PUBLICATIONS DE L'INSTITUT MATHÉMATIQUE
Nouvelle série, tome 10 (24), 1970, pp. 53–64.

UNE CONNEXION NON-SYMÉTRIQUE ASSOCIÉE A L'ESPACE RIEMANNIEN

M. Prvanović

(Communiqué le 27 Juin 1969)

Dans un article précédent [1] nous avons défini le système des courbes cycliques d'espace riemannien V_n par rapport au champ des vecteurs ξ^i. Les équations différentielles d'un tel système de courbes ont la forme:

$$\frac{d^2x^i}{ds^2}+\Gamma^i_{jk}\frac{dx^j}{ds}\frac{dx^k}{ds}=\frac{1}{\xi^2}\left(\xi^i-\xi_j\frac{dx^j}{ds}\frac{dx^i}{ds}\right),$$

où $x^i\,(i,\,j,\,k=1,\,2,\dots,n)$ sont les coordonnées d'espace V_n, s est l'arc de la courbe considérée, Γ^i_{jk} sont les symboles de Christoffel relatifs au tenseur métrique g_{ij} d'espace V_n, et $\xi^2=g_{ij}\,\xi^i\,\xi^j$.

On peut considérer, en chaque point d'une courbe C qui n'appartient pas au système des courbes cycliques, le vecteur

$$v^i=\frac{d^2x^i}{ds^2}+\Gamma^i_{jk}\frac{dx^j}{ds}\frac{dx^k}{ds}-\frac{1}{\xi^2}\left(\xi^i-\xi_j\frac{dx^j}{ds}\frac{dx^i}{ds}\right);$$

c'est le vecteur de la courbure cyclique de C par rapport au champ des vecteurs ξ^i [1]. On peut exprimer ce vecteur sous la forme:

$$v^i=\frac{d^2x^i}{ds^2}+\left[\Gamma^i_{jk}+\frac{1}{\xi^2}\left(\delta^r_m\,\delta^i_k-\delta^r_k\,\delta^i_m\right)\xi^m\,g_{rj}\right]\frac{dx^j}{ds}\frac{dx^k}{ds},$$

ou, en posant

$$u^i_{jk}=\Gamma^i_{jk}+\frac{1}{\xi^2}\left(\delta^r_m\,\delta^i_k-\delta^r_k\,\delta^i_m\right)\xi^m\,g_{rj}, \tag{1.1}$$

sous la forme:

$$v^i=\frac{d^2x^i}{ds^2}+u^i_{jk}\frac{dx^j}{ds}\frac{dx^k}{ds}.$$

On peut considérer les quantités u^i_{jk} comme les composantes d'une connexion nouvelle. A savoir, il est facile de voir que ces quantités se transforment, par une transformation de coordonnées, d'après la loi qui est caractéristique pour la connexion. Donc, le vecteur de la courbure cyclique est la dérivée intrinsèque du vecteure unitaire de la tangente de la courbe C par rapport à la connexion (1.1). En utilisant cette dérivée on peut définir le vecteur de la deuxième, troisième, etc. courbure cyclique de la courbe C [2]. Ces vecteurs sont orthogonaux entre eux et liés par les équations analogues aux formules de Frénet.

La connexion (1.1) étant liés à la métrique de l'espace riemannien V_n et aussi étant dépendante du champ des vecteurs ξ^i, nous l'appellerons *la connexion associée à l'espace riemannien V_n par rapport au champ des vecteurs ξ^i*. Le choix du champ des vecteurs ξ^i n'étant pas restreint, on peut associer à l'espace V_n une infinité de connexions pareilles. On peut utiliser la dérivée intrinsèque le long de la courbe C par rapport à chacune de ces connexions. On peut étudier, aussi, la dérivée covariante, le tenseur de la courbure, etc. Naturellement, ce procédé n'est pas nouveau et inattendu. Ce qui est intéressant c'est qu'il existe un ensemble de tenseurs, de leurs dérivées covariantes, relations etc., invariables par rapport à la transformation conforme d'espace V_n. Cette invariablité a la signification suivante: le tenseur (la relation) dépendant de la connexion associée se transforme, par la transformation conforme du tenseur métrique g_{ij}, en tenseur (en relation) dépendant de la même manière de la connexion associée, mais cette fois la connexion associée est la connexion associée par rapport à l'autre champ des vecteurs. Le système des courbes cycliques, le vecteur de la première, de la deuxième, ..., courbure cyclique de la courbe C, les formules de Frénet correspondantes à ces vecteurs cycliques ont cette invariabilité [2].

Dans le présent travail il sera démontré que le tenseur de la courbure de la connexion associée. ainsi que certaines relations contenant le tenseur de la courbure ont l'invariabilité expliquée plus haut.

2. Soit $\overline{V}_n$ l'espace riemannien dont la métrique $\overline{g}_{ij}\, d\overline{x}^i\, d\overline{x}^j$ est obtenue à partir de la métrique $g_{ij}\, dx^i dx^j$ de l'espace V_n par la transformation conforme

$$\overline{g}_{ij} = e^{2\sigma} g_{ij}, \quad \overline{g}^{ij} = e^{-2\sigma} g^{ij}, \tag{2.1}$$

σ étant une fonction de la position. Nous supposons qu'aux points correspondants des espaces $\overline{V}_n$ et V_n, on a $\overline{x}^i = x^i$. Supposons aussi que le vecteur ξ^i est invariables par rapport à la transformation (2.1), c'est-à-dire

$$\overline{\xi}^i = \xi^i.$$

Alors,

$$\overline{\xi}_i = e^{2\sigma} \xi_i, \quad \overline{\xi}^2 = e^{2\sigma} \xi^2. \tag{2.2}$$

Désignons par $\overline{u}^i_{jk}$ la connexion associée à l'espace $\overline{V}_n$. Les symboles de Christoffel $\overline{\Gamma}^i_{jk}$ et Γ^i_{jk} des espaces $\overline{V}_n$ et V_n étant liés par la relation [3]:

$$\overline{\Gamma}^i_{jk} = \Gamma^i_{jk} + \delta^i_j \sigma_k + \delta^i_k \sigma_j - \sigma^i g_{jk},$$

où

$$\sigma_j = \frac{\partial \sigma}{\partial x^j}, \quad \sigma^i = g^{ij} \sigma_j,$$

nous avons

$$\overline{u}^i_{jk} = \overline{\Gamma}^i_{jk} + \frac{1}{\overline{\xi}^2} (\overline{\delta}^r_m \overline{\delta}^i_k - \overline{\delta}^r_k \overline{\delta}^i_m) \overline{\xi}^m \overline{g}_{rj} =$$

$$= \Gamma^i_{jk} + \delta^i_j \sigma_k + (\delta^r_m \delta^i_k - \delta^r_k \delta^i_m) \left(\sigma^m + \frac{\xi^m}{\xi^2} \right) g_{rj}.$$

Introduisant la notation

$$U^i_{jk}=\Gamma^i_{jk}+(\delta^r_m\,\delta^i_k-\delta^r_k\,\delta^i_m)\left(\sigma^m+\frac{\xi^m}{\xi^2}\right)g_{rj}, \tag{2.3}$$

nous pouvons écrire

$$\bar{u}^i_{jk}=U^i_{jk}+\delta^i_j\,\sigma_k. \tag{2.4}$$

La relation (2.3) montre que les quantités U^i_{jk} sont les composantes d'une connexion associée, mais c'est la connexion associée à l'espace V_n par rapport au champ des vecteurs ayant, dans chaque point, la direction du vecteur $\Xi^i=$ $=\sigma^i+\dfrac{\xi^i}{\xi^2}$.

Désignons par $\underset{1}{\gamma}{}^i_{pjk}$ le tenseur de la courbure de la connexion associée u^i_{jk}, et par $\underset{1}{\Gamma}{}^i_{pjk}$ — le tenseur de la courbure de la connexion associée U^i_{jk}, c'est-à-dire

$$\left\{\begin{aligned}\underset{1}{\gamma}{}^i_{pjk}&=\frac{\partial}{\partial x^j}u^i_{pk}-\frac{\partial}{\partial x^k}u^i_{pj}+u^i_{tj}\,u^t_{pk}-u^i_{tk}\,u^t_{pj},\\ \underset{1}{\Gamma}{}^i_{pjk}&=\frac{\partial}{\partial x^j}U^i_{pk}-\frac{\partial}{\partial x^k}U^i_{pj}+U^i_{tj}\,U^t_{pk}-U^i_{tk}\,U^t_{pj}.\end{aligned}\right. \tag{2.5}$$

Le tenseur $\underset{1}{\gamma}{}^i_{pjk}$ *se transforme, par rapport à la transformation conforme* (2.1), *en tenseur* $\underset{1}{\Gamma}{}^i_{pjk}$.

En effet,

$$\underset{1}{\bar{\gamma}}{}^i_{pjk}=\frac{\partial}{\partial x^j}\bar{u}^i_{pk}-\frac{\partial}{\partial x^k}\bar{u}^i_{pj}+\bar{u}^i_{tj}\,\bar{u}^t_{pk}-\bar{u}^i_{tk}\,\bar{u}^t_{pj}=$$

$$=\frac{\partial}{\partial x^j}(U^i_{pk}+\delta^i_p\,\sigma_k)-\frac{\partial}{\partial x^k}(U^i_{pj}+\delta^i_p\,\sigma_j)$$

$$+(U^i_{tj}+\delta^i_t\sigma_j)(U^t_{pk}+\delta^t_p\,\sigma_k)-(U^i_{tk}+\delta^i_t\,\sigma_k)(U^t_{pj}+\delta^t_p\,\sigma_j)=$$

$$=\frac{\partial}{\partial x^j}U^i_{pk}-\frac{\partial}{\partial x^k}U^i_{pj}+U^i_{tj}\,U^t_{pk}-U^i_{tk}\,U^t_{pj},$$

c'est-à-dire

$$\underset{1}{\bar{\gamma}}{}^i{}_{pjk}=\underset{1}{\Gamma}{}^i{}_{pjk}, \tag{2.6}$$

ce qu'il fallait démontrer.

La connexion associée, comme on le voit de (1.1), n'est pas symétrique. Désignons le tenseur de la torsion de la connexion (1.1) par s^i_{jk}, et le tenseur de la torsion de la connexion U^i_{jk} par S^i_{jk}, c'est-à-dire

$$s^i_{jk}=u^i_{jk}-u^i_{kj},\qquad S^i_{jk}=U^i_{jk}-U^i_{kj}. \tag{2.7}$$

On voit immédiatement de (2.4) qu'on a

$$\bar{s}^i_{jk} = S^i_{jk} + \delta^i_j \sigma_k - \delta^i_k \sigma_j, \tag{2.8}$$

c'est-à-dire, le tenseur de la torsion s^i_{jk} *ne se transforme pas*, par la transformation conforme (2.1), en tenseur de la torsion S^i_{jk}.

3. Désignons par $\underset{1}{\nabla}$ la dérivée covariante par rapport à la connexion (1.1) et définissons-là de la manière suivante:

$$\underset{1}{\nabla}_k a^i = \xi (\partial_k a^i + u^i_{tk} a^t),$$

$$\underset{1}{\nabla}_k a_i = \xi (\partial_k a_i - u^t_{ik} a_t),$$

et en général

$$\begin{aligned} \underset{1}{\nabla}_k a^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q} = \xi \bigl(\partial_k a^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q} &+ u^{i_1}_{tk} a^{t i_2 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q} + \\ &+ u^{i_2}_{tk} a^{i_1 t i_2 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q} + \dots + u^{i_p}_{tk} a^{i_1 \dots i_{p-1} t}_{j_1 \dots j_q} \\ &- u^t_{j_1 k} a^{i_1 \dots i_p}_{t j_2 \dots j_q} - \dots - u^t_{j_q k} a^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_{q-1} t}\bigr) \end{aligned} \tag{3.1}$$

où ∂_k désigne la dérivée partielle $\frac{\partial}{\partial x^k}$, et a^i, a_i et $a^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q}$ sont les composantes du vecteur et du tenseur.

Le tenseur métrique g_{ij} de l'espace V_n est constant par rapport à la dérivée introduite.

$$\begin{aligned} \underset{1}{\nabla}_k g_{ij} &= \xi (\partial_k g_{ij} - u^t_{ik} g_{tj} - u^t_{jk} g_{it}) \\ &= \xi \Bigl[\partial_k g_{ij} - \Gamma^t_{ik} g_{tj} - \Gamma^t_{jk} g_{it} - \\ &- \frac{1}{\xi^2} (\xi_i \delta^t_k - \xi^t g_{ik}) g_{tj} - \frac{1}{\xi^2} (\xi_j \delta^t_k - \xi^t g_{jk}) g_{it}\Bigr]. \end{aligned}$$

Le tenseur g_{ij} étant le tenseur métrique par rapport à la connexion Γ^i_{jk}, nous avons

$$\partial_k g_{ij} - \Gamma^t_{ik} g_{tj} - \Gamma^t_{jk} g_{it} = 0.$$

D'autre part

$$(\xi_i \delta^t_k - \xi^t g_{ik}) g_{tj} + (\xi_j \delta^t_k - \xi^t g_{jk}) g_{it} - 0.$$

Donc,

$$\underset{1}{\nabla}_k g_{ij} = 0.$$

Par une voie analogue, on déduit

$$\underset{1}{\Lambda}_k g^{ij}=0 \quad \text{et} \quad \underset{1}{\Lambda}_k \delta^i_j=0.$$

Désignons par $\underset{1}{\Lambda}$ la dérivée covariante par rapport à la connexion (2.3), par exemple

$$\underset{1}{\Lambda}_k a^i=\xi\,(\partial_k a^i+U^i_{tk}\,a^t).$$

Nous démontrerons le théorème suivant:

Si le tenseur $a^{i_1\dots i_p}_{j_1\dots j_q}$ *se transforme, par rapport à la transformation conforme* (2.1), *de la sorte*

$$\bar a^{i_1\dots i_p}_{j_1\dots j_q}=e^{(q-p)\sigma}\,a^{i_1\dots i_p}_{j_1\dots j_q}, \tag{3.2}$$

la dérivée covariante de se tenseur, par rapport à la connexion (1.1), *se transforme dans la dérivée covariante de ce tenseur mais par rapport à la connexion* (2.3), *c'est-à-dire*:

$$\underset{1}{\bar\nabla}_k\,\bar a^{i_1\dots i_p}_{j_1\dots j_q}=e^{(q-p+1)\sigma}\,\underset{1}{\Lambda}_k\,a^{i_1\dots i_p}_{j_1\dots j_q}. \tag{3.3}$$

En effet, en vertu de (2.2) et (2.3) nous avons:

$$
\begin{aligned}
\underset{1}{\bar\nabla}_k\,\bar a^{i_1\dots i_p}_{j_1\dots j_q}&=\bar\xi\,[\partial_k\bar a^{i_1\dots i_p}_{j_1\dots j_q}+\\
&\quad+\bar u^{i_1}_{tk}\bar a^{ti_2\dots i_p}_{j_1\dots j_q}+\dots+\bar u^{i_p}_{tk}\bar a^{i_1\dots i_{p-1}t}_{j_1\dots j_q}\\
&\quad+\bar u^{t}_{j_1k}\bar a^{i_1\dots i_p}_{tj_1\dots j_q}-\dots-\bar u^{t}_{j_qk}\bar a^{i_1\dots i_p}_{j_1\dots j_{q-1}t}]\\
&=e^{\sigma}\xi\,[(q-p)\,e^{(q-p)\sigma}\sigma_k\,a^{i_1\dots i_p}_{j_1\dots j_q}+e^{(q-p)\sigma}\partial_k a^{i_1\dots i_p}_{j_1\dots j_q}\\
&\quad p\ \textit{lignes}\begin{cases}+e^{(q-p)\sigma}U^{i_1}_{tk}\,a^{ti_2\dots i_p}_{j_1\dots j_q}+e^{(q-p)\sigma}\sigma_k\,a^{i_1\dots i_p}_{j_1\dots j_q}\\ +\dots+\\ +e^{(q-p)\sigma}U^{i_p}_{tk}a^{i_1\dots i_{p-1}t}_{j_1\dots j_q}+e^{(q-p)\sigma}\sigma_k\,a^{i_1\dots i_p}_{j_1\dots j_q}\end{cases}\\
&\quad q\ \textit{lignes}\begin{cases}-e^{(q-p)\sigma}U^t_{j_1k}\,a^{i_1\dots i_p}_{tj_2\dots j_q}-e^{(q-p)\sigma}\sigma_k\,a^{i_1\dots i_p}_{j_1\dots j_q}\\ -\dots-\\ -e^{(q-p)\sigma}U^t_{j_qk}\,a^{i_1\dots i_p}_{j_1\dots j_{q-1}t}-e^{(q-p)\sigma}\sigma_k\,a^{i_1\dots i_p}_{j_1\dots j_q}\end{cases}\\
&=e^{(q-p+1)\sigma}\xi\,[\partial_k a^{i_1\dots i_p}_{j_1\dots j_q}+\\
&\quad+U^{i_1}_{tk}a^{ti_2\dots i_p}_{j_1\dots j_q}+\dots+U^{i_p}_{tk}a^{i_1\dots i_{p-1}t}_{j_1\dots j_q}\\
&\quad-U^t_{j_1k}a^{i_1\dots i_p}_{tj_2\dots j_q}-\dots-U^t_{j_qk}\,a^{i_1\dots i_p}_{j_1\dots j_{q-1}t}]\\
&=e^{(q-p+1)\sigma}\,\underset{1}{\Lambda}_k a^{i_1\dots i_p}_{j_1\dots j_q}.
\end{aligned}
$$

La chose essentielle dans la démonstration du théorème précédent, c'est-à-dire dans la déduction de la formule (3.3), c'est le facteur $e^{(q-p)\sigma}$ dans la relation (3.2). Le facteur ξ dans les formules (3.1) figure seulement pour qu'on ait dans la dérivée covariante du tenseur, le facteur correspondant $e^{(q-p+1)\sigma}$, c'est-à-dire pour qu'on puisse placer la dérivée covariante du tenseur parmi les tenseurs auxquels le théorème est applicable. Pour la même raison nous considérerons, au lieu des tenseurs (2.5) de la courbure de la connexion associée, les tenseurs

$$\xi^2 \underset{1}{\gamma}{}^{i}{}_{pjk}, \quad \xi^2 \underset{1}{\Gamma}{}^{i}{}_{pjk}, \tag{3.4}$$

et au lieu des tenseurs (2.7) de la torsion de la connexion associée, les tenseurs

$$\xi\, s^{i}_{jk}, \quad \xi\, S^{i}_{jk}.$$

Le facteur ξ n'ayant, dans les formules (3.1), (3.4) et dans les autres relations semblables, que le rôle de placer le tenseur considéré parmi les tenseurs auxquels le théorème est applicable, il ne doit pas nécessairement être lié avec le champ des vecteurs ξ^i; il est nécessaire seulement qu'il se transforme, par la transformation conforme de l'espace V_n de sorte que $\bar{\xi} = e^{\sigma}\xi$.

En vertu de (3.1), on a

$$\underset{1}{\nabla}_j \underset{1}{\nabla}_k a^i = \xi\,[\partial_j \underset{1}{\nabla}_k a^i + u^{i}_{tj} \underset{1}{\nabla}_k a^t - u^{t}_{kj} \underset{1}{\nabla}_t a^i]$$

$$= (\partial_j \xi) \underset{1}{\nabla}_k a^i + \xi^2 \left[\frac{\partial^2 a^i}{\partial x^j \partial x^k} + (\partial_j u^{i}_{pk})\, a^p + u^{i}_{pk}\, \partial_j a^p \right.$$

$$\left. + (\partial_k a^t)\, u^{i}_{tj} + u^{i}_{tj} u^{t}_{pk} a^p - u^{t}_{kj} \partial_t a^i - u^{t}_{kj} u^{i}_{pt} a^p \right].$$

Donc, en vertu de la première relation (2.5) et de la première relation (2.7), nous avons

$$\underset{1}{\nabla}_j \underset{1}{\nabla}_k a^i - \underset{1}{\nabla}_k \underset{1}{\nabla}_j a^i = (\partial_j \xi) \underset{1}{\nabla}_k a^i - (\partial_k \xi) \underset{1}{\nabla}_j a^i + \xi^2 \underset{1}{\gamma}{}^{i}{}_{pjk} a^p + \xi\, s^{t}_{jk} \underset{1}{\nabla}_t a^i. \tag{3.5}$$

Cette relation étant semblable à l'identité classique de Ricci, nous l'appellerons l'identité de Ricci par rapport à la connexion associée (1.1). Par une voie analogue, nous déduisons l'identité de Ricci par rapport à la connexion associée dans le cas général

$$\begin{aligned} &\underset{1}{\nabla}_l \underset{1}{\nabla}_k a^{i_1\ldots i_p}_{j_1\ldots j_q} - \underset{1}{\nabla}_k \underset{1}{\nabla}_l a^{i_1\ldots i_p}_{j_1\ldots j_q} \\ &= (\partial_l \xi) \underset{1}{\nabla}_k a^{i_1\ldots i_p}_{j_1\ldots j_q} - (\partial_k \xi) \underset{1}{\nabla}_l a^{i_1\ldots i_p}_{j_1\ldots j_q} + \xi\, s^{t}_{lk} \underset{1}{\nabla}_t a^{i_1\ldots i_p}_{j_1\ldots j_q} \\ &+ \xi^2 [\underset{1}{\gamma}{}^{i_1}{}_{rlk} a^{r i_2\ldots i_p}_{j_1\ldots j_q} + \cdots + \underset{1}{\gamma}{}^{i_p}{}_{rlk} a^{i_1\ldots i_{p-1} r}_{j_1\ldots j_q} \\ &- \underset{1}{\gamma}{}^{r}{}_{j_1 lk} a^{i_1\ldots i_p}_{r j_2\ldots j_q} - \cdots - \underset{1}{\gamma}{}^{r}{}_{j_q lk} a^{i_1\ldots i_p}_{j_1\ldots j_{q-1} r}]. \end{aligned} \tag{3.6}$$

Nous démontrerons le théorème suivant:

L'identité de Ricci (3.5) *et* (3.6) *se transforment, par la transformation conforme de l'espace* V_n, *dans l'identité de Ricci par rapport à la connexion associée* (2.3).

En effet, en vertu de (2.2), (2.6), (2.8), (3.2) et (3.3), nous avons:

$$\overline{\underset{1}{\nabla}}_j \overline{\underset{1}{\nabla}}_k \bar{a}^i - \overline{\underset{1}{\nabla}}_k \overline{\underset{1}{\nabla}}_j \bar{a}^i = (\partial_j \bar{\xi}) \overline{\underset{1}{\nabla}}_k \bar{a}^i - (\partial_k \bar{\xi}) \overline{\underset{1}{\nabla}}_j \bar{a}^i +$$

$$+ \bar{\xi}^2 \underset{1}{\bar{\gamma}}{}^i{}_{pjk} \bar{a}^p + \bar{\xi} \bar{s}^t_{jk} \overline{\underset{1}{\nabla}}_t \bar{a}^i$$

$$= \partial_j (e^\sigma \xi) \underset{1}{\Lambda}_k a^i - \partial_k (e^\sigma \xi) \underset{1}{\Lambda}_j a^i + \xi^2 e^\sigma \underset{1}{\Gamma}{}^i{}_{pjk} a^p$$

$$+ e^\sigma \xi (S^t_{jk} + \delta^t_j \sigma_k - \delta^t_k \sigma_j) \underset{1}{\Lambda}_t a^i$$

$$= e^\sigma [(\partial_j \xi) \underset{1}{\Lambda}_k a^i - (\partial_k \xi) \underset{1}{\Lambda}_j a^i + \xi^2 \underset{1}{\Gamma}{}^i{}_{pjk} a^p + \xi S^t_{jk} \underset{1}{\nabla}_t a^i].$$

D'autre part, en tenant compte de (3.3), nous pouvons écrire:

$$\overline{\underset{1}{\nabla}}_j \overline{\underset{1}{\nabla}}_k \bar{a}^i - \overline{\underset{1}{\nabla}}_k \overline{\underset{1}{\nabla}}_j \bar{a}^i = e^\sigma [\underset{1}{\Lambda}_j \underset{1}{\Lambda}_k a^i - \underset{1}{\Lambda}_k \underset{1}{\Lambda}_j a^i].$$

A cause de tout cela, la relation (3.5) se transforme, par la transformation conforme (2.1) de l'espace V_n, en la relation:

$$\underset{1}{\Lambda}_j \underset{1}{\Lambda}_k a^i - \underset{1}{\Lambda}_k \underset{1}{\Lambda}_j a^i = (\partial_j \xi) \underset{1}{\nabla}_k a^i - (\partial_k \xi) \underset{1}{\Lambda}_j a^i +$$

$$+ \xi^2 \underset{1}{\Gamma}{}^i{}_{pjk} a^p + \xi S^t_{jk} \underset{1}{\Lambda}_t a^i,$$

ce qu'il fallait démontrer.

Dans le cas général (3.6), on démontre le théorème par le procédé analogue.

4. Soit

$$\underset{1}{\gamma}{}^t{}_{jkt} = \gamma_{jk}, \quad g^{jk} \gamma_{jk} = \gamma.$$

Le tenseur

$$\underset{1}{\gamma}{}^i{}_{jkl} + \frac{1}{n-2} (\delta^i_k \gamma_{jl} - \delta^i_l \gamma_{jk} + g_{lj} g^{it} \gamma_{tk} - g_{kj} g^{it} \gamma_{tl})$$

$$+ \frac{\gamma}{(n-1)(n-2)} (\delta^i_l g_{jk} - \delta^i_k g_{jl})$$

est égal au tenseur de la courbure conforme de l'espace V_n. *Donc, il ne dépend pas du champ des vecteurs* ξ^i *et par conséquent, il est même pour toutes les connexions associées.*

Soit

$$p^i_{jk} = \frac{1}{\xi^2} (\delta^r_m \delta^i_k - \delta^r_k \delta^i_m) \xi^m g_{rj}. \tag{4.2}$$

Alors, (1.1) s'exprime sous la forme

$$u^i_{jk} = \Gamma^i_{jk} + p^i_{jk}.$$

Substituant cette expression à la première formule (2.5), nous avons:

$$\underset{1}{\gamma}{}^i_{jkl} = \partial_k \Gamma^i_{jl} - \partial_l \Gamma^i_{jk} + \Gamma^i_{rk}\Gamma^r_{jl} - \Gamma^i_{rl}\Gamma^r_{jk}$$
$$+ \partial_k p^i_{jl} + \Gamma^i_{rk} p^r_{jl} - \Gamma^r_{jk} p^i_{rl} - \Gamma^r_{lk} p^i_{jr}$$
$$- \partial_l p^i_{jk} - \Gamma^i_{rl} p^r_{jk} + \Gamma^r_{jl} p^i_{rk} + \Gamma^r_{kl} p^i_{jr}$$
$$+ p^i_{rk} p^r_{jl} - p^i_{rl} p^r_{jk}.$$

Si nous notons par R^i_{jkl} le tenseur de la courbure de l'espace V_n, et par virgule la dérivée covariante par rapport aux symboles de Christoffel Γ^i_{jk} de l'espace V_n, nous pouvons écrire la relation précédente sous la forme

$$\underset{1}{\gamma}{}^i_{jkl} = R^i_{jkl} + p^i_{jl,k} - p^i_{jk,l} + p^i_{rk} p^r_{jl} - p^i_{rl} p^r_{jk},$$

d'où, en vertu de (4.2), suit:

$$\underset{1}{\gamma}{}^i_{jkl} = R^i_{jkl} + \delta^i_l \left(\frac{1}{\xi^2} \xi_{j,k} - 2 \frac{(\partial_k \xi)\xi_j}{\xi^2} - \frac{1}{\xi^4} \xi_k \xi_j \right)$$
$$- \delta^i_k \left(\frac{1}{\xi^2} \xi_{j,l} - 2 \frac{(\partial_l \xi)\xi_j}{\xi^2} - \frac{1}{\xi^4} \xi_l \xi_j \right)$$
$$+ g_{kj} \left(\frac{1}{\xi^2} \xi^i_{,l} - 2 \frac{(\partial_l \xi)\xi^i}{\xi^2} - \frac{1}{\xi^4} \xi_l \xi^i \right)$$
$$- g_{lj} \left(\frac{1}{\xi^2} \xi^i_{,k} - 2 \frac{(\partial_k \xi)\cdot\xi^i}{\xi^2} - \frac{1}{\xi^4} \xi_k \xi^i \right)$$
$$+ \frac{1}{\xi^2} (\delta^i_l g_{jk} - \delta^i_k g_{jl}).$$

En posant

$$\varphi_{jk} = \frac{1}{\xi^2} \xi_{j,k} - 2 \frac{\xi_j (\partial_k \xi)}{\xi^2} - \frac{1}{\xi^4} \xi_j \xi_k$$

$$\varphi^i_k = g^{ij} \varphi_{jk} = \frac{1}{\xi^2} \xi^i_{,k} - 2 \frac{\xi^i (\partial_k \xi)}{\xi^2} - \frac{1}{\xi^4} \xi^i \xi_k,$$

nous avons enfin

$$\underset{1}{\gamma}{}^i_{jkl} = R^i_{jkl} + \delta^i_l \varphi_{jk} - \delta^i_k \varphi_{jl} + g_{kj} \varphi^i_l - g_{lj} \varphi^i_k$$
$$+ \frac{1}{\xi^2} (\delta^i_l g_{jk} - \delta^i_k g_{jl}).$$

En éliminant les fonctions φ_{ij} et φ^i_k de la façon bien connue ([3], p. 90), nous obtenons:

$$\underset{1}{\gamma}{}^i_{jkl} + \frac{1}{n-2} (\delta^i_k \gamma_{jl} - \delta^i_l \gamma_{jk} + g_{lj} g^{it} \gamma_{tk} - g_{kj} g^{it} \gamma_{tl})$$
$$+ \frac{\gamma}{(n-2)(n-1)} (\delta^i_l g_{jk} - \delta^i_k g_{jl}) =$$

$$= R^i_{jkl} + \frac{1}{n-2}\left(\delta^i_k R_{jl} - \delta^i_l R_{jk} + g_{lj}\, g^{it} R_{tk} - g_{kj}\, g^{it} R_{tl}\right)$$

$$+ \frac{R}{(n-1)(n-2)}\left(\delta^i_l\, g_{jk} - \delta^i_k\, g_{jl}\right),$$

où

$$R_{jk} = R^i_{jki}, \quad \text{et} \quad R = g^{jk} R_{jk}$$

sont le tenseur de Ricci et la courbure scalaire de l'espace V_n. Le tenseur du côté droit étant le tenseur de la courvature conforme de l'espace V_n, le théorème est démontré.

5. La connexion u^i_{jk}, comme nous l'avons déjà dit, n'est pas symétrique. Par conséquent, $u^i_{tk}\, a^t$ n'est pas la même chose que $u^i_{kt}\, a^t$. A cause de cela on peut considérer, à côté de la dérivée covariante $\underset{1}{\nabla}$ (définie par la relation (3.1)), une deuxième dérivée covariante. Désignons par $\underset{2}{\nabla}$ cette deuxième dérivée covariante par rapport à la connexion associée (1.1). Nous la définissons de la manière suivante:

$$\underset{2}{\nabla}_k\, a^i = \partial_k\, a^i + u^i_{kt}\, a^t$$

$$\underset{2}{\nabla}_k\, a_i = \partial_k\, a_i - u^t_{ki}\, a_t$$

et en général:

$$\underset{1}{\nabla}_k\, a^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q} = \partial_k\, a^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q}$$

$$+ u^{i_1}_{kt}\, a^{t i_2 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q} + \cdots + u^{i_p}_{kt}\, a^{i_1 \ldots i_{p-1} t}_{j_1 \ldots j_q}$$

$$- u^t_{kj_1}\, a^{i_1 \ldots i_p}_{t j_2 \ldots j_q} - \cdots - u^t_{kj_q}\, a^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_{q-1} t}.$$

Désignons par $\underset{2}{\Lambda}$ la dérivée covariante analogue par rapport à la connexion (2.3), par exemple:

$$\underset{2}{\Lambda}_k\, a^i = \partial_k\, a^i + U^i_{kt}\, a^t.$$

Alors nous pouvons démontrer le théorème:

Si le vecteur a^i se transforme, par la transformation conforme (2.1) *de l'espace V_n, de la sorte $\bar{a}^i = e^{-\sigma} a^i$, le tenseur:*

$$\underset{2}{\nabla}_k\, a^i - \frac{1}{\xi^2}\left(\xi_k\, a^i - \xi_t\, a^t\, \delta^i_k\right)$$

se transforme en tenseur analogue par rapport à la connexion (2.3) *et par rapport au champ des vecteurs $\Xi^i = \sigma^i + \dfrac{\xi^i}{\xi^2}$.*

En effet,

$$\overline{\underset{2}{\nabla}}_k \overline{a}^i - \frac{1}{\overline{\xi}^2}(\overline{\xi}_k \overline{a}^i - \overline{\xi}_t \overline{a}^t \delta^i_k) =$$

$$= \partial_k (e^{-\sigma} a^i) + (U^i_{kt} + \delta^i_k \sigma_t) e^{-\sigma} a^t - \frac{e^{-\sigma}}{\xi^2}(\xi_k a^i - \xi_t a^t \delta^i_k)$$

$$= e^{-\sigma}\left[\partial_k a^i + U^i_{kt} a^t - \left(\sigma_k + \frac{\xi_k}{\xi^2}\right) a^i + \left(\sigma_t + \frac{\xi_t}{\xi^2}\right) a^t \delta^i_k\right]$$

c'est-à-dire

$$\overline{\underset{2}{\nabla}}_k \overline{a}^i - \frac{1}{\overline{\xi}^2}(\overline{\xi}_k \overline{a}^i - \overline{\xi}_t \overline{a}^t \delta^i_k) = e^{-\sigma}[\underset{1}{\Lambda}_k a^i - \Xi_k a^i + \Xi_t a^t \delta^i_k]$$

ce qu'il fallait démontrer.

Par une voie analogue, nous démontrons, en général:

Si les tenseurs a_i, $a^{i_1 \cdots i_p}$, $a_{j_1 \ldots j_q}$ se transforment par la transformation conforme (2.1) *de l'espace V_n, et d'après la loi* (3.2), *les tenseurs*:

$$\underset{2}{\nabla}_k a_i + \frac{1}{\xi^2}(\xi_k a_i - \xi_i a_k),$$

$$\underset{2}{\nabla}_k a^{i_1 \cdots i_p} - \frac{1}{\xi^2}(p\, \xi_k a^{i_1 \cdots i_p} - \xi_t a^{t i_2 \cdots i_p} \delta^{i_1}_k - \cdots - \xi_t a^{i_1 \cdots i_{p-1} t} \delta^{i_p}_k),$$

$$\underset{2}{\nabla}_k a_{j_1 \ldots j_q} + \frac{1}{\xi^2}(q\, \xi_k a_{j_1 \ldots j_q} - \xi_{j_1} a_{k j_2 \ldots j_q} - \cdots - \xi_{j_q} a_{j_1 \ldots j_{q-1} k}),$$

se transforment en tenseurs analogues par rapport à la connexion (2.3) *et par rapport au champ des vecteurs $\Xi_i = \sigma_i + \frac{\xi_i}{\xi^2}$ c'est-à-dire*

$$\overline{\underset{2}{\nabla}}_k \overline{a}_i + \frac{1}{\overline{\xi}^2}(\overline{\xi}_k \overline{a}_i - \overline{\xi}_i \overline{a}_k) = e^{\sigma}(\underset{2}{\Lambda}_k a_i + \Xi_k a_i - \Xi_i a_k),$$

$$\overline{\underset{2}{\nabla}}_k \overline{a}^{i_1 \ldots i_p} - \frac{1}{\overline{\xi}^2}(p\, \overline{\xi}_k \overline{a}^{i_1 \ldots i_p} - \overline{\xi}_t \overline{a}^{t i_2 \ldots i_p} \delta^{i_1}_k - \cdots - \overline{\xi}_t \overline{a}^{i_1 \ldots i_{p-1} t} \delta^{i_p}_k) =$$

$$= e^{-p\sigma}(\underset{2}{\Lambda}_k a^{i_1 \ldots i_p} - p\, \Xi_k a^{i_1 \ldots i_p} + \Xi_t a^{t i_2 \ldots i_p} \delta^{i_1}_k + \cdots + \Xi_t a^{i_1 \ldots i_{p-1} t} \delta^{i_p}_k),$$

$$\overline{\underset{2}{\nabla}}_k \overline{a}_{j_1 \ldots j_q} \frac{1}{\overline{\xi}^2}(q\, \overline{\xi}_k \overline{a}_{j_1 \ldots j_q} - \overline{\xi}_{j_1} \overline{a}_{k j_2 \ldots j_q} - \cdots - \overline{\xi}_{j_q} a_{j_1 \ldots j_{q-1} k}) =$$

$$= e^{q\sigma}(\underset{2}{\Lambda}_k a_{j_1 \ldots j_q} + q\, \Xi_k a_{j_1 \ldots j_q} - \Xi\, a_{k j_2 \ldots j_q} - \cdots - \Xi_{j_q} a_{j_1 \ldots j_{q-1} k}).$$

Il est intéressant de noter que le tenseur du théorème précédent, calculé dans le cas où le tenseur $a^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q}$ est le tenseur métrique g_{ij} où g^{ij} de l'espace V_n, est le zéro, c'est-à-dire

$$\underset{2}{\nabla}_k g_{ij} + \frac{1}{\xi^2}(2\, \xi_k g_{ij} - \xi_i g_{kj} - \xi_j g_{ik}) = 0,$$

et

$$\underset{2}{\nabla}_k g^{tj} - \frac{1}{\xi^2}(2\,\xi_k\, g^{tj} - \xi_t\, g^{tj}\,\delta^i_k - \xi_t\, g^{it}\,\delta^j_k) = 0,$$

ce qu'il est facile de voir.

Soit:

$$\underset{2}{\gamma}_{jkt}^{\ \ i} = \frac{\partial}{\partial x^j}\, u^i_{kt} - \frac{\partial}{\partial x^k}\, u^i_{jt} + u^i_{jq}\, u^q_{kt} - u^i_{kq}\, u^q_{jt},$$

$$\underset{2}{\Gamma}_{jkt}^{\ \ i} = \frac{\partial}{\partial x^j}\, U^i_{kt} - \frac{\partial}{\partial x^k}\, U^i_{jt} + U^i_{jq}\, U^q_{kt} - U^i_{kq}\, U^q_{jt}.$$

Alors, nous avons le théorème:

Le tenseur

$$\underset{2}{\gamma}_{jkt}^{\ \ i} + \delta^i_t\left[\underset{2}{\nabla}_k\left(\frac{\xi_j}{\xi^2}\right) - \underset{2}{\nabla}_j\left(\frac{\xi_k}{\xi^2}\right)\right] + \delta^i_k\,\underset{2}{\nabla}_j\left(\frac{\xi_t}{\xi^2}\right) - \delta^i_j\,\underset{2}{\nabla}_k\left(\frac{\xi_t}{\xi^2}\right)$$

se transforme, par la transformation conforme (2.1) *de l'espace V_n en tenseur analogue par rapport à la connexion* (2.3) *et par rapport au champ des vecteurs Ξ_i, c'est-à-dire en tenseur*

$$\underset{2}{\Gamma}_{jkt}^{\ \ i} + \delta^i_t(\underset{2}{\Lambda}_k\,\Xi_j - \underset{2}{\Lambda}_j\,\Xi_k) + \delta^i_k\,\underset{2}{\Lambda}_j\,\Xi_t - \delta^i_j\,\underset{2}{\Lambda}_k\,\Xi_t.$$

En effet,

$$\underset{2}{\bar{\gamma}}_{jkt}^{\ \ i} + \delta^i_t\left[\underset{2}{\bar{\nabla}}_k\left(\frac{\bar{\xi}_j}{\bar{\xi}^2}\right) - \underset{2}{\bar{\nabla}}_j\left(\frac{\bar{\xi}_k}{\bar{\xi}^2}\right)\right] + \delta^i_k\,\underset{2}{\bar{\nabla}}_j\left(\frac{\bar{\xi}_t}{\bar{\xi}^2}\right) - \delta^i_j\,\underset{2}{\bar{\nabla}}_k\left(\frac{\bar{\xi}_t}{\bar{\xi}^2}\right) =$$

$$= \partial_j\,\bar{u}^i_{kt} - \partial_k\,\bar{u}^i_{jt} + \bar{u}^i_{jq}\,\bar{u}^q_{kt} - \bar{u}^i_{kq}\,\bar{u}^q_{jt}$$

$$+ \delta^i_t\left[\partial_k\left(\frac{\bar{\xi}_j}{\bar{\xi}^2}\right) - \bar{u}^p_{kj}\,\frac{\bar{\xi}_p}{\bar{\xi}^2} - \partial_j\left(\frac{\bar{\xi}_k}{\bar{\xi}^2}\right) + \bar{u}^p_{jk}\,\frac{\bar{\xi}_p}{\bar{\xi}^2}\right]$$

$$+ \delta^i_k\left[\partial_j\left(\frac{\bar{\xi}_t}{\bar{\xi}^2}\right) - \bar{u}^p_{jt}\,\frac{\bar{\xi}_p}{\bar{\xi}^2}\right] - \delta^i_j\left[\partial_k\left(\frac{\bar{\xi}_t}{\bar{\xi}^2}\right) - \bar{u}^p_{kt}\,\frac{\bar{\xi}_p}{\bar{\xi}^2}\right]$$

$$= \partial_j\,(U^i_{kt} + \delta^i_k\,\sigma_t) - \partial_k\,(U^i_{jt} + \delta^i_j\,\sigma_t) + (U^i_{jq} + \delta^i_j\,\sigma_q)(U^q_{kt} + \delta^q_k\,\sigma_t)$$

$$- (U^i_{kq} + \delta^i_k\,\sigma_q)\,(U^q_{jt} + \delta^q_j\,\sigma_t)$$

$$+ \delta^i_t\left[\partial_k\left(\frac{\xi_j}{\xi^2}\right) - (U^p_{kj} + \delta^p_k\,\sigma_j)\,\frac{\xi_p}{\xi^2} - \partial_j\left(\frac{\xi_k}{\xi^2}\right) + (U^p_{jk} + \delta^p_j\,\sigma_k)\,\frac{\xi_p}{\xi^2}\right]$$

$$+ \delta^i_k\left[\partial_j\left(\frac{\xi_t}{\xi^2}\right) - (U^p_{jt} + \delta^p_j\,\sigma_t)\,\frac{\xi_p}{\xi^2}\right] - \delta^i_j\left[\partial_k\left(\frac{\xi_t}{\xi^2}\right) - (U^p_{kt} + \delta^p_k\,\sigma_t)\,\frac{\xi_p}{\xi^2}\right]$$

$$= \partial_j U^i_{kt} - \partial_k U^i_{jt} + U^i_{jq} U^q_{kt} - U^i_{kq} U^q_{jt}$$

$$+ \delta^i_k \left[\partial_j \left(\sigma_t + \frac{\xi_t}{\xi^2} \right) - U^p_{jt} \left(\sigma_p + \frac{\xi_p}{\xi^2} \right) \right] - \delta^i_j \left[\partial_k \left(\sigma_t + \frac{\xi_t}{\xi^2} \right) - U^p_{kt} \left(\sigma_p + \frac{\xi_p}{\xi^2} \right) \right]$$

$$+ \delta^i_t \left[\partial_k \left(\sigma_j + \frac{\xi_j}{\xi^2} \right) - U^p_{kj} \left(\sigma_p + \frac{\xi_p}{\xi^2} \right) - \partial_j \left(\sigma_k + \frac{\xi_k}{\xi^2} \right) + U^p_{jk} \left(\sigma_p + \frac{\xi_p}{\xi^2} \right) - \right.$$

$$\left. - \sigma_j \frac{\xi_k}{\xi^2} + \sigma_k \frac{\xi_j}{\xi^2} \right] + \delta^i_t (U^p_{kj} - U^p_{jk}) \sigma_p + (U^i_{jk} - U^i_{kj}) \sigma_t + \delta^i_j \sigma_k \sigma_t - \delta^i_k \sigma_j \sigma_t +$$

$$+ \delta^i_j \frac{\xi_k}{\xi^2} \sigma_t - \delta^i_k \frac{\xi_j}{\xi^2} \sigma_t$$

$$= \underset{2}{\Gamma}{}^i_{jkt} + \delta^i_t \left[\underset{2}{\Lambda}_k \left(\sigma_j + \frac{\xi_j}{\xi^2} \right) - \underset{2}{\Lambda}_j \left(\sigma_k + \frac{\xi_k}{\xi^2} \right) \right] + \delta^i_k \underset{2}{\Lambda}_j \left(\sigma_t + \frac{\xi_t}{\xi^2} \right) -$$

$$- \delta^i_j \underset{2}{\Lambda}_k \left(\sigma_t + \frac{\xi_t}{\xi^2} \right),$$

parce que, en vertu de

$$U^i_{jk} - U^i_{kj} = S^i_{jk} = \delta^i_k \left(\sigma_j + \frac{\xi_j}{\xi^2} \right) - \delta^i_j \left(\sigma_k + \frac{\xi_k}{\xi^2} \right),$$

il résulte:

$$\left(\delta^i_j \frac{\xi_k}{\xi^2} - \delta^i_k \frac{\xi_j}{\xi^2} \right) \sigma_t + \delta^i_t \left(\sigma_k \frac{\xi_j}{\xi^2} - \sigma_j \frac{\xi_k}{\xi^2} \right) + \delta^i_j \sigma_k \sigma_t + \delta^i_k \sigma_j \sigma_t +$$

$$+ (U^i_{jk} - U^i_{kj}) \sigma_t + \delta^i_t (U^p_{kj} - U^p_{jk}) \sigma_p = 0.$$

BIBLIOGRAPHIE

[1] M. Prvanović; *Système des courbes cycliques d'un sous-espace plongé dans un espace riemannien,* Glasnik mat. fiz. i astr. (Zagreb) 12 (1957), 235-243

[2] M. Prvanović. *Les vecteurs des courbures cycliques des courbes d'un espace riemannien,* Publ. Inst. Math. Acad. Serbe Sci. (Belgrade) 13 (1959) 35-46

[3] L. P. Eisenhart, *Riemannian Geometry.* Princeton, 1949