PUBLICATIONS DE L'INSTITUT MATHÉMATIQUE
Nouvelle série tome 10 (24), 1970. pp. 25—37.

TRANSFORMATIONS CANONIQUES DES SYSTÈMES DÉGÉNÉRÉS

Dušanka Đokić-Ristanović et Đorđe Mušicki

(Communiqué le 4 Juin 1969)

Résumé. Dans cet article on a donné l'extension systématique de la théorie des transformations canoniques aux systèmes dégénérés, en étudiant le problème direct et inverse et à cette base on a obtenu l'équation correspondante de Hamiltcn-Jacobi et les invariants différentiels et intégraux pour ce cas.

Introduction

Les systèmes dégénérés dans la mécanique analytique sont tels dont le hessian de la fonction de Lagrange par rapport aux dérivées généralisées est égale au zéro et ces systèmes sont étudiés par P. Dirac [1, 2] et S. Shanmugadhasan [3]. Cette dégénération conduit jusqu'aux certaines liaisons entre les variables canoniques et pour ce cas on a construit le formalisme canonique généralisé, qui peut être étendu aussi au cas quand le temps y apparaît explicitement [4].

Cependant, les transformations canoniques correspondentes des systèmes dégénérés jusqu'à présent n'ont pas été étudiées. Mais, en partant d'un autre point de vue, S. Lie [5, 6] a considéré les transformations canoniques formellement pareilles, avec les liaisons qui sont une conséquence des transformations eux-même et par la méthode des multiplicateurs il a obtenu la théorie correspondante.

Dans cet article on a donné l'extension systématique de la théorie des transformations canoniques aux systèmes dégénérés, en effectuant l'influence des liaisons à celles-ci. On a trouvé un système des équations déterminant ces transformations et analysé le problème inverse aussi. On a démontré que les multiplicateurs de liaisons s'annullent seulement à la base des équations de liaisons. De là on a conclu que les transformations canoniques d'un système dégénéré d'après la terminologie de Dirac sont égales faiblement aux celles-ci du système nondégénéré correspondant.

A la base des transformations canoniques on a obtenu l'équation de Hamilton-Jacobi pour les systèmes dégénérés. Enfin, on a étudié les invariants différentiels et intégraux correspondants, où sont introduites les parenthèses de Lagrange généralisées d'après l'analogie aux crochets de Dirac. Géométriquement, tous ces résultats sont valables sur une surface dans l'espace de phase, déterminée par les équations de liaison.

1. Formulation des transformations canoniques

Quand les variables q_i et p_i d'un système dégénéré sont bornées par les liaisons

$$\theta_\beta(q, p, t)=0, \qquad (\beta=1, \ldots, B) \tag{1.1}$$

appelons une transformation

$$Q_i = Q_i(q, p, t), \quad P_i = P_i(q, p, t), \quad \bar{t} = t \tag{1.2}$$

de ces variables canonique si le système des équations de Hamilton [3, p. 751]

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H_0}{\partial p_i} + \lambda_\beta \frac{\partial \theta_\beta}{\partial p_i}, \qquad \dot{p}_i = -\frac{\partial H_0}{\partial q_i} - \lambda_\beta \frac{\partial \theta_\beta}{\partial q_i}$$

passe au système de la même forme

$$\dot{Q}_i = \frac{\partial \overline{H}_0}{\partial P_i} + \bar{\lambda}_\beta \frac{\partial \overline{\theta}_\beta}{\partial P_i}, \qquad \dot{P}_i = -\frac{\partial \overline{H}_0}{\partial Q_i} - \bar{\lambda}_\beta \frac{\partial \overline{\theta}_\beta}{\partial Q_i}, \tag{1.3}$$

et si les équations (1.2) peuvent être résolues par rapport aux p_i et q_i. La condition nécessaire et suffisante pour que la transformation (1.2) soit canonique peut être trouvée d'une manière suivante. On peut obtenur ces équations de Hamilton par l'application du principe de Pfaff-Bilimović [7], en prenant pour le pfaffian

$$\Phi = p_i\, dq_i - H_T\, dt, \qquad H_T = H_0 + \lambda_\beta \theta_\beta. \tag{1.4}$$

Parce que tous les pfaffians différents d'une différentielle totale sont équivalents, il est nécessaire es suffisant que

$$[p_i\, dq_i - (H_0 + \lambda_\beta \theta_\beta)\, dt] - [P_i\, dQ_i - (\overline{H}_0 + \bar{\lambda}_\beta \overline{\theta}_\beta)\, dt] = dF, \tag{1.5}$$

où $F(q, p, t)$ est la génératrice de cette transformation. Jusqu'au même résultat on arrive aussi en partant du principe d'Hamilton sous la forme

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} [p_i\, dq_i - (H_0 + \lambda_\beta \theta_\beta)\, dt] = 0, \tag{1.6}$$

où l'intégrale d'action est étendue dans le sens d'extremum conditionnel.

On peut exprimer la génératrice F et les liaisons (1.1) en fonction des variables mixtes Q, q et t si la transormation satisfait la condition

$$\left| \frac{\partial (Q_1, \ldots, Q_N)}{\partial (p_1, \ldots, p_N)} \right| \neq 0.$$

Dans ce cas il est possible de résoudre les premières N équations par rapport aux $p_1, \ldots, p_N$ et en substituant ces expressions à la génératrice et aux liaisons, on obtient pour la génératrice

$$F[q, p(q, Q, t), t] \equiv W(q, Q, t) \tag{1.7}$$

et les équations de liaison passent à

$$\theta_\beta [q, p(q, Q, t), t] \equiv \Omega_\beta (q, Q, t) = 0. \tag{1.8}$$

Les liaisons de cette forme entre q_i et Q_i peuvent apparaître aussi comme une conséquence des transformations eux-même. Dans certains cas il est possible éliminer tous les P_i et p_i des équations (1.2) et de cette façon on obtient une ou plusieurs des liaisons entre Q_i et q_i de la forme

$$\Omega_k(q, Q, t)=0. \qquad (k=1, \ldots, K, K<N) \tag{1.9}$$

Ce cas était étudié par S. Lie, où l'on doit souligner que les or'gines des liaisons sont tout à fait différentes: les liaisons (1.8) sont une conséquence des équations (1.1), c'est-à-dire de la dégénération du système, tandis que les liaisons (1.9) sont exclusivement une conséquence des transformations canoniques (1.2).

2. Problème inverse

Le problème fondamental dans la théorie des transformations canoniques est de trouver la génératrice à la base des transformations données ainsi que les transformations même à l'aide de la génératrice. Le premier est le prcblème direct et le second le problème inverse et dans notre cas le traitement du premier, déterminé par la condition (1.5) est le même que pour les systèmes ordinaires.

Que soit donnée la génératrice $W(q, Q, t)$ et les liaisons $\Omega_\beta(q, Q, t)=0$, qui sont les conséquences de (1.1). Pour trouver le système des équations déterminant les transformations canoniques, partons de la condition (1.5) et prenons la génératrice sous la forme $W(q, Q, t)$

$$p_i\, dq_i - P_i\, dQ_i + (\overline{H}_T - H_T)\, dt = \frac{\partial W}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial W}{\partial Q_i} dQ_i + \frac{\partial W}{\partial t} dt, \tag{2.1}$$

où H_T est défini par la formule (1.4). Dans cette équation les différentielles ne sont pas indépendantes, elles satisfont les conditions

$$\frac{\partial \Omega_\beta}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial \Omega_\beta}{\partial Q_i} dQ_i + \frac{\partial \Omega_\beta}{\partial t} dt = 0, \qquad (\beta=1, \ldots, B)$$

et par l'application de la méthode des multipicateurs on obtient

$$p_i\, dq_i - P_i\, dQ_i + (\overline{H}_T - H_T)\, dt = \left(\frac{\partial W}{\partial q_i} + \mu_\beta \frac{\partial \Omega_\beta}{\partial q_i}\right) dq_i + \\ + \left(\frac{\partial W}{\partial Q_i} + \mu_\beta \frac{\partial \Omega_\beta}{\partial Q_i}\right) dQ_i + \left(\frac{\partial W}{\partial t} + \mu_\beta \frac{\partial \Omega_\beta}{\partial t}\right) dt.$$

Choisissons les μ_β de telle manière que l'on débarasse des différentielles dépendantes, après quoi il suit que cette égalité sera satisfaite seulement si les coefficients correspondants sont égaux

$$\begin{gathered} p_i = \frac{\partial W}{\partial q_i} + \mu_\beta \frac{\partial \Omega_\beta}{\partial q_i}, \qquad P_i = -\frac{\partial W}{\partial q_i} - \mu_\beta \frac{\partial \Omega_\beta}{\partial Q_i}, \\ \Omega_\beta(q, p, t)=0, \qquad \overline{H}_T = H_0 + \frac{\partial W}{\partial t} + \mu_\beta \frac{\partial \Omega_\beta}{\partial t}. \end{gathered} \tag{2.2}$$

C'est un système de $2N+B$ équations avec tout autant des inconnues (q_i, Q_i et μ_β), qui détermine toutes ces quantités sous la forme

$$Q_i = Q_i(q, p, t), \quad P_i = P_i(q, p, t), \quad \mu_\beta = \mu_\beta(q, p, t). \tag{2.3}$$

Analysons ces fonctions avec le but que l'on met en évidence la partie apparaissant comme une conséquence des liaisons. Résolvons les premières $2N$ équations du système (2.2) par rapport aux Q et q:

$$Q_i = Q_i(p, P, t), \qquad q_i = q_i(p, P, t). \tag{2.4}$$

Parce que ces liaisons ne sont pas une conséquence de ce système des équations, ce système peut être résolu inversement par rapport aux P et p:

$$P_i = P_i(q, Q, t), \qquad p_i = p_i(q, Q, t).$$

Décomposons maintenant les P_i et p_i en deux termes

$$P_i = P_{i0} + P_i', \qquad p_i = p_{i0} + p_i' \tag{2.5}$$

dont les premiers correspondent aux transformations que l'on obtient en laissant à côté les liaisons (1.7) et les seconds représentent les componentes supplémentaires à cause des liaisons. Si l'on met au système (2.2) ces expressions et l'on substitue θ_β dans les liaisons par

$$p_i = \frac{\partial W}{\partial q_i} + p_i',$$

on obtient un système des équations

$$p_i' = \mu_\beta \frac{\partial \Omega_\beta}{\partial q_i}, \quad P_i' = -\mu_\beta \frac{\partial \Omega_\beta}{\partial Q_i}, \quad \theta_\beta\left(q, \frac{\partial W}{\partial q} + p', t\right) = 0, \tag{2.6}$$

qui détermine les quantités inconnues sous la forme

$$P_i' = P_i'(Q, q, t), \quad p_i' = p_i'(Q, q, t), \quad \mu_\beta = \mu_\beta(Q, q, t).$$

Exprimons maintenant les multiplicateurs μ_β comme les combinaisons linéaires des fonctions Ω_β:

$$\mu_\beta = a_{\beta\gamma}(Q, q, t)\, \Omega_\gamma(Q, q, t). \tag{2.7}$$

Dans le cas général les coefficients $a_{\beta\gamma}$ ne sont pas déterminés uniquement et choisissons ceux de telle façon qu'ils restent finis pour $\Omega_\beta = 0$. A l'aide de (1.8) on peut représenter les multiplicateurs μ_β sous la forme

$$\mu_\beta = a_{\beta\gamma}(q, p, t)\, \theta_\gamma(q, p, t) \tag{2.8}$$

d'où il suit que les multiplicateurs μ_β sont telles fonctions des variables q, p et t qui ne s'annulent pas identiquement, mais à la base des équations de liaison deviennent égales au zéro. D'après la términologie de Dirac on nomme les équations de ce type faibles et on les désigne par le symbole $\approx$

$$\mu_\beta(q, p, t) \approx 0, \tag{2.9}$$

et le système (2.2) se réduit à

$$p_i \approx \frac{\partial W}{\partial q_i}, \qquad P_i \approx -\frac{\partial W}{\partial Q_i}, \qquad \bar{\bar{H}}_T \approx H_T + \frac{\partial W}{\partial t}. \tag{2.10}$$

Donc, les transformations canoniques d'un système dégénéré sont égales faiblement dans le sens de Dirac aux transformations canoniques du système nondégénéré correspondant, que l'on obtient en laissant les liaisons à côté.

Exemple. Illustrons ces conclusions par un exemple des transformations et liaisons linéaires. Que soit donnée la génératrice

$$W = \frac{1}{2} q_1^2 + \frac{1}{2} q_2^2 + \frac{1}{2} Q_1^2 + \frac{1}{2} Q_2^2 + 2 q_1 q_2 + q_1 Q_1 + 2 Q_1 Q_2 +$$
$$+ 3 q_2 Q_1 + q_2 Q_2 + 2 Q_1 Q_2$$

et les liaisons

$$\Omega_1 (q, Q) \equiv q_1 + 4 q_2 - Q_1 + 3 Q_2 = 0, \qquad \Omega_2 (q, Q) \equiv 5 q_1 - q_2 + 5 Q_1 = 0,$$

qui sont une conséquence de

$$\theta_1 (q, p) \equiv q_1 + q_2 + 2 p_1 - p_2 = 0, \qquad \theta_2 (q, p) \equiv 2 q_1 - q_2 - p_1 + 2 p_2 = 0.$$

Les premières $2N$ équations du système (2.6) pour ce cas sont

$$p_1' = \mu_1 + 5 \mu_2, \qquad p_2' = 4 \mu_1 - \mu_2,$$
$$P_1' = \mu_1 - 5 \mu_2, \qquad P_2' = -3 \mu_1.$$

Parce que

$$\theta_1 \left(q, \frac{\partial W}{\partial q} + p', t\right) \equiv q_1 + q_2 + 2 \left(\frac{\partial W}{\partial q_1} + p_1'\right) - \left(\frac{\partial W}{\partial q_2} + p_2'\right),$$
$$\theta_2 \left(q, \frac{\partial W}{\partial q} + p', t\right) \equiv 2 q_1 - q_2 - \left(\frac{\partial W}{\partial q_1} + p_1'\right) + 2 \left(\frac{\partial W}{\partial q_2} + p_2'\right),$$

les dernières équations (2.6) ont la forme

$$q_1 + 4 q_2 - Q_1 + 3 Q_2 + 2 p_1' - p_2' = 0, \qquad 5 q_1 - q_2 + 5 Q_1 - p_1' + 2 p_2' = 0.$$

Si l'on résolve ces équations par rapport aux p_1' et p_2' et les substitue dans les équations précédentes, on obtient

$$\mu_1 = -\frac{1}{63}(25 q_1 + 16 q_2 + 15 Q_1 + 15 Q_2), \qquad \mu_2 = -\frac{1}{63}(17 q_1 + 26 q_2 + 3 Q_1 + 21 Q_2).$$

Représentons ces multiplicateurs sous la forme

$$\mu_1 = a_{11} \Omega_1 + a_{12} \Omega_2, \qquad \mu_2 = a_{21} \Omega_1 + a_{22} \Omega_2$$

et les posons aux expressions citées pour μ_1 et μ_2. La condition que ce réduit aux identités donne

$$a_{11} = -\frac{5}{63}, \qquad a_{12} = -\frac{4}{63}, \qquad a_{21} = -\frac{7}{63}, \qquad a_{22} = -\frac{2}{63},$$

d'où l'on voit que ces multiplicateurs sont vraiment les combinaisons linéaires des liaisons et il suit

$$\mu_1 \approx 0, \qquad \mu_2 \approx 0;$$

$$p_1' \approx 0, \quad p_2' \approx 0, \qquad P_1' \approx 0, \quad P_2' \approx 0.$$

Alors, les tansformations canoniques sont déterminées par le système (2.3) sans les termes derniers

$$p_1 \approx \frac{\partial W}{\partial q_1} = q_1 + 2\, q_2 + Q_1 + 2\, Q_2, \qquad p_2 \approx \frac{\partial W}{\partial q_2} = 2\, q_1 + q_2 + 3\, Q_1 + Q_2,$$

$$P_1 \approx -\frac{\partial W}{\partial Q_1} = -Q_1 - q_1 - 3\, q_2 - 2\, Q_2, \qquad P_2 \approx -\frac{\partial W}{\partial Q_2} = -Q_2 - 2\, q_1 - q_2 - 2\, Q_1$$

et en résolvant ce système par rapport aux Q et P, on obtient les transformations canoniques correspondantes.

3. Comparaison au cas de S.Lie

Retenons nous aux liaisons de S.Lie $\Omega_k(q, Q, t) = 0$, qui sont une conséquence des transformations canoniques eux-même. Le système des équations qui détermine cette transformation est analogue à (2.3) et formellement a la même forme

$$(3.1) \qquad p_i = \frac{\partial W}{\partial q_i} + \eta_k \frac{\partial \Omega_k}{\partial Q_i}, \qquad P_i = -\frac{\partial W}{\partial Q_i} - \eta_k \frac{\partial \Omega_k}{\partial Q_i};$$
$$\Omega_k(q, Q, t) = 0, \qquad (k = 1, \ldots, K)$$

d'où l'on peut trouver $2N$ fonctions Q et P et K multiplicateurs η_k

$$(3.2) \qquad Q_i = Q_i(q, p, t), \quad P_i = P_i(q, p, t), \quad \eta_k = \eta_k(q, p, t).$$

En comparant les systèmes (3.1) et (2.2), on peut remarquer les différences suivantes:

a) A l'aide des transformations (2.10) les liaisons $\Omega_\beta(q, Q, t) = 0$ passent à (1.1). Cependant, les liaisons de S.Lie $\Omega_k = 0$ n'amènent pas aux équations de la forme (1.1), car si l'on y substitue les fonctions (3.2), qui sont juste les résolutions de ce système, on obtient les identités

$$(3.3) \qquad \Omega_k[q, Q(q, p, t), t] \equiv 0.$$

b) En résolvant les premières $2N$ équations du système (3.2) par rapport aux q_i et Q_i, on arrive à

$$q_i = q_i(p, P, t), \quad Q_i = Q_i(p, P, t),$$

et parce que entre les fonctions q_i et Q_i existent les relations $\Omega_k(q, Q, t) = 0$, le déterminant fonctionnel correspondant doit être égal au zéro

$$(3.4) \qquad \Delta \equiv \left| \frac{\partial(Q, q)}{\partial(P, p)} \right| = 0.$$

Dans ce cas l'inversion de ces équations et impossible, au contraire au notre cas où $\Delta \neq 0$, et de cette raison ce déterminant nous offre un critérium d'après quoi on peut distinguer les transformations canoniques des systèmes dégénérés de celles-ci de S. Lie.

c) Pour les multiplicateurs η_k, déterminés par le système (3.1) on obtient les fonctions que l'on ne peut pas exprimer par des variables q, Q et t à cause de (3.4) ainsi que ni sous la forme des combinaisons linéaires des Ω_k. Donc, les multiplicateurs η_k ne deviennent pas égaux au zéro ni à l'aide des liaisons

$$\eta_k \neq 0 \tag{3.5}$$

et les transformations canoniques ne se réduisent pas aux celles-ci du système nondégénéré correspondant.

Exemple. Considérons une transformation des variables canoniques de la forme

$$Q = 1 - q, \qquad P = 1 - p - 2q.$$

Parce que

$$p\, dq - P\, dQ = d(q - q^2),$$

on conclut que cette transformation est canonique et la génératrice est

$$W = q - q^2 = qQ.$$

La liaison résulte directement de la première équation

$$\Omega_k(q,\ Q) \equiv Q + q - 1 = 0$$

et le système (3.1) dans ce cas a la forme

$$p = 1 - 2q + \eta, \quad P = -\eta, \quad Q + q - 1 = 0,$$

d'où l'on obtient les transformations canoniques correspondantes. A la base de ces formules la liaison passe à l'identité et le multiplicateur η ne peut être réduit au zéro.

4. Méthode de Hamilton-Jacobi

Comme il est connu, après avoir déterminer les multiplicateurs λ_β, les équations de Hamilton peuvent être transformées à la forme [4, p.]

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H'}{\partial p_i} + u_a \frac{\partial \theta_a^*}{\partial p_i}, \qquad \dot{p}_i = -\frac{\partial H'}{\partial q_i} - u_a \frac{\partial \theta_a^*}{\partial q_i}, \tag{4.1}$$

où H' et θ_a^* sont définis par

$$H' = H_0 + \Lambda_\beta \theta_\beta, \qquad \theta_a^* = V_{a\beta} \theta_\beta \tag{4.2}$$

et les fonctions u_a sont tout à fait arbitraires. En introduisant la fonction effective de Hamilton

$$H_T = H' + u_a \theta_a^*,$$

on peut écrire les équations précédentes sous la forme concise

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H_T}{\partial p_i}, \qquad \dot{p}_i = -\frac{\partial H_T}{\partial q_i}. \tag{4.3}$$

Pour voir le sens de H_T, posons au lieu de H' et θ_a^* leurs expressions

$$H_T = H_0 + \Lambda_\beta \theta_\beta + u_a V_{a\beta} \theta_\beta = H_0 + (\Lambda_\beta + u_a V_{a\beta}) \theta_\beta$$

et puisque $\lambda_\beta = \Lambda_\beta + u_a V_{a\beta}$, il suit

$$H_T = H_0 + \lambda_\beta \theta_\beta, \tag{4.4}$$

c'est-à-dire H_T est une combinaison linéaire de toutes les liaisons.

En liant les équations de Hamilton aux transformations canoniques, on peut obtenir l'équation correspondante de Hamilton-Jacobi d'une manière suivante. Choisissons la génératrice W, que nous désignons par le symbole habituel S, de telle façon que $\overline{H}_T$ soit égale identiquement au zéro

$$\overline{H}_T = 0. \tag{4.5}$$

Alors les équations de Hamilton dans les variables nouvelles

$$\dot{Q} = \frac{\partial \overline{H}_T}{\partial P_i}, \qquad \dot{P}_i = -\frac{\partial \overline{H}_T}{\partial Q_i}$$

donnent que les Q_i et P_i sont les constantes du mouvement

$$Q_i = \alpha_i, \quad P_i = \beta_i. \tag{4.6}$$

La dernière des formules (2.10) à cause de la condition se réduit à

$$\overline{H}_T = H_T + \frac{\partial S}{\partial t} = 0.$$

Si l'on y pose l'expression explicite pour H_T et l'on substitue p_i d'après (2.10) par $\dfrac{\partial S}{\partial q_i}$, cette équation obtient la forme

$$H'\left(q, \frac{\partial S}{\partial q}, t\right) + \frac{\partial S}{\partial t} + u_a \theta_a^*\left(q, \frac{\partial S}{\partial q}, t\right) = 0, \tag{4.7}$$

qui représente l'équation de Hamilton-Jacobi pour les systèmes dégénérés. Cette équation était citée par Shanmugadhasan [3. p. 755], mais sans aucune preuve. Parce que les fonctions u_a sont tout à fait arbitraires, celle-ci est équivalente au système des équations

$$H'\left(q, \frac{\partial S}{\partial q}, t\right) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0, \qquad \theta_a^*\left(q, \frac{\partial S}{\partial q}, t\right) = 0. \tag{4.8}$$

Trouvons d'une manière quelconque une intégrale complète de ces équations sous la forme habituelle

$$S = S(q_1, \ldots, q_N, \alpha_1, \ldots, \alpha_N, t),$$

qui contient N constantes arbitraires, identifiées aux P_i. Si l'on pose cette fonction aux formules (2.10), on obtient un système des équations

$$\frac{\partial S(q, \alpha, t)}{\partial q_i} = p_i, \qquad \frac{\partial S(q, \alpha, t)}{\partial \alpha_i} = \beta_i, \tag{4.9}$$

dont la résolution algébrique par rapport aux q_i et p_i donne les variables canoniques comme les fonctions du temps.

5. Parenthèses de Lagrange généralisées

Quand les variables canoniques sont les fonctions indépendantes de deux paramètres

$$q_i = q_i(u, v), \qquad p_i = p_i(u, v), \tag{5.1}$$

la parenthèse habituelle de Lagrange est définie par

$$(u, v) = \frac{\partial q_i}{\partial u}\frac{\partial p_i}{\partial v} - \frac{\partial q_i}{\partial v}\frac{\partial p_i}{\partial u}. \tag{5.2}$$

Cependant, si les variables q_i et p_i à cause de la dégénération du système sont bornées par des liaisons

$$\theta_s(q, p, t) = 0, \qquad (s = 1, \ldots, S) \tag{5.3}$$

la parenthèse de Lagrange, ainsi que le crochet de Poisson, a le sens seulement si pendant leur évaluation on considère les variables canoniques indépendantes et alors on prend en compte les liaisons citées.

Dans le cas considéré on peut introduire la parenthèse de Lagrange plus générale, d'après l'analogie au crochets de Poisson correspondants sous la forme de Dirac [1, p. 139]. Cette généralisation sera effectuée de telle façon que l'on élimine les dérivées partielles des fonctions dépendantes q_i et p_i et en même temps on retient la symétrie des variables canoniques. Supposons seulement que les liaisons (5.3) sont indépendantes et que le déterminant

$$D = \begin{vmatrix} (\theta_1, \theta_1) & \cdots & (\theta_1, \theta_s) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ (\theta_s, \theta_1) & \cdots & (\theta_s, \theta_s) \end{vmatrix} \tag{5.4}$$

formé des parethèses de Lagrange est différent du zéro.

Ce déterminant a des propriétés suivantes: 1) il est antisymétrique et puisque $D = 0$, S doit être un nombre pair, 2) si l'on introduit le cofacteur réduit $d_{ss'}$, c'est-à-dire le quotient du cofacteur correspondant et le déterminant D, il sera aussi antisymétrique $d_{ss'} = -d_{s's}$, 3) entre les cofacteurs réduits et les fonctions de liaison existent la relation $d_{ss'}(\theta_{s'}, \theta_{s''}) = \delta_{s's''}$.

Définissons maintenant la parenthèse de Lagrange généralisée par la formule

$$(u, v)^* = (u, v) + (u, \theta_s)\, d_{ss'}(\theta_{s'}, v). \tag{5.5}$$

Cette expression a la même forme que les crochets de Dirac et les propriétés similaires à celles-ci de (5.2). Par exemple, si l'on écrit

$$(u, v)^* = (u, v) + (v, \theta_s)\, d_{ss'}(\theta_{s'}, u) = -(u, v) - (u, \theta_{s'})\, d_{s's}(\theta_s, v),$$

il suit que pour cette parenthèse généralisée vaut

$$(u, v)^* = -(v, u)^*.$$

Considérons un cas spécial, quand il y a deux liaisons linéaires entre q_N et p_N

$$\begin{aligned} \theta_1(q, p, t) &\equiv a q_N + b p_N + c = 0, \\ \theta_2(q, p, t) &\equiv d q_N + e p_N + f = 0. \end{aligned} \tag{5.6}$$

On peut résoudre ces équations par rapport aux q_N et p_N

$$q_N = \frac{d}{ad-bc}\,\theta_1 - \frac{b}{ad-bc}\,\theta_2 + K \equiv A\,\theta_1 + B\,\theta_2 + K,$$

$$p_N = -\frac{c}{ad-bc}\,\theta_1 + \frac{a}{ad-bc}\,\theta_2 + L \equiv E\,\theta_1 + G\,\theta_2 + L,$$

et les éléments nécessaires pour évaluer $(u, v)^*$ sont suivants

$$D = \frac{1}{(ad-bc)^2}, \qquad (\theta_1, \theta_2) = \frac{1}{ad-bc},$$

$$(u, \theta_1) = E\frac{\partial q_N}{\partial u} - A\frac{\partial p_N}{\partial u}, \qquad (\theta_1, v) = A\frac{\partial p_N}{\partial v} - E\frac{\partial q_N}{\partial v},$$

etc. En développant la parenthèse de Lagrange généralisée et en substituant les expressions citées, on obtient

$$(u, v)^* = (u, v) - \frac{1}{D}\,\frac{1}{(ad-bc)^2}\left(\frac{\partial q_N}{\partial u}\,\frac{\partial p_N}{\partial v} - \frac{\partial q_N}{\partial v}\,\frac{\partial p_N}{\partial u}\right),$$

qui se réduit à

$$(5.7) \qquad (u, v)^* = \frac{\partial q_1}{\partial u}\,\frac{\partial p_1}{\partial v} - \frac{\partial q_1}{\partial v}\,\frac{\partial p_1}{\partial u} + \dots + \frac{\partial q_{N-1}}{\partial u}\,\frac{\partial p_{N-1}}{\partial v} - \frac{\partial q_{N-1}}{\partial v}\,\frac{\partial p_{N-1}}{\partial u}.$$

De là on voit que dans la parenthèse de Lagrange correspondante ne figurent pas explicitement les dérivées partielles de q_N et p_N, donc l'index de la sommation va de $i=1$ jusqu'à $i=N-1$.

En s'appuyant à un article de Sudarshan et Mukunda concernant les crochets de Dirac [8] et à la liaison entre les crochets de Poisson et les parenthèses de Lagrange, on peut généraliser la conclusion citée au cas général sous la condition que les liaisons forment un groupe fonctionnel. S'il existe S liaisons, considérons ces équations comme des relations qui définissent $\frac{S}{2}$ dernières coordinnées généralisées et $\frac{S}{2}$ moments conjugués correspondants. Alors, parce que les autres variables canoniques $q_1, \dots, q_{N-\frac{S}{2}}, p_1, \dots, p_{N-\frac{S}{2}}$ ne dépendent pas explicitement des fonctions θ_s, les parenthèses de Lagrange $(\theta_s, \theta_{s'})$ figurant dans le déterminant D contiendront effectivement seulement les dérivées des fonctions $q_{N-\frac{S}{2}+s}, \dots, q_N, p_{N-\frac{S}{2}+s}, \dots, p_N$ et juste celles-ci disparaissent dans le résultat final. C'est pourquoi dans la parenthèse de Lagrange généralisée l'index de la sommation va seulement de $i=1$ jusqu'à $i=N-\frac{S}{2}$.

6. Invariants différentiels et intégraux

Quand il s'agit des systèmes habituels, on peut exprimer la condition nécessaire et suffisante pour que la transformation soit canonique à l'aide des parenthèses de Lagrange. Si l'on part de la condition (1.5) et l'on y pose

$$dQ_i = \frac{\partial Q_i}{\partial q_k} dq_k + \frac{\partial Q_i}{\partial p_k} dp_k + \frac{\partial Q_i}{\partial t} dt$$

celle-ci obtient une forme différentielle dans les variables primaires

$$M_k dq_k + N_k dp_k + Rdt = dF, \tag{6.1}$$

où M_k, N_k et R représentent les coefficients correspondants. S'il applique les conditions que cette expression soit une différentielle totale, après leur développement on reçoit

$$(q_j, q_k) = \frac{\partial p_j}{\partial q_k} - \frac{\partial p_k}{\partial q_j}, \quad (p_j, p_k) = 0, \quad (q_k, p_j) = \frac{\partial p_k}{\partial p_j}.$$

Parce que ce procédé est basé seulement sur les propriétés des différentielles totales, et les variables canoniques ne dépendent pas explicitement les unes des autres, ces résultats restent valables aussi pour les systèmes dégénérés et se réduisent à la forme habituelle

$$(q_j, q_k) = (p_j, p_k) = 0, \quad (q_j, p_k) = \delta_{jk}, \quad \theta_\beta(q, p, t) = 0. \tag{6.2}$$

Ces conditions peuvent être écrites à l'aide des parenthèses de Lagrange généralisées aussi. Si l'on part des équations d'Hamilton transformées, au lieu de la condition (1.5) on a

$$[p_i dq_i - (H' + u_a \theta_a^*) dt] - [P_i dQ_i - (\bar{H}' + \bar{u}_a \bar{\theta}_a^*) dt] = dF. \tag{6.3}$$

D'autre part, en introduisant les fonctions de la première classe (H' et θ_a^*) dans l' équation du mouvement, on a effectué une réduction effective du nombre de degrés de liberté à compte des fonctions de la deuxième classe $\theta_s = 0$ ($s = 1, \ldots, S$), ainsi que ce nombre est réduit à $N - \frac{S}{2}$. C'est équivalent au passage des parenthèses de Lagrange ordinaires aux celles-ci généralisées, où l'index de la sommation va de $i = 1$ jusqu'à $i = N - \frac{S}{2}$ et les conditions (6.2) passent à

$$(q_j, q_k)^* = (p_j, p_k)^* = 0, \quad (q_j, p_k)^* = \delta_{jk}, \quad \theta_a^*(q, p, t) = 0. \tag{6.4}$$

D'après l'analogie au preuve de la relation entre la parenthèse de Lagrange et le crochet de Poisson, en tenant compte que dans les parenthèses et les crochets généralisés l'index va aussi de $i = 1$ jusqu'à $i = N - \frac{S}{2}$, on conclut que

$$(u_i, u_\alpha)^* [u_k, u_\alpha]^* = \delta_{ik}. \tag{6.5}$$

A la base de cette relation les conditions citées peuvent être formulées à l'aide des crochets de Poisson aussi, ordinaires ou généralisés, par exemple

$$(6.6)\qquad [q_j,\ q_k]^* = [p_j,\ p_k]^* = 0, \quad [q_j,\ p_k]^* = \delta_{jk}, \quad \theta_a^* (q,\ p,\ t) = 0.$$

Pour étudier l'invariance des expressions citées, on peut effectuer le même procédé que dans le cas habituel. Ainsi, si l'on transforme les dérivées partielles de la fonction g, on a

$$[f,\ g]_{q,p} = \frac{\partial g}{\partial Q_k}[f,\ Q_k]_{q,p} + \frac{\partial g}{\partial P_k}[f,\ P_k]_{q,p},$$

et après avoir réduit ces crochets de Poisson aux crochets élémentaires, on obtient

$$(6.7)\qquad [f,\ g]_{q,p} = [f,\ g]_{Q,P}.$$

D'une manière similaire, on peut démontrer que

$$(6.8)\qquad (u,\ v)_{q,p} = (u,\ v)_{Q,P},$$

c'est-à-dire les crochets de Poisson et les parenthèses de Lagrange sont invariants pour les systèmes dégénérés aussi.

Quant à des expressions correspondantes généralisées

$$[f,\ g]^* = [f,\ g] + [f,\ \theta_s]\, c_{ss'}\, [\theta_{s'},\ g],$$

$$(u,\ v)^* = (u,\ v) + (u,\ \theta_s)\, d_{ss'}\, (\theta_{s'},\ v),$$

le cofacteurs réduits $c_{ss'}$ et $d_{ss'}$ sont représentés à l'aide des déterminants dont tous les éléments sont les crochets de Poisson respectivement les parenthèses de Lagrange. Parce que ceux-ci sont invariants, tous les coefficients $c_{ss'}$ et $d_{ss'}$ restent invariants aussi, d'où il suit

$$(6.9)\qquad [f,\ g]^*_{q,p} = [f,\ g]^*_{Q,P}, \quad (u,\ v)^*_{q,p} = (u,\ v)^*_{Q,P}.$$

Cependant, les crochets généralisés de Shanmugadhasan [3, p. 753]

$$[f,\ g]^* = [f,\ g] + [f,\ \theta_s]\, c_{ss'} \left([\theta_{s'},\ g] + \frac{\partial \theta_{s'}}{\partial t}\right)$$

à cause du terme supplémentaire $\dfrac{\partial \theta_{s'}}{\partial t}$ ne sont pas invariants, ce qui affirme encore une fois la nonconvenance de ces crochets.

Pour trouver les invariant intégraux correspondants, partons de la variation d'action

$$W = \int_{t_1}^{t_2} (\dot{q}_i\, p_i - H_0)\, dt$$

pour les systèmes dégénérés et appliquons la méthode d'extremum conditionnel d'une fonctionnelle, d'où il suit

$$(6.10)\qquad \delta W = [p_i\, \delta q_i - H_T\, \delta t]_0^1, \quad H_T = H_0 + \lambda_\beta\, \theta_\beta.$$

Faisons maintenant l'intégration sur la surface dans l'espace de phase, déterminée par les équations de liaison, de $2N+1-B$ dimensions. En l'effectuant le long des courbes C_0 et C_1 enveloppant le manteau des trajectoires, d'une façon similaire que pour systèmes habituels on obtient

$$\oint_{C_0} (p_i \,\delta q_i - H_T \,\delta t) = \oint_{C_1} (p_i \,\delta q_i - H_T \,\delta t).$$

De là on voit que l'intégrale curviligne

$$J = \oint_{C} (p_i \,\delta q_i - H_T \,\delta t) \tag{6.11}$$

représente l'intégrale correspondante de Poincaré-Cartan pour les systèmes dégénérés.

En intégrant la condition nécessaire et suffisante (1.5) le long d'une courbe C, à cause de $\oint \delta F = 0$ on reçoit

$$\oint_{C} (p_i \,\delta q_i - H_T \,\delta t) = \oint_{\bar{C}} (P_i \,\delta Q_i - \bar{H}_T \,\delta t),$$

où $\bar{C}$ est la courbe correspondante dans l'espace de phase transformé. Cette équation peut être écrite

$$J_{(\bar{C})} = J_{(C)}, \tag{6.12}$$

c'est-à-dire l'intégrale de Poincaré-Cartan dans le cas considéré est un invariant des transformations canoniques aussi.

D'une manière analogue et usuelle en mécanique analytique, on peut introduire tous les invariants intégraux d'ordre supérieur, en substituant la fonction d'Hamilton H par H_T et en faisant calcul dans la surface citée dans l'espace de phase.

BIBLIOGRAPHIE

[1] P. A. M. Dirac, *Generalized Hamiltonian dynamics*, Canad. J. Math., 2 (1950), 129—148.

[2] P. A. M. Dirac, *Generalized Hamiltonian dynamics*, Proc. Roy. Soc. A 246 (1958), 326—332.

[3] S. Shanmugadhasan, *Generalized canonical formalism for degenerate dynamical systems*, Proc. Camb. Phil. Soc., 59 (1963), 743—757.

[4] D. Đokić-Ristanović et Đ. Mušicki, *Sur le formalisme canonique pour les systèmes dégénérés*, Publ. Inst. Math. (Beograd), 10 (24) (1970), 38—50.

[5] S. Lie, *Die Strörungstheorie und die Berührungstransformationen*, Arch. for Math., 2 (1877), 129—156.

[6] E. Whittaker, *A treatise on the analytical dynamics of particles and rigid bodies*, Cambridge, 1952.

[7] А. Билимовић, *Пфафов ошшѿи ӣринциӣ механике*, Глас САН (Београд), 95 (1946), 119—152.

[8] N. Mukunda and E. Sudarshan, *Structure of the Dirac bracket in classical mechanics*, J. Math. Phys., 9 (1968), 413—417.