D_1(n;\ \alpha,\ \nu) = (n-1)!\ \nu^{n-1}(\alpha+2,\ \nu-1)(\alpha+3,\ \nu-1)\cdots(\alpha+ \\ +n,\ \nu-1)\,D_1(n-1;\ \alpha+\nu,\ \nu).$$

D'après cela on obtient

$$\begin{aligned} D_1(n;\ \alpha,\ \nu) = {} & [(n-1)!\ \nu^{n-1}(\alpha+2,\ \nu-1)(\alpha+3,\ \nu-1)\cdots(\alpha+n,\ \nu-1)]\cdot \\ & \cdot[(n-2)!\ \nu^{n-2}(\alpha+\nu+2,\ \nu-1)(\alpha+\nu+3,\ \nu-1)\cdots(\alpha+\nu+n-1,\ \nu-1)]\cdot \\ & \cdot[(n-3)!\ \nu^{n-3}(\alpha+2\nu+2,\ \nu-1)(\alpha+2\nu+3,\ \nu-1)\cdots(\alpha+2\nu+ \\ & +n-2,\ \nu-1)]\cdots[2!\ \nu^2(\alpha+\overline{n-3}\,\nu+2,\ \nu-1)(\alpha+\overline{n-3}\,\nu+3,\ \nu-1)]\cdot \\ & \cdot[1!\ \nu(\alpha+\overline{n-2}\,\nu+2,\ \nu-1)] = \\ & = 1!\ 2!\cdots(n-1)!\ \nu^{n(n-1)/2}(\alpha+2,\ \nu-1)[(\alpha+3,\ \nu-1)(\alpha+\nu+2,\ \nu-1)]\cdot \\ & \cdot[(\alpha+4,\ \nu-1)(\alpha+\nu+3,\ \nu-1)(\alpha+2\nu+2,\ \nu-1)]\cdots \\ & \cdot[(\alpha+n,\ \nu-1)(\alpha+\nu+n-1,\ \nu-1)\cdots(\alpha+\overline{n-3}\,\nu+3,\ \nu-1)(\alpha+ \\ & +\overline{n-2}\,\nu+2,\ \nu-1)]. \end{aligned}$$

Étant donné que

$$(\alpha+3,\ \nu-1)(\alpha+\nu+2,\ \nu-1) = (\alpha+3,\ 2\nu-2)$$

$$(\alpha+4,\ \nu-1)(\alpha+\nu+3,\ \nu-1)(\alpha+2\nu+2,\ \nu-1) = (\alpha+4,\ 3\nu-3)$$

$$\cdots\cdots$$

$$(\alpha+n,\ \nu-1)(\alpha+\nu+n-1,\ \nu-1)\cdots(\alpha+\overline{n-2}\,\nu+2,\ \nu-1) = (\alpha+n,\ \overline{n-1}\,\overline{\nu-1}),$$

on parvient à

$$D_1(n;\ \alpha,\ \nu) = 1!\ 2!\cdots(n-1)!\ \nu^{n(n-1)/2}(\alpha+2,\ \nu-1)(\alpha+3,\ 2\nu- \\ -2)\cdots(\alpha+n,\ \overline{n-1}\,\overline{\nu-1}).$$

Si l'on pose $\nu=1$, puisque $(k,\ 0)=1$, on retrouve le résultat particulier connu

$$D_1(n;\ \alpha,\ 1) = 1!\ 2!\ldots(n-1)!.$$

Si l'on pose $\alpha=0$ on obtient

$$D_1(n;\ 0,\ \nu)=\nu!\ (2\nu)!\dots(\overline{n-1}\,\nu)!\ \nu^{n(n-1)/2}.$$

3. Pour calculer $D_2(n;\ \alpha,\ \nu;\ m+1)$ nous pouvons procéder comme ci-dessus et établir la relation de récurrence

$$D_2(n;\ \alpha,\ \nu;\ m+1)=\frac{n!}{m}\nu^{n-1}(\alpha+2,\ \nu-1)(\alpha+3,\ \nu-1)\cdots(\alpha+n,\ \nu-1)D_2(n-1;\ \alpha+\nu,\ \nu;\ m).$$

D'où il suit

$$D_2(n;\ \alpha,\ \nu;\ m+1)=\left[\frac{n!}{m}\nu^{n-1}(\alpha+2,\ \nu-1)(\alpha+3,\ \nu-1)\cdots(\alpha+n,\ \nu-1)\right]\cdot$$

$$\cdot\left[\frac{(n-1)!}{m-1}\nu^{n-2}(\alpha+\nu+2,\ \nu-1)(\alpha+\nu+3,\ \nu-1)\cdots(\alpha+\nu+n-1,\ \nu-1)\right]\cdot$$

$$\cdots\cdots$$

$$\cdot\left[\frac{(n-m+1)!}{1}\nu^{n-m}(\alpha+\overline{m-1}\,\nu+2,\ \nu-1)(\alpha+\overline{m-1}\,\nu+3,\ \nu-1)\cdots(\alpha+\overline{m-1}\,\nu+n-m+1,\ \nu-1)\right]\cdot D_2(n-m;\ \alpha+m\nu,\ \nu;\ 1)=$$

$$=\frac{1}{m!}(n-m+1)!\,(n-m+2)!\dots n!\,\nu^{m(2n-m-1)/2}\cdot$$

$$\cdot\{(\alpha+2,\ \nu-1)[(\alpha+3,\ \nu-1)(\alpha+\nu+2,\ \nu-1)][(\alpha+4,\ \nu-1)(\alpha+\nu+3,\ \nu-1)(\alpha+2\nu+2,\ \nu-1)]\cdot$$

$$\cdots\cdots[(\alpha+m+1,\ \nu-1)(\alpha+\nu+m,\ \nu-1)\cdots(\alpha+\overline{m-1}\,\nu+2,\ \nu-1)]\}\cdot$$

$$\cdot\{[(\alpha+m+2,\ \nu-1)(\alpha+\nu+m+1,\ \nu-1)\cdots(\alpha+\overline{m-1}\,\nu+3,\ \nu-1)]\cdot$$

$$\cdots\cdots[(\alpha+n,\ \nu-1)(\alpha+\nu+n-1,\ \nu-1)\cdots(\alpha+\overline{m-1}\,\nu+n-m+1,\ \nu-1)]\}\cdot D_2(n-m;\ \alpha+m\nu,\ \nu;\ 1)=$$

$$=\frac{1}{m!}(n-m+1)!\,(n-m+2)!\dots n!\,\nu^{m(2n-m-1)/2}\cdot$$

$$\cdot\{(\alpha+2,\ \nu-1)(\alpha+3,\ 2\nu-2)\cdots(\alpha+m+1,\ m\,\overline{\nu-1})\}\cdot$$

$$\cdot\{(\alpha+m+2,\ m\,\overline{\nu-1})\cdots(\alpha+n,\ m\,\overline{\nu-1})\}\cdot D_2(n-m;\ \alpha+m\nu,\ \nu;\ 1).$$

En $D_2(n-m;\ \alpha+m\nu,\ \nu;\ 1)$ divisons les éléments de la 1^e ligne par $(\alpha+m\nu+1,\ \nu)$, de la 2^e par $(\alpha+m\nu+2,\ \nu),\dots,$ de la $(n-m)^e$ par $(\alpha+m\nu+n-m,\ \nu)$.

On obtient $D_2(n-m;\ \alpha+m\nu,\ \nu;\ 1)=$

$$=(\alpha+m\nu+1,\ \nu)(\alpha+m\nu+2,\ \nu)\cdots(\alpha+m\nu+n-m,\ \nu)\,D_1(n-m;\ \alpha+\overline{m+1}\,\nu,\ \nu).$$

D'autre part, moyennant la formule du n. 2, il suit

$$D_1(n-m;\ \alpha+\overline{m+1}\,\nu,\ \nu)=1!\,2!\ldots(n-m-1)!\,\nu^{(n-m)(n-m-1)/2}\,.$$
$$\cdot(\alpha+\overline{m+1}\,\nu+2,\ \nu-1)(\alpha+\overline{m+1}\,\nu+3,\ 2\nu-2)\cdots(\alpha+$$
$$+\overline{m+1}\,\nu+n-m,\ \overline{n-m-1}\,\overline{\nu-1}).$$

Il suit également

$$D_2(n;\ \alpha,\ \nu;\ m+1)=\frac{1}{m!}\,(n-m+1)!\,(n-m+2)!\ldots n!\,\nu^{m(2n-m-1)/2}\,.$$
$$\cdot\{(\alpha+2,\ \nu-1)(\alpha+3,\ 2\nu-2)\cdots(\alpha+m+1,\ m\overline{\nu-1})\}\cdot$$
$$\cdot\{(\alpha+m+2,\ m\overline{\nu-1})(\alpha+m+3,\ m\overline{\nu-1})\cdots(\alpha+n,\ m\overline{\nu-1})\}\cdot$$
$$\cdot\{(\alpha+m\nu+1,\ \nu)(\alpha+m\nu+2,\ \nu)\cdots(\alpha+m\nu+n-m,\ \nu)\}.$$
$$\cdot\,1!\,2!\ldots(n-m-1)!\,\nu^{(n-m)(n-m-1)/2}\,.$$
$$\cdot\{(\alpha+\overline{m+1}\,\nu+2,\ \nu-1)(\alpha+\overline{m+1}\,\nu+3,\ 2\nu-2)\cdots(\alpha+\overline{m+1}\,\nu+$$
$$+n-m,\ \overline{n-m-1}\,\overline{\nu-1})\}.$$

Cependant

$$\left[\frac{1}{m!}\,(n-m+1)!\,(n-m+2)!\ldots n!\right][1!\ 2!\ldots(n-m-1)!]=\frac{1!\ 2!\ldots n!}{m!\,(n-m)!},$$
$$\nu^{m(2n-m-1)/2}\,.\,\nu^{(n-m)(n-m-1)/2}=\nu^{n(n-1)/2};$$

et par association convenable de facteurs on a

$$(\alpha+m+2,\ m\overline{\nu-1})(\alpha+m\nu+2,\ \nu)(\alpha+\overline{m+1}\,\nu+2,\ \nu-1)=$$
$$=(\alpha+m+2,\ m\overline{\nu-1})(\alpha+m\nu+2,\ \nu-1)\cdot(\alpha+\overline{m+1}\,\nu+1)(\alpha+\overline{m+1}\,\nu+2,\ \nu-1)=$$
$$=(\alpha+m+2,\ \overline{m+1}\,\overline{\nu-1})(\alpha+\overline{m+1}\,\nu+1,\ \nu),$$
$$(\alpha+m+3,\ m\overline{\nu-1})(\alpha+m\nu+3,\ \nu)(\alpha+\overline{m+1}\,\nu+3,\ 2\nu-2)=$$
$$=(\alpha+m+3,\ \overline{m+1}\,\overline{\nu-1}+1)(\alpha+\overline{m+1}\,\nu+3,\ \nu-2)(\alpha+\overline{m+2}\,\nu+1,\ \nu)=$$
$$=(\alpha+m+3,\ \overline{m+2}\,\overline{\nu-1})(\alpha+\overline{m+2}\,\nu+1,\ \nu),$$

. . . . . .

$$(\alpha+n,\ m\overline{\nu-1})(\alpha+m\nu+n-m,\ \nu)(\alpha+\overline{m+1}\,\nu+n-m,\ \overline{n-m-1}\,\overline{\nu-1})=$$
$$=(\alpha+n,\ \overline{m+1}\,\overline{\nu-1}+1)(\alpha+\overline{m+1}\,\nu+n-m,\ \overline{n-m-2}\,\overline{\nu-1}-1)(\alpha+$$
$$+\overline{n-1}\,\nu+1,\ \nu)=(\alpha+n,\ \overline{n-1}\,\overline{\nu-1})(\alpha+\overline{n-1}\,\nu+1,\ \nu);$$
$$(\alpha+m\nu+1,\ \nu)(\alpha+\overline{m+1}\,\nu+1,\ \nu)(\alpha+\overline{m+2}\,\nu+1,\ \nu)\cdots(\alpha+\overline{n-1}\,\nu+1,\ \nu)=$$
$$=(\alpha+m\nu+1,\ \overline{n-m}\,\nu).$$

Et tout ce qui précède conduit à la formule

$$D_2(n;\ \alpha,\ \nu;\ m+1) = 1!\ 2! \dots n!\ \frac{1}{m!\ (n-m)!}\ \nu^{n(n-1)/2}\cdot$$

$$\cdot(\alpha+2,\ \nu-1)(\alpha+3,\ 2\nu-2)\cdots(\alpha+n,\ \overline{n-1}\,\overline{\nu-1})\cdot(\alpha+m\nu+1,\ \overline{n-m}\,\nu).$$

4. Enfin, calculons le déterminant

$$A(n+1;\ x^\nu;\ \alpha,\ \nu) =$$

$$\begin{vmatrix} 1 & x^\nu & x^{2\nu} & \dots & x^{n\nu} \\ 1 & (\alpha+1,\ \nu) & (\alpha+1,\ 2\nu) & \dots & (\alpha+1,\ n\nu) \\ 1 & (\alpha+2,\ \nu) & (\alpha+2,\ 2\nu) & \dots & (\alpha+2,\ n\nu) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ 1 & (\alpha+n-1,\ \nu) & (\alpha+n-1,\ 2\nu) & \dots & (\alpha+n-1,\ n\nu) \\ 1 & (\alpha+n,\ \nu) & (\alpha+n,\ 2\nu) & \dots & (\alpha+n,\ n\nu) \end{vmatrix}.$$

Son développement, suivant les éléments de la 1^e ligne, est représenté par le polynôme de degré n en x^ν

$$\sum_0^n{}_m (-1)^m x^{m\nu} D_2(n;\ \alpha,\ \nu;\ m+1) =$$

$$= 1!\ 2! \dots n!\ \nu^{n(n-1)/2}(\alpha+2,\ \nu-1)(\alpha+3,\ 2\nu-2)\cdots(\alpha+n,\ \overline{n-1}\,\overline{\nu-1})\cdot$$

$$\cdot\sum_0^n{}_m \frac{(-1)^m}{m!\ (n-m)!}(\alpha+m\nu+1,\ \overline{n-m}\,\nu)\,x^{m\nu}.$$

D'autre part, nous avons généralisé les polynômes de Laguerre ordinaires

$$L_n^{(\alpha)}(x) = \frac{1}{n!}\,x^{-\alpha}\left(\frac{d}{dx}-1\right)^n x^{\alpha+n} =$$

$$= \frac{(-1)^n\,\Gamma(\alpha+n+1)}{n!}\,x^{-\alpha}\,\Delta_\alpha^n\,\frac{x^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}$$

par les autres [1]

$$L_n^{(\alpha,\ \nu)}(x) = \frac{1}{n!}\,x^{-\alpha}\left(\frac{d}{dx^\nu}-1\right)^n x^{\alpha+n\nu}$$

$$= \frac{(-1)^n\,\Gamma(\alpha+n\nu+1)}{n!}\,x^{-\alpha}\,\underset{\nu}{\Delta_\alpha^n}\,\frac{x^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}$$

où $\underset{\nu}{\Delta_\alpha} f(\alpha) = f(\alpha+\nu) - f(\alpha)$.

On a $L_n^{(\alpha,\ \nu)}(x) = \sum_0^n{}_m \frac{(-1)^m}{m!\,(n-m)!}\ (\alpha+m\nu+1,\ \overline{n-m}\,\nu)\ x^{m\nu}$.

Et se rapportant au déterminant $A(n+1;\ x^{\nu};\ \alpha,\ \nu)$ on obtient la remarquable représentation des polynômes $L_n^{(\alpha,\ \nu)}(x)$ par déterminants

$$L_n^{(\alpha,\ \nu)}(x)=\frac{A(n+1;\ x^{\nu};\ \alpha,\ \nu)}{1!\ 2!\ldots n!\ \nu^{n(n-1)/2}(\alpha+2,\ \nu-1)(\alpha+3,\ 2\nu-2)\cdots(\alpha+n,\ \overline{n-1}\ \overline{\nu-1})}.$$

Si l'on pose $\nu=1$ on a la représentation des polynômes de Laguerre ordinaires

$$L_n^{(\alpha)}(x)=\frac{A(n+1;\ x;\ \alpha,\ 1)}{1!\ 2!\ldots n!}=$$

$$=\frac{1}{1!\ 2!\ldots n!}\cdot\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & \cdots & x^n \\ 1 & (\alpha+1,\ 1) & (\alpha+1,\ 2) & \cdots & (\alpha+1,\ n) \\ 1 & (\alpha+2,\ 1) & (\alpha+2,\ 2) & \cdots & (\alpha+2,\ n) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ 1 & (\alpha+n-1,\ 1) & (\alpha+n-1,\ 2) & \cdots & (\alpha+n-1,\ n) \\ 1 & (\alpha+n,\ 1) & (\alpha+n,\ 2) & \cdots & (\alpha+n,\ n) \end{vmatrix},$$

que nous avons déjà appliquée à la recherche des propriétés des polynômes $L_n^{(\alpha)}(x)$ à partir des propriétés des déterminants [2]. De la même manière on pourrait procéder dans le cas des polynômes $L_n^{(\alpha,\ \nu)}(x)$.

REFERENCES

1 L. Toscano. *Una generalizzazione dei polinomi di Laguerre,* Giornale di Mat. di Battaglini, LXXXIV (1956), 123—138, Napoli.

2 L. Toscano, *Determinanti e polinomi di Laguerre,* Annali del Liceo Classico G. La Farina, Messina, (1965), 139—154.