PUBLICATIONS DE L'INSTITUT MATHÉMATIQUE
Nouvelle série, tome 10 (24), 1970. pp. 21—23

METHODE A RESOUDRE DES RELATIONS DONT LES RESOLUTIONS APPARTIENNENT A UN ENSEMBLE FINI

Coriolan Ghilezan

(Communiqué le 7 Mai 1969)

Dans son travail [1] S. Prešić a offert une méthode à résoudre des équations dont la résolution appartient à un ensemble fini donné. Dans ce travail-ci je vais étendre cette même méthode sur la résolution des relations.

Soit $S=\{s_1, s_2, \ldots, s_l\}$ un ensemble fini donné. Soit

$$J=S\to E$$

où $E\supseteq\{0, 1\}$.

Posons maintenant le problème de la résolution des relations

(1) $$J(x)\in D \qquad \text{(c'est-à-dire l'ensemble } J^{-1}(D))$$

où $D\subseteq E$.

La fonction résolvante $\mathcal{A}$

$$(\mathcal{A}(q, U_1, U_2, \ldots, U_{l-1})\in S, U_i\in E, q\in S)$$

nous définissons comme

(2) $$\begin{gathered}\mathcal{A}(q, k, U_2, U_3, \ldots, U_{l-1})=q\\ \mathcal{A}(q, u_1, k, U_3, \ldots, U_{l-1})=\alpha q\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \mathcal{A}(q, u_1, u_2, u_3, \ldots, k)=\alpha^{l-2} q\\ \mathcal{A}(q, u_1, u_2, u_3, \ldots, u_{l-1})=\alpha^{l-1} q\end{gathered}$$

où $k\in D, u_i\notin D;\quad u_i,\ U_i\in E,\quad q\in S$ et où

$$\alpha: S\to S$$

représente l'application (le cycle) suivante:

$$\alpha=\begin{pmatrix}s_1, s_2, \ldots, s_l\\ s_2, s_3, \ldots\ s_1\end{pmatrix}, \quad (\alpha\, s_i=s_{i+1}, \quad \alpha\, s_l=s_1).$$

Lemme. *Si l'ensemble est $J^{-1}(D)$ non vide, il vient*

(3) $$J^{-1}(D) = \{\mathcal{A}(q, J(q), J(\alpha q), \ldots, J(\alpha^{l-2} q))/q \in S\}.$$

Soit $q \in S$. Observons la suite

$$J(q), J(\alpha q), \ldots, J(\alpha^{l-2} q)$$

et son premier membre, qui appartient à l'ensemble D.

Soit

$$J(\alpha^i q) \in D.$$

D'après (2) et (3) nous obtenons $x = \alpha^i q$ ce qui représente la résolution de la relation (1).

Soit donc x la résolution de la relation (1). Si dans le (3) nous substituons x à q, d'après (2), nous obtenons

$$\mathcal{A}(x, J(x), \ldots, J(\alpha^{l-2} x)) = x.$$

La formule explicite de la fonction $\mathcal{A}$.

Les opérations binaires $+$ et $\cdot$ de l'ensemble $S \cup E$ ont les mêmes propriétés que celles de l'article [1]; tandis que les applications $'$ et $-$ de l'ensemble $S \cup E$ dans le même ensemble, nous allons substituer par les applications $*$ et Δ comme il suit

$$x^* = \begin{cases} 0, & \text{si } x \in D \\ 1, & \text{si } x \notin D, \end{cases}$$

$$x^\Delta = \begin{cases} 1, & \text{si } x \in D \\ 0, & \text{si } x \notin D. \end{cases}$$

Alors la formule explicite de la fonction $\mathcal{A}$ est:

(4) $$\begin{aligned} &\mathcal{A}(q, U_1, U_2, \ldots, U_{l-1}) = U_1^\Delta q + U_1^* U_2^\Delta (\alpha q) + U_1^* U_2^* U_3^\Delta (\alpha^2 q) + \cdots \\ &\cdots + U_1^* U_2^* \cdots U_{l-2}^* U_{l-1}^\Delta (\alpha^{l-2} q) + U_1^* U_2^* \cdots U_{l-1}^* (\alpha^{l-1} q). \end{aligned}$$

Exemple. Soit $L_3 = \left\{0, \frac{1}{2}, 1\right\}$, tandis que E un ensemble de nombres réels, et aussi $+$ et $\cdot$ d'opérations arithmétiques ordinaires. Soient $x^0, x^{\frac{1}{2}} x^1$ des fonctions définies par

$$x^i = \begin{cases} 1, & \text{si } x = i \\ 0, & \text{si } x \neq i, x, i \in L_3. \end{cases}$$

Soit $J(x) \in D$ l'inéquation suivante

(5) $$a_0 x^0 + a_{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}} + a_1 x^1 \leq 0$$

où $a_i \in E$ et $x \in L_3$.

L'inéquation (5) est possible si et seulement s'il existe au moins un coefficient a_i ainsi que $a_i \leqslant 0$.

D'après

$$J(x) = \sum_{i \in L_3} a_i x^i, \quad J^*(x) = \sum_{i \in L_3} a_i^* x^i, \quad J^\Delta(x) = \sum_{i \in L_3} a_i^\Delta x^i;$$

$$a_i^\Delta = [a_i \leqslant 0] = \begin{cases} 1, & \text{si } a_i \leqslant 0 \\ 0, & \text{si } a > 0, \end{cases}$$

$$a_i^* = \overline{[a_i \leqslant 0]} = \begin{cases} 0, & \text{si } a_i \leqslant 0 \\ 1, & \text{si } a_i > 0, \end{cases}$$

et aussi d'après le (2) et le (4) la résolution générale de l'inéquation (5) est déterminée par la formule

$$x = \left(\frac{1}{2} \overline{[a_0 \leqslant 0]} [a_{\frac{1}{2}} \leqslant 0] + \overline{[a_0 \leqslant 0]}\, \overline{[a_{\frac{1}{2}} \leqslant 0]} \right) q^0 +$$

$$+ \frac{1}{2} [a_{\frac{1}{2}} \leqslant 0] + \overline{[a_{\frac{1}{2}} \leqslant 0]} [a_1 \leqslant 0] \Big) q^{\frac{1}{2}} +$$

$$+ \left(\frac{1}{2} \overline{[a_1 \leqslant 0]}\, \overline{[a_0 \leqslant 0]} + [a_1 \leqslant 0] \right) q^1$$

où q représente un élément n'importe quel de l'ensemble $\left\{0, \frac{1}{2}, 1\right\}$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] S. B. Prešić, *Une méthode de résolution des équations dont toutes les solutions apartiennent à un ensemble fini donné* (sous presse).

[2] P. L. Ivănescu, *System of Pseudo-Boolean Equations and Inequalities.* Bull. Acad. Polon, Sci. Cl. III. 12. 1964.

[3] Gr. C. Moisil, *Sur la logique à trois valeurs de Lukasiewicz,* Acta logica, 1962, 5, 103.

[4] S. Rudeanu, *Irredundat Solutions of Boolean and Pseudo-Boolean,* Rev. Roumaine Math. Pures et Appl., 11, 1966.