PUBLICATIONS DE L'INSTITUT MATHÉMATIQUE
Nouvelle série, 10 (24), 1970. pp. 38—50.

SUR LE FORMALISME CANONIQUE POUR LES SYSTÈMES DÉGÉNÉRÉS

Dušanka Đokić-Ristanović et Đorđe Mušicki

(Communiqué le 4 Juin 1969)

Résumé. Dans cet article on a étudié les systèmes dégénérés, où le hessian de la fonction de Lagrange est égale au zéro, et on a étendu la méthode de Dirac du formalisme canonique au cas quand la fonction de Lagrange dépend explicitement du temps, en partant du formalisme correspondant de Lagrange.

Introduction

Les systèmes dégérés sont introduits par Dirac (1950) et définis par la condition que le hessian de la fonction de Lagrange par rapport aux vitesses généralisées est égale identiquement au zéro. Dans la mécanique classique il n'y a pas de systèmes de telle sorte, cependant à cette classe appartiennent quelques systèmes physiques importants, comme le champs électromagnétique classique et le champs de la gravitation dans la théorie de la relativité.

P. Dirac [1, 2, 3] a élaboré pour ces systèmes le formalisme de Hamilton correspondant, où le système des équations qui définit les moments conjugués ne peut pas être résolu par rapport aux vitesses généralisées. De là il suit qu'entre les coordonnées généralisées et les moments conjugués apparaissent des liaisons complémentaires primaires, qui causent l'apparition des membres ajoutés dans les équations de Hamilton et la condition de la consistence et les équations canoniques peuvent donner les liaisons secondaires. Cependant, tous les multiplicateurs des liaisons ne sont pas déterminés, ce qui amène jusqu'aux fonctions arbitraires dans les équations de Hamilton. En réduisant l'équation générale du mouvement, Dirac a introduit le concept de la fonction de la première et deuxième classe, ainsi que les crochets de Poisson généralisés. Ce formalisme canonique donne la diminuation effective du nombre de degrés de liberté et représente une méthode générale pour la quantization d'un tel système.

Sudarshan et Mukunda [4] ont présenté des crochets de Poisson classiques dans une forme covariante et, en les généralisant, ils ont montré que sous les conditions spéciales les conditions spéciales les crochets de Poisson si généralisés se réduisent aux ceux-ci introduits par Dirac. Anderson et Bergmann [5], en se bornant à une classe plus étroite de la fonction de Lagrange, ont développé cette méthode au point de vue de la théorie covariante des champs.

Shanmugadhasan [6] a analysé l'influence de la dégénération aux équations de Lagrange et à cette base il a donné le formalisme canonique pour les systèmes dégénérés. Il a montré que dans ce cas un nombre des équations de Lagrange se réduit aux équations du premier degré et du degré nul et alors les liaisons secondaires apparaissent même dans le formalisme de Lagrange. En passant à la méthode de Hamilton, Shanmugadhasan a obtenu un tel formalisme canonique où toutes les liaisons figurent explicitement dans les équations de Hamilton, ce qui le distingue de celui de Dirac.

Ce travail représente une généralisation systématique de la méthode de Dirac pour les systèmes dégénérés au cas quand le temps apparaît explicitement dans la fonction de Lagrange, en partant de l'approche de Shanmugadhasan à ce problème. On a présenté d'abord le formalisme de Lagrange pour tels systèmes, qui conduit à la dégénération d'un certain nombre des équations, et en faisant le passage au formalisme canonique, on a obtenu l'équation générale du mouvement avec un membre ajouté, qui sous la forme explicite contient des fonctions arbitraires.

En comparant les propriétés des fonctions correspondantes aux celles-ci de la première et deuxième classe d'après la definition de Dirac ou de Shanmugadhasan, on a conclu que ces définitions ne sont pas convenables pour ce cas. On a donné une définitition plus générale, qui permet d'exprimer l'équation générale du mouvement seulement par ces fonctions. A cette base on a fait la réduction effective du nombre de degrés de liberté, qui peut être réalisée en introduisant des crochets de Poisson généralisés aussi, mais y apparaît un terme supplémentaire.

1. Méthode de Lagrange pour les systèmes dégénérés

Le comportement d'un système défini par une fonction de Lagrange et des conditions initiales dépend du rang de la matrice du hessian

$$J=\left\{\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_i \, \partial \dot{q}_j}\right\}. \qquad (i,j=1,\ldots,N) \tag{1.1}$$

Si le déterminant correspondant

$$I=\left|\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_i \, \partial \dot{q}_j}\right| \tag{1.2}$$

et tous ses mineurs du rang plus haut que $N-R$ sont égales au zéro, et parmi les mineurs du rang $N-R$ se trouve au moins un différent du zéro, on dit pour ce système qu'il est dégénéré et R représente le rang de la dégénération. Si pourtant le déterminant (1.2) est différent du zéro, ce système est nondégénéré et dans la mécanique analitique habituelle on ne traite que des systèmes nondégénérés.

Pour le cas consideré, à l'aide des transformations équivalentes de la matrice J, Shanmugadhasan [6] a montré le suivant. De N équations de Lagrange, dont la dégénération est du rang R, seulement $N-R$ équations restent du deuxième rang, les R' se réduisent aux celles-ci du premier rang de la forme

$$B_k(q,\dot{q},t)=0, \qquad (k=1,\ldots,R') \tag{1.3}$$

les R'' équations sont réduites au rang nul

$$C_l(q,t)=0 \qquad (l=1,\ldots,R'') \tag{1.4}$$

et les autres $R-R'-R''$ des équations sont une conséquence des équations précédantes. En continuant se procédé, on peut obtenir une diminuation postérieure du nombre des équations de Lagrange du deuxième rang.

De telle façon, seulement $N-R-S$ des équations restent du deuxième rang, les autres $R+S$ équations sont devenues du premier rang

$$B_n^*(q, \dot{q}, t)=0, \quad \left|\frac{\partial B_n^*}{\partial \dot{q}_i}\right| \neq 0 \qquad (n=1, \ldots, K) \tag{1.5}$$

et du rang nul

$$C_m^*(q, t)=0 \qquad (m=1, \ldots, L) \tag{1.6}$$

et les restes $R+S-K-L$ son dépendantes des équations précédentes. Toutes les liaisons (1.5) et (1.6) doivent être conservées au cours du temps, ce qui est exprimé par la condition de la consistence

$$\dot{B}_n^*=0, \quad \dot{C}_m^*=0, \tag{1.7}$$

d'où provient que les augmentations $dq, d\dot{q}$, et dt sont bornées par

$$dB_n^*=0, \quad dC_m^*=0. \tag{1.8}$$

2. Formulation de la méthode de Hamilton

Si l'on veut passer au formalisme canonique, il faut d'abord introduire les moments conjugués

$$p_i=\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \qquad (i=1, \ldots, N) \tag{2.1}$$

et trouver les liaisons primaires et secondaires entre les variables q, p et t. Les liaisons primaires sont une conséquence directe de la dégénération du système et comme le déterminant fonctionnel $\left|\frac{\partial p_i}{\partial q_j}\right|$ est du rang $N-R$, d'après le théorème de la dépendance des fonctions il suit qu'entre des moments conjugués et des coordonnées généralisées existent R liaisons de la forme

$$\Phi_r(q, p, t)=0. \qquad (r=1, \ldots, R) \tag{2.2}$$

Des liaison secondaires deviennent comme une conséquence des équations de Langrange du premier rang et du rang nul. A cause de la dégénération supplémentaire il existe encore S relations

$$\chi_s(q, p, t)=0 \qquad (s=1, \ldots, S) \tag{2.3}$$

ce sont les autres équations (1.5) sous la forme transformée et les équations (1.6) qui restent invariantes. Parce que pour le développement suivant l'origine des liaisons n'est pas importante, on peut marquer toutes les liaisons par un symbole commun

$$\theta_\beta(q, p, t)=0 \qquad (\beta=1, \ldots, B) \tag{2.4}$$

et la condition de la consistence s'exprime

$$\dot{\theta}_\beta(q, p, t)=0. \tag{2.5}$$

Pour obtenir les équations canoniques d'un système dégénéré, trouvées par Dirac [2] et Shanmugadhasan [6], introduisons la fonction de Hamilton

$$M = p_i \dot{q}_i - L, \tag{2.6}$$

où l'on comprend la sommation d'après la convention d'Einstein. Si l'on forme la différentielle totale

$$dM = \left(p_i - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) d\dot{q}_i + \dot{q}_i dp_i - \frac{\partial L}{\partial q_i} dq_i - \frac{\partial L}{\partial t} dt,$$

à la base de (2.1) le premier terme s'annule et l'on obtient

$$\frac{\partial M}{\partial \dot{q}_i} = 0. \tag{2.7}$$

Donc, quand on prend en considération le système (2.1), c'est-à-dire des équations (2.2), qui sont une conséquence de ce système, la fonction M ne dépend plus de vitesses généralisées et se transforme à une fonction de la forme $\mathrm{H}_0(q, p, t)$.

Les augmentations dq, dp et dt à cause de la condition (2.5) sont limitées par

$$\frac{\partial \theta_\beta}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial \theta_\beta}{\partial p_i} dp_i + \frac{\partial \theta_\beta}{\partial t} dt = 0.$$

En utilisant la méthode habituelle des multiplicateurs et en mettant $M = H_0$ aux équations précédentes, on obtient les équations de Hamilton correspondantes sous la forme

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H_0}{\partial p_i} + \lambda_\beta \frac{\partial \theta_\beta}{\partial p_i}, \qquad \dot{p}_i = -\frac{\partial \mathrm{H}_0}{\partial q_i} - \lambda_\beta \frac{\partial \theta_\beta}{\partial p_i}. \tag{2.8}$$

La dérivée d'une fonction quelconque des variables canoniques peut être trouvée en partant de

$$\dot{g} = \frac{\partial g}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial g}{\partial p_i} \dot{p}_i + \frac{\partial g}{\partial t}$$

et d'après les équations (2.8), en utilisant les crochets de Poisson, on reçoit

$$\dot{g} = [g, H_0] + \lambda_\beta [g, \theta_\beta] + \frac{\partial g}{\partial t}, \tag{2.9}$$

ce qui représente l'équation générale du mouvement pour les systèmes dégénérés.

3. Détermination des multiplicateurs des liaisons

Si l'on pose à la condition de la consistence (2.5) au lieu de dg_i et dp_i les expressions correspondantes des équations de Hamilton (2.8), il suit

$$[\theta_\beta, \theta_{\beta'}] \lambda_{\beta'} + [\theta_\beta, H_0] + \frac{\partial \theta_\beta}{\partial t} = 0. \qquad (\beta, \beta' = 1, \ldots, B) \tag{3.1}$$

Ce système de B équations, qui est linéaire par rapport aux λ_β, peut servir pour déterminer les multiplicateurs des liaisons. Parce que toutes les équations de Hamilton ne sont pas indépendantes, le rang du déterminant de ce système

$$\Delta = \begin{vmatrix} [\theta_1, \theta_1] \ldots [\theta_1, \theta_B] \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ [\theta_B, \theta_1] \ldots [\theta_B, \theta_B] \end{vmatrix} \tag{3.2}$$

doit être moins que B, qu'il soit $B-A$.

La solution générale du système (3.1) est égale à la somme d'une solution particulaire quelconque

$$\lambda_\beta = \Lambda_\beta(q, p, t)$$

et de la solution générale du système homogène correspondant

$$[\theta_\beta, \theta_{\beta'}]\, v_{\beta'} = 0. \tag{3.3}$$

Si l'on dénote le système fondamental de (3.3) par $v_{a\beta}\,(a=1, \ldots, A)$, on obtient

$$\lambda_\beta = \Lambda_\beta + u_a\, v_{a\beta}, \tag{3.4}$$

où les coefficients u_a représentent les fonctions arbitraires des variables q, p et t. En posant ces expressions aux équations (2.8), on reçoit les équations de Hamilton transformées

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H'}{\partial p_i} + u_a \frac{\partial \theta_a{}^*}{\partial p_i}, \qquad \dot{p}_i = -\frac{\partial H'}{\partial q_i} - u_a \frac{\partial \theta_a{}^*}{\partial q_i}, \tag{3.5}$$

où H et $\theta_a{}^*$ sont définis par

$$H' = H_0 + \Lambda_\beta\, \theta_\beta, \qquad \theta_a{}^* = v_{a\beta}\, \theta_\beta, \tag{3.6}$$

tandis que l'équation générale du mouvement alors prend la forme

$$\dot{g} = [g, H'] + u_a [g, \theta_a{}^*] + \frac{\partial g}{\partial t}. \tag{3.7}$$

La caractéristique principale de ces équations est suivante: dans celles-ci apparaissent les fonctions arbitraires u_a et de cela on peut conclure que la fonction de Hamilton et les conditions initiales ne déterminent pas uniquement le mouvement d'un système dégénéré.

4. Fonctions de la première et deuxième classe

D'après Dirac on dit pour une fonction de la première classe si elle satisfait en même temps deux conditions suivantes [2].

$$[F, \theta_\beta] = 0, \qquad [F, H_0] = 0. \tag{4.1}$$

Pourtant, d'après Shanmugadhasan ces conditions sont généralisées et remplacées par [6].

$$F(q, p, t) = 0, \quad [F, \theta_\beta] = 0, \quad [F, H_0] + \frac{\partial F}{\partial t} = 0. \tag{4.2}$$

En tous les deux cas il est suffisant que ces conditions soient satisfaites pas identiquement, mais à l'aide des équations de liaison (2.4) et les équations de telle sorte s'appellent faibles. Si d'ailleurs la fonction F ne satisfait pas les conditions citées, on dit que c'est la fonction de la deuxième classe.

Si dans la fonction de Lagrange le temps apparaît explicitement, la définition de Dirac n'est convenable, parce que les fonctions H' et θ_a^*, qui figurent dans les équations de Hamilton (3.5), ne sont pas des fonctions de la première classe. Cependant, à la base de la définition de Shanmugadhasan on peut constater que seulement les fonctions θ_a^* sont de la première classe, tandis que H' ne l'est pas.

Il est possible, pourtant, si l'on adopte la définition des fonctions de la première classe aux propriétés des fonctions $H_0(q,p,t)$ et $\theta_\beta(q,p,t)$, que d'après cette nouvelle définition H' et tous les θ_a^* appartiennent à cette classe des fonctions. Pour une fonction X disons qu'elle est de la première classe si les conditions suivantes sont satisfaites

$$
[X,\theta_\beta]=\frac{\partial(X,\theta_\beta)}{\partial(H_0,t)}, \quad [X,H_0]=\frac{\partial(X,H_0)}{\partial(H_0,t)}. \tag{4.3}
$$

Considérons maintenant deux fonctions de la première classe X et Y et examinons si leur crochet de Poisson est aussi une fonction de la même classe. A la base des propriétés des crochets de Poisson on peut développer l'expression $[[X,Y],\theta_\beta]$ et si l'on utilise la supposition que les X et Y satisfont aux conditions (4.3), on obtient

$$
[[X,Y],\theta_\beta]=\frac{\partial[X,Y]}{\partial H_0}\frac{\partial\theta_\beta}{\partial t}-\frac{\partial[X,Y]}{\partial t}\frac{\partial\theta_\beta}{\partial H_0}+A_1, \tag{4.4}
$$

où A_1 est donné par

$$
A_1=\frac{\partial X}{\partial H_0}\left[\frac{\partial\theta_\beta}{\partial t},Y\right]-\frac{\partial Y}{\partial H_0}\left[\frac{\partial\theta_\beta}{\partial t},X\right]+\frac{\partial Y}{\partial t}\left[\frac{\partial\theta_\beta}{\partial H_0},X\right]-\frac{\partial X}{\partial t}\left[\frac{\partial\theta_\beta}{\partial H_0},Y\right]. \tag{4.5}
$$

Seulement si les fonctions X et Y sont choisies ainsi que $A_1=0$, la formule (4.4) se réduit à

$$
[[X,Y],\theta_\beta]=\frac{\partial([X,Y],\theta_\beta)}{\partial(H_0,t)}
$$

et $[X,Y]$ satisfait la première partie de la définition (4.3). D'une manière similaire, en substituant θ_β par H_0, on peut montrer que

$$
[[X,Y],H_0]=\frac{\partial([X,Y],H_0)}{\partial(H_0,t)},
$$

sous la supposition qu'une expression analogue à A_1 est égale au zéro. Donc, le crochet de Poisson de deux fonctions de la première classe dans le sens (4.3) est seulement sous les conditions spéciales aussi une fonction de la première classe.

Pour montrer que $\theta_a{}^*$ et H' sont les fonctions de la première classe, il faut d'abord obtenir quelques équations auxiliaires. Puisque Λ_β est une solution particulaire du système (3.1), on a

$$[\theta_\beta \, \theta_{\beta'}] \, \Lambda_{\beta'} + [\theta_\beta, H_0] + \frac{\partial \theta_\beta}{\partial t} = 0. \tag{4.6}$$

Si, ensuite, on multiple chaque équation de ce système par Λ_β et fait la sommation, on obtient la condition suivante

$$[\theta_\beta, \, H_0] \, \Lambda_\beta + \Lambda_\beta \frac{\partial \theta_\beta}{\partial t} = 0. \tag{4.7}$$

Si au procédé précédant on prend pour les multiplicateurs $v_{a\beta}$, on va recevoir

$$[\theta_\beta, H_0] \, v_{a\beta} + v_{a\beta} \frac{\partial \theta_\beta}{\partial t} = 0. \tag{4.8}$$

A l'aide de (3.6), (4.7) et (4.8) on peut enfin montrer que les fonctions $\theta_a{}^*$ satisfont les relations

$$[\theta_a{}^*, H_0] + \frac{\partial \theta_a{}^*}{\partial t} = 0, \quad [\theta_a{}^*, \theta_\beta] = 0. \tag{4.9}$$

Maintenant passons à la preuve que les $\theta_a{}^*$ et H' sont les fonctions de la première classe dans le sens (4.3), c'est-à-dire que

$$\begin{aligned} &[\theta_a{}^*, \theta_\beta] = \frac{\partial(\theta_a{}^*, \theta_\beta)}{\partial(H_0, t)}, \quad [\theta_a{}^*, H_0] = \frac{\partial(\theta_a{}^*, H_0)}{\partial(H_0, t)}, \\ &[H', \theta_\beta] = \frac{\partial(H', \theta_\beta)}{\partial(H_0, t)}, \quad [H', H_0] = \frac{\partial(H', H_0)}{\partial(H_0, t)}. \end{aligned} \tag{4.10}$$

La preuve de cette affirmation est suivante: on développe les côtés gauches de ces équations à part des côtés droites et de cette façon on peut réduire chaque de ces conditions à une des équations auxiliaires (4.6) — (4.9).

Illustrons cela à la quatrième condition (4.10). Pour la côté gauche on obtient

$$[H', H_0] = [H_0 + \Lambda_\beta \, \theta_\beta, H_0] = \Lambda_\beta \, [\theta_\beta, H_0],$$

et pour la côté droite, d'une manière analogue

$$\frac{\partial(H', H_0)}{\partial(H_0, t)} = \frac{\partial H'}{\partial H_0} \frac{\partial H_0}{\partial t} - \frac{\partial H'}{\partial t} \frac{\partial H_0}{\partial H_0} = \frac{\partial H_0}{\partial t} - \frac{\partial H_0}{\partial t} - \Lambda_\beta \frac{\partial \theta_\beta}{\partial t} = -\Lambda_\beta \frac{\partial \theta_\beta}{\partial t}.$$

Si l'on pose les expressions reçues à la condition citée, on reçoit

$$\Lambda_\beta \, [\theta_\beta, H_0] = -\Lambda_\beta \frac{\partial \theta_\beta}{\partial t},$$

ce qui est correct à la base de l'équation auxiliaire (4.7).

A part de la classification des liaisons aux primaires et secondaires, on peut les classer d'un autre aspect aux liaisons de la première et de la deuxième classe. Les caractéristiques essentielles de cette classification sont suivantes:

1. Dans les équations du mouvement il y a juste tant des fonctions arbitraires u_a que des liaisons de la première classe. L'indétermination aux

équations du mouvement résulte, donc, des liaisons de la première classe, qui ne peut pas être évitée par la méthode habituelle des multiplicateurs.

2. Les liaisons de la deuxième classe se comportent comme les limitations ordinaires du mouvement du système, c'est pourquoi elles seulement diminuent le nombre de degrés de liberté, n'introduisant pas aux équations du mouvement aucune indétermination. Il est possible les éliminer explicitement ou par la méthode des multiplicateurs ou par l'introduction des crochets de Poisson généralisés.

Dans l'exposition suivante désignons par symbole $\theta_a=0$ $(a=1,\dots,A)$ les liaisons de la première classe et par $\theta_b=0$ $(b=1,\dots,B-A)$ celles-ci de la deuxième classe.

5. Réduction du nombre de liberté

En analysant l'influence des liaisons sur la diminuation du nombre de degrés de liberté du système, on a montré qu'il fallait examiner à part des liaisons de la deuxième classe comme des liaisons de la première. Cela amène à deux grades de la réduction du nombre de degrés de liberté, qui peuvent être faits successivement, d'après l'analogie à l'analyse de Dirac [2].

a) *Premier grade de la réduction.* Dans l'équation générale du mouvement (2.11)

$$\dot{g}=[g,H_0]+\lambda_\beta[g,\theta_\beta]+\frac{\partial g}{\partial t}$$

se trouvent $2N+1-B$ des variables de phase indépendantes, car il y a B liaisons $\theta_\beta=0$. En même temps il y en a B des multiplicateurs inconnus λ_β, ainsi il faut connaître $2N+1-B+B=2N+1$ de paramètres pour pouvoir déterminer le point représentatif dans l'espace de phase de $2N+1$ dimensions. Cela signifit que le nombre de degrés de liberté est resté le même, invariable et qu'il est N.

Après avoir déterminé des multiplicateurs λ_β, l'équation générale du mouvement se transforme en forme (3.7)

$$\dot{g}=[g,H']+u_a[g,\theta_a{}^*]+\frac{\partial g}{\partial t}. \qquad (a=1,\dots,A) \tag{5.1}$$

A cause de la présence de B liaisons, le nombre des variables indépendantes est resté le même $(2N+1-B)$, mais le nombre des variables u_a est moindre que celui des multiplicateurs λ_β, C'est pourquoi le nombre total des paramètres nécessaires pour déterminer la position du point représentatif est diminué et devient $2N+1-B+A<2N+1$. Si l'on prend le nombre de degrés de liberté comme la moitié du nombre de toutes les variables indépendantes qui déterminent l'état du système, on conclut d'après la dernière inégalité que

$$\mathcal{N}=N-\frac{1}{2}(B-A)<N. \tag{5.2}$$

Comme, d'autre par, $B-A$ présente le nombre des liaisons de la deuxième classe, on voit que le nombre de degrés de liberté diminue juste à cause de ces liaisons. Cette diminuation se peut réaliser effectivement si l'on écrit l'équation du mouvement par des fonctions de la première classe dans la forme transformée.

Donc, le premier grade de la réduction comprend l'influence des liaisons de la deuxième classe sur la diminuation du nombre de degrés de liberté. Cette réduction peut être effectuée aussi en introduisant des crochets de Poisson généralisés.

b) *Deuxième grade de la réduction.* Ce procédé diminue le nombre de degrés de liberté à compte des liaisons de la première classe. Tandis que le premier grade de la réduction toujours peut être effectué, le second se peut réaliser seulement sous les conditions spéciales.

Si aux liaisons de la première classe il y a R équations qui peuvent être résolues par rapport aux R moments conjugués et obtenues comme les fonctions des autres variables

$$p_r = f_r(q_1, \ldots, q_N, p_{N-A+1}, \ldots, p_N), \qquad (r=1, \ldots, R) \tag{5.3}$$

en introduisant ces expressions à la fonction H' et les liaisons restées $\theta_a{}^*$, on reçoit que ces équations ne contiennent plus tels moments conjugués. Si, en outre, les fonctions H' et $\theta_a{}^*$ peuvent être présentées sous la forme

$$H' = H'' + \gamma_r \theta_r{}^{**}, \quad \theta_a{}^* = \beta_{ar} \theta_r{}^{**}, \qquad \begin{pmatrix} r=1, \ldots, R \\ a=1, \ldots, A \end{pmatrix} \tag{5.4}$$

où les expressions pour H'' et $\theta_r{}^{**}$ ne contiennent pas des coordonnées généralisées q_r $(r=1, \ldots, R)$,elles peuvent apparaître seulement aux facteurs γ_r et β_{ar}, l'équation générale du mouvement obtient la forme suivante

$$\dot{g} = [g, H'' + \gamma_r \theta_r{}^{**}] + u_a [g, \beta_{ar} \theta_r{}^{**}] + \frac{\partial g}{\partial t},$$

ou plus concisement

$$\dot{g} = [g, H''] + w_r [g, \theta_r{}^{**}] + \frac{\partial g}{\partial t}, \qquad w_r = \gamma_r + u_a \beta_{ar}. \tag{5.5}$$

Parce que H'' et $\theta_r{}^{**}$ ne dépendent pas de q_r et par la substitution (5.2) on a réalisé qu'elles ne dépendent pas ni de p_r, les dérivées partielles par rapport aux cas variables s'annulent et les index dans les crochets de Poisson $[g, H'']$ et $[g, \theta_r{}^{**}]$ commencent de $i=R+1$.

Le nombre des variables indépendantes q, p et t est $2N+1-(B-A)-A$, où $B-A$ et A représentent le nombre des liaisons de la deuxième respectivemet de la première classe. Puisque dans (5.4) le nombre des variables arbitraires w_r est moindre que celui des variables u_a, le nombre total des paramètres pour déterminer la position du point représentatif est diminué par rapport au nombre des paramètres dans l'équation initiale (5.1) et égale à $2N+1-(B-A)-A+R$. Maintenant le nombre de degrés de liberté du système est

$$\mathcal{N}' = N - \frac{1}{2}[(B-A)-(A-R)], \tag{5.6}$$

d'où on peut conclure que $\mathcal{N}' < \mathcal{N}$.

Ainsi on a montré que le deuxième grade de la réduction base à la diminuation du nombre de degrés de liberté à compte des liaisons de la première classe, mais c'est possible seulement dans le cas quand les liaisons satisfont les conditions mentionnées.

6. Crochets de Poisson généralisés

Si les variables canoniques ne sont pas indépendantes, mais satisfont les relations (2.4) les crochets de Poisson classiques ne peuvent pas être utilisés qu'en négligeant cette dépendance au cours de leur évaluation et en la prenant en considération postérieurement. Pourtant, Dirac a généralisé les crochets de Poisson de telle façon que la définition même comprend en même temps l'élimination des dérivées partielles par rapport aux variables dépendantes ainsi que la conservation de la symétrie des variables libres. Par des transformations linéaires

$$\theta_\beta = a_{\beta\gamma}\,\theta_\gamma{}^*$$

passons d'abord le nombre maximum des liaisons aux liaisons de la première classe $\theta_\gamma{}^*$ et que soient des liaisons restées de la deuxième classe

$$\theta_s(q,p,t) = 0. \qquad (s = 1, \ldots S) \tag{6.1}$$

Supposons encore que les liaisons de la deuxième classe satisfont seulement la condition que le déterminant

$$\Delta = \begin{vmatrix} [\theta_1,\theta_1] & \ldots & [\theta_1,\theta_s] \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ [\theta_s,\theta_1] & \ldots & [\theta_s,\theta_s] \end{vmatrix} \tag{6.2}$$

soit différent du zéro.

Pour deux fonctions $f(q,p,t)$ et $g(q,p,t)$, dont les variables satisfont des liaisons (6.1), Dirac définit des crochets de Poisson généralisés par la relation [1]

$$[f,g]^* = [f,g] + [f,\theta_s]\, c_{ss'}\, [\theta_{s'},g], \tag{6.3}$$

où $c_{ss'}$ signifit le cofacteur réduit des éléments $[\theta_s,\theta_{s'}]$, c'est-à-dire le quotient du cofacteur correspondant et du déterminant Δ. On peut montrer que ces crochets de Dirac ont toutes les propriétés des crochets de Poisson.

Prenons comme l'exemple des fonctions et des liaisons sous la forme

$$f = f(q, \ldots q_N, p_1, \ldots, p_N), \qquad g = g(q_1 \ldots q_N, p_1, \ldots, p_N),$$
$$\theta \equiv aq_1 + bp_1 + m = 0, \qquad \theta_2 \equiv cq_1 + dp_1 + n = 0.$$

Dans ce cas le déterminant Δ aura la valeur

$$\Delta = (ad - bc)^2,$$

et après avoir calculé tous les cofacteurs, on obtient que les crochets généralisés de Poisson ont la forme explicite

$$[f,g]^* = \frac{\partial f}{\partial q_2}\frac{\partial g}{\partial p_2} - \frac{\partial f}{\partial q_2}\frac{\partial g}{\partial q_2} + \cdots + \frac{\partial f}{\partial q_N}\frac{\partial g}{\partial p_N} - \frac{\partial f}{\partial p_N}\frac{\partial g}{\partial q_N}. \tag{6.4}$$

Dans cette expression n'apparaissent pas les dérivées partielles par rapport aux variables q_1 et p_1, ainsi l'index de la sommation commence de $i = 2$.

En s'appuyant au article cité de Sudarshan et Mukunda [4], on peut étendre la conclusion de l'exemple précédent au cas général sous la condition que les liaisons forment un groupe fonctionnel. Considérons d'abord les relations de la deuxième classe (6.1), dont le nombre est pair, comme des relations qui déterminent $\frac{S}{2}$ des coordonnées généralisées et $\frac{S}{2}$ des moments conjugués par des autres variables canoniques. Alors aux crochets de Poisson généralisés n'apparaîtront pas explicitement les dérivées partielles par rapport à ces S variables dépendantes et l'index de la sommation va du $\frac{S}{2}+1$ jusqu'au N. De cette façon, par l'introduction des crochets de Poisson généralisés le nombre de liberté est réduit à $N-\frac{S}{2}$.

Dans la section précédente on a montré qu'en transformant aux fonctions de la première classe se fait d'ailleurs la réduction effective du nombre de degrés de liberté du N au $N-\frac{1}{2}(B-A)$ et que cette diminuation a été réalisée à compte de $B-A$ liaisons de la deuxième classe. De l'autre côté, en introduisant des crochets de Dirac, le nombre de degrés de liberté est diminué aussi à $N-\frac{1}{2}S$, où S est le même que $B-A$. D'après cela, de l'aspect de la réduction du nombre de degrés de liberté, on peut conclure que l'effet des fonctions de la première classe est équivalent à l'effet des crochets de Dirac.

Appliquons maintenant les crochets de Poisson généralisés à notre cas, où le temps apparaît explicitement et quand on a des liaisons de la deuxième classe qui dépendent aussi explicitement du temps

$$\theta_s(q, p, t) = 0. \tag{6.5}$$

On peut montrer que d'après la formule (6.3)

$$[g, H']^* = [g, H'] - [g, \theta_s]\, c_{ss'} \frac{\partial \theta_{s'}}{\partial t}, \qquad [g, \theta_a^{**}] = [g, \theta_a^*]$$

et quand on introduit ces expressions à l'équation générale du mouvement (3.8), elle obtient la forme suivante

$$\dot{g} = [g, H']^* + u_a [g, \theta_a^*]^* - [g, \theta_s]\, c_{ss'} \frac{\partial \theta_{s'}}{\partial t} + \frac{\partial g}{\partial t}. \tag{6.6}$$

C'est l'équation générale du mouvemen écrite à l'aide des crochets de Poisson généralisés, qui contient un nombre supplémentaire par rapport au cas quand le temps ne figure pas explicitement.

Le déterminant du système (3.1), qui détermine les multiplicateurs λ_β, a le rang $B-A$, c'est pourquoi ce système se peut réduire par des transformations équivalentes à une telle forme où les A dernières équations ne contiennent pas ces multiplicateurs. Ainsi les équations restées donnent des solutions particulières

$$\lambda_s = c_{ss'} \left([\theta_{s'}, H_0] + \frac{\partial \theta_{s'}}{\partial t} \right), \tag{6.7}$$

et si l'on introduit ces expressions à l'équation initiale (3.7), on a

$$\dot{F}\,[F, H_0] + [F, \theta_s]\, c_{ss'} \left([\theta_{s'}, H_0] + \frac{\partial \theta_{s'}}{\partial t}\right) + \frac{\partial F}{\partial t},$$

ou plus concisement, en désignant les premiers deux membres par

$$\dot{F} = [F, H_0]^{**} + \frac{\partial F}{\partial t}. \tag{6.8}$$

Cette forme de l'équation générale du mouvement ne diffère pas formellement de l'équation correspondante pour des systèmes nondégénérés.

Si l'on étend, en généralisant la notation citée, la définition des crochets de Poisson généralisés d'après Shanmugadhasan [6].

$$[f, g]^{**} = [f, g] + [f, \theta_s]\, c_{ss'} \left([\theta_{s'}, g] + \frac{\partial \theta_s}{\partial t}\right) \tag{6.9}$$

on réalise aussi l'élimination des dérivées partielles par rapport aux variables canoniques dépendantes. Pourtant, les crochets généralisés (6.9) n'ont pas les propriétés habituelles des crochets de Poisson, par exemple d'un côté on a

$$[f, g]^{**} = [f, g] + [f, \theta_s]\, c_{ss'}\, [\theta_{s'}, g] + [f, \theta_s]\, c_{ss'} \frac{\partial \theta_{s'}}{\partial t},$$

et de l'autre côté

$$[g, f]^{**} = -[f, g] - [f, \theta_s]\, c_{ss'}\, [\theta_{s'}, g] + [g, \theta_s]\, c_{ss'} \frac{\partial \theta_{s'}}{\partial t},$$

d'où on voit immédiatement que

$$[f, g]^{**} \neq -[g, f]^{**}. \tag{6.10}$$

D'une manière semblable on peut montrer que ni les autres caractéristiques de ceux-ci ne sont pas valables.

Quant à l'équation générale du mouvement, d'après la définition (6.9) on obtient

$$[g, H']^{**} = [g, H'],$$

ainsi que

$$[g, \theta_a{}^*]^{**} = [g, \theta_a{}^*] + [g, \theta_s]\, c_{ss'} \frac{\partial \theta_{s'}}{\partial t},$$

et l'équation (3.7) peut être écrite sous la forme suivante

$$\dot{g} = [g, H']^{**} + u_a\, [g, \theta_a{}^*]^{**} + u_a\, [g, \theta_s]\, c_{s's} \frac{\partial \theta_{s'}}{\partial t} + \frac{\partial g}{\partial t}. \tag{6.11}$$

Parce que les crochets généralisés (6.9) n'ont pas des propriétés habituelles des crochets de Poisson et par ceux on ne peut pas écrire l'équation générale du mouvement sans le membre supplémentaire, ils ne sont pas convenable pour le traitement des systèmes dégénérés.

BIBLIOGRAPHIE

[1] P. A. M. Dirac, *Generalized Hamiltonian dynamics*, Canad. Journ. Math. **2** (1950), 129—148.

[2] P. A. M. Dirac, *Generalized Hamiltonian dynamics*, Proc. Roy. Soc., A **246** (1958), 326—332.

[3] P. A. M. Dirac, *Lectures on quantum mechanics*, Belfer Graduate School of Science, New York 1964.

[4] N. Mukunda and E. Sudarshan, *Structure of the Dirac bracket in classical mechanics*, J. Math. Phys., **9** (1968), 413—417.

[5] J. Anderson and P. Bergmann, *Constrains in covariant field theories*, Phys. Rev., **83** (1951), 1018—1205.

[6] S Shanmugadhasan, *Generalized canonical formalism for degenerate dynamical systems*, Proc. Camb. Phil. Soc., **59** (1963), 743—757.