PUBLICATIONS DE L'INSTITUT MATHÉMATIQUE
Nouvelle série, tome 10 (24), 1970, pp. 199—202

АБСОЛЮТНЫЙ ИНТЕГРАЛ ТЕНЗОРА

Велько А. Вуйичич

(Сообщено 20. марта 1970)

Абсолютный дифференциал тензора применяется в геометрии, в физике, и особенно в механике, так как ускорение механической системы точек абсолютная производная вектора скорости по времени. Дифференциальные уравнения геодезической и дифференцуальные уравнения движения механической системы точек выражаем помощу абсолютной производной вектора. Между тем, если понадобится интегрировать дифференциальные соотношения, в которых фигурируют абсолютные дифференциалы вектора или тензора, вместо координат абсолютного дифференциала тензора берутся обичные дифференциалы координат данного тензора и дополнительные члены с участием объекта связаности. Сколько мы знаем в тензорном исчислению не касались вопроса интеграла абсолютного дифференциала. В этой статье мы установливаем понятие интеграла абсолютного дифференциала тензора и будем его називать *абсолютный* или *естественный* интеграл тензора и обозначать символом $\hat{\int}$.

1. Пусть пространство аффинной связаности L_n относено к координатам x^α $(\alpha=1, \dots, n)$, и пусть в любой точке M некоторого пути в пространстве L_n задан тензор $V^{\beta_1 \cdots \beta_n}_{\alpha_1 \cdots \alpha_m}$ n раз контравариантный и m раз ковариантный. Абсолютный дифференциал этого тензора известно, что

$$(1.1)\quad \left\{ \begin{aligned} DV^{\beta_1 \cdots \beta_n}_{\alpha_1 \cdots \alpha_m} = dV^{\beta_1 \cdots \beta_n}_{\alpha_1 \cdots \alpha_m} + \{ & \Gamma^{\beta_1}_{\gamma\delta} V^{\gamma \beta_2 \cdots \beta_n}_{\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_m} + \cdots + \Gamma^{\beta_n}_{\gamma\delta} V^{\beta_1 \cdots \gamma}_{\alpha_1 \cdots \alpha_m} - \\ & - \Gamma^{\gamma}_{\alpha_1 \delta} V^{\beta_1 \beta_2 \cdots \beta_n}_{\gamma \alpha_2 \cdots \alpha_m} - \cdots - \Gamma^{\gamma}_{\alpha_m \delta} V^{\beta_1 \cdots \beta_n}_{\alpha_1 \cdots \gamma} \} \, dx^\delta \end{aligned} \right.$$

где $\Gamma^\beta_{\gamma\delta} = \Gamma^\beta_{\delta\gamma}$ коэффициенты связаности.

Показывается полезным ввести интегральный оператор, обратный оператору абсолютного дифференциала (1.1) тензора, которого определяем следующими соотношениями

$$(1.2)\qquad \hat{\int} DV^{\beta_1 \cdots \beta_n}_{\alpha_1 \cdots \alpha_m} = V^{\beta_1 \cdots \beta_n}_{\alpha_1 \cdots \alpha_m} - A^{\beta_1 \cdots \beta_n}_{\alpha_1 \cdots \alpha_m}.$$

Это абсолютный интеграл тензора.

Для абсолютного интеграла будет выполнено следующее утверждение

$$(1.3)\qquad D \hat{\int} DV^{\beta_1 \cdots \beta_n}_{\alpha_1 \cdots \alpha_m} = DV^{\beta_1 \cdots \beta_n}_{\alpha_1 \cdots \alpha_m}.$$

Это получаем из (1.2) так как абсолютный дифференциал параллельно переносимого тензора $A^{\beta_1\cdots\beta_n}_{\alpha_1\cdots\alpha_m}$ равняется нулю, т.е.

$$DA^{\beta_1\cdots\beta_n}_{\alpha_1\cdots\alpha_m}=0. \tag{1.4}$$

В аффинной координатной системы абсолютный интеграл равняется „обичному" интегралу того же тензора так как коэффициенты связаности ровняются нулю, т. е.

$$\hat{\int} DV^{j_1\cdots j_n}_{i_1\cdots i_m}=\int dV^{j_1\cdots j_n}_{i_1\cdots i_m}$$

В этом случае координаты параллельно переносимого тензора $A^{j_1\cdots j_n}_{i_1\cdots i_m}$ постояные.

Если V^β одновалентный контравариантный (или V_α одновалентный ковариантный) тензор, ему будет соответствовать автопараллельный вектор A^β (т. е. A_α).

2. По определению (1.2) абсолютный интеграл тензора очевидно тоже тензор. Если $J^{j_1\cdots j_n}_{i_1\cdots i_m}$ абсолютный интеграл некоторого $m+n$ валентного тензора в системе координат z^i и $J^{\beta_1\cdots\beta_n}_{\alpha_1\cdots\alpha_m}$ абсолютный интеграл того же тензора в координатной системе x^α, тогда будет

$$J^{j_1\cdots j_n}_{i_1\cdots i_m}=\frac{\partial z^{j_1}}{\partial x^{\beta_1}}\frac{\partial z^{j_2}}{\partial x_{\beta_2}}\cdots\frac{\partial z^{j_n}}{\partial x^{\beta_n}}\frac{\partial x^{\alpha_1}}{\partial z^{i_1}}\frac{\partial x^{\alpha_2}}{\partial z^{i_2}}\cdots\frac{\partial x^{\alpha_m}}{\partial z^{i_m}}J^{\beta_1\cdots\beta_n}_{\alpha_1\cdots\alpha_m}$$

т.е.

$$\hat{\int} DV^{j_1\cdots j_n}_{i_1\cdots i_m}=\frac{\partial z^{j_1}}{\partial x^{\beta_1}}\frac{\partial z^{j_2}}{\partial x^{\beta_2}}\cdots\frac{\partial z^{j_n}}{\partial x^{i_m}}\frac{\partial x^{\alpha_1}}{\partial z^{i_1}}\cdots\frac{\partial x^{\alpha_m}}{\partial z^{i_m}}\hat{\int} DV^{\beta_1\cdots\beta_n}_{\alpha_1\cdots\alpha_m} \tag{2.1}$$

Отсюда следует:

$$V^{j_1\cdots j_n}_{i_1\cdots i_m}-A^{j_1\cdots j_n}_{i_1\cdots i_m}=\frac{\partial z^{j_1}}{\partial x^{\beta_1}}\frac{\partial z^{j_2}}{\partial x^{\beta_2}}\cdots\frac{\partial z^{j_n}}{\partial x^{i_m}}\frac{\partial x^{\alpha_1}}{\partial z^{i_1}}\cdots\frac{\partial x^{\alpha_m}}{\partial z^{i_m}}\left(V^{\beta_1\cdots\beta_n}_{\alpha_1\cdots\alpha_m}-A^{\beta_1\cdots\beta_n}_{\alpha_1\cdots\alpha_m}\right)$$

Смотря на то, что автопараллельный тензор $A^{\beta_1\cdots\beta_n}_{\alpha_1\cdots\alpha_m}$ преобразуется по закону

$$A^{j_1\cdots j_n}_{i_1\cdots i_m}=\frac{\partial z^{j_1}}{\partial x^{\beta_1}}\frac{\partial z^{j_2}}{\partial x^{\beta_2}}\cdots\frac{\partial z^{j_n}}{\partial x^{i_m}}\frac{\partial x^{\alpha_1}}{\partial z^{i_1}}\cdots\frac{\partial x^{\alpha_m}}{\partial z^{i_m}}A^{\beta_1\cdots\beta_n}_{\alpha_1\cdots\alpha_m} \tag{2.2}$$

мы приходим к известному закону преобразования тензора $V^{j_1\cdots j_n}_{i_1\cdots i_m}$, и также к способу вычисления тензора $A^{\beta_1\cdots\beta_n}_{\alpha_1\cdots\alpha_m}$ в любой точке рассматриваемого пространства если извесные составляющие тензора $A^{j_1\cdots j_n}_{i_1\cdots i_m}$ в точке $z^j=z^j(t_0)$.

3. Покажем теперь некоторые операции абсолютного интеграла.

a) Абсолютный интеграл суммы абсолютных дифференциалов тензоров ровняется разници суммы этых тензоров и суммы им соотвествующих автопараллельных тензоров. Это очень просто показать. Известно что сумма тензоров, например, $U^{\beta_1\cdots\beta_n}_{\alpha_1\cdots\alpha_m}$ и $V^{\beta_1\cdots\beta_n}_{\alpha_1\cdots\alpha_m}$ представляет тензор $W^{\beta_1\cdots\beta_n}_{\alpha_1\cdots\alpha_m}$ того же строения, т.е.

$$W^{\beta_1\cdots\beta_n}_{\alpha_1\cdots\alpha_m}=U^{\beta_1\cdots\beta_n}_{\alpha_1\cdots\alpha_m}+V^{\beta_1\cdots\beta_n}_{\alpha_1\cdots\alpha_m}. \tag{3.1}$$

Тогда

(3.2) $$DW^{\beta_1\cdots\beta_n}_{\alpha_1\cdots\alpha_m}=DU^{\beta_1\cdots\beta_n}_{\alpha_1\cdots\alpha_m}+V^{\beta_1\cdots\beta_n}_{\alpha_1\cdots\alpha_m}.$$

Обращая внимание на (1.2), в силу чего

$$\hat{\int} DU^{\beta_1\cdots\beta_n}_{\alpha_1\cdots\alpha_m}=U^{\beta_1\cdots\beta_n}_{\alpha_1\cdots\alpha_m}-B^{\beta_1\cdots\beta_n}_{\alpha_1\cdots\alpha_m},$$

мы получим

$$\hat{\int} DW^{\beta_1\cdots\beta_n}_{\alpha_1\cdots\alpha_m}=\hat{\int} DU^{\beta_1\cdots\beta_n}_{\alpha_1\cdots\alpha_m}+\hat{\int} DV^{\beta_1\cdots\beta_n}_{\alpha_1\cdots\alpha_m}=$$

(3.3) $$=U^{\beta_1\cdots\beta_n}_{\alpha_1\cdots\alpha_m}+V^{\beta_1\cdots\beta_n}_{\alpha_1\cdots\alpha_m}-(A^{\beta_1\cdots\beta_n}_{\alpha_1\cdots\beta_m}+B^{\beta_1\cdots\beta_n}_{\alpha_1\cdots\alpha_m})$$

что и хотели показать.

б) Таким образом можно показать что

(3.4) $$\hat{\int} U^{\beta_1\cdots\beta_n}_{\alpha_1\cdots\alpha_m}DV^{\beta_1\cdots\beta_n}_{\alpha_1\cdots\alpha_m}=U^{\beta_1\cdots\beta_n}_{\alpha_1\cdots\alpha_m}V^{\beta_1\cdots\beta_n}_{\alpha_1\cdots\alpha_m}-$$

$$-C^{\beta_1\cdots\beta_n}_{\alpha_1\cdots\alpha_m}\hat{\int} V^{\beta_1\cdots\beta_n}_{\alpha_1\cdots\alpha_m}DU^{\beta_1\cdots\beta_n}_{\alpha_1\cdots\alpha_m}$$

где $C^{\beta_1\cdots\beta_n}_{\alpha_1\cdots\alpha_m}$ произведение автопараллельных тензоров $A^{\beta_1\cdots\beta_n}_{\alpha_1\cdots\alpha_m}$ и $B^{\beta_1\cdots\beta_n}_{\alpha_1\cdots\alpha_m}$.

в) Из соотношений (1.2) видно: если $\hat{\int} DV^{\beta_1\cdots\beta_n}_{\alpha_1\cdots\alpha_m}=0$ тогда тензор $V^{\beta_1\cdots\beta_n}_{\alpha_1\cdots\alpha_m}$ параллельно переносимый, так как

(3.6) $$V^{\beta_1\cdots\beta_n}_{\alpha_1\cdots\alpha_m}=A^{\beta_1\cdots\beta_n}_{\alpha_1\cdots\alpha_m}.$$

г) В частном случае абсолютный интеграл от инвариантного дифференциального выраженыя $\dfrac{\partial\psi}{\partial u^\alpha}Du^\alpha$, где ψ скалярная инварианта зависимая от координат вектора u^α мы получим

(3.7) $$\hat{\int}\frac{\partial\psi}{\partial u^\alpha}Du^\alpha=\hat{\int} D\psi=\psi-\psi_0.$$

В самом деле, если u^i координаты вектора **u** относительно аффиной координатной системе y^i то при переходе к криволинейной координатной системе x^α будет

$$\frac{\partial\psi}{\partial u^\alpha}=\frac{\partial\psi}{\partial u^i}\frac{\partial y^i}{\partial x^\alpha},\qquad du^i=\frac{\partial y^i}{\partial x^\alpha}Du^\alpha.$$

Отсюда следует

$$d\psi=\frac{\partial\psi}{\partial u^i}\frac{\partial y^i}{\partial x^\alpha}Du^\alpha=\frac{\partial\psi}{\partial u^\alpha}Du^\alpha+D\psi$$

что достаточно для точности интеграла (3.5).

4. В Римановом пространстве интеграл абсолютного дифференциала метрического тензора $g_{\alpha\beta}$ показывает согласно выражениям (3.5) и (3.6) известный факт что метрическый тензор параллельно переносимый, т.е.

(4.1) $$\hat{\int} Dg_{\alpha\beta}=0\Rightarrow g_{\alpha\beta}=A_{\alpha\beta}.$$

Следствием соотношений (3.4) и (4.1) в Римановом пространстве мы получим

$$\hat{\int} g_{\alpha\beta}\,\xi^\alpha D\eta^\beta = g_{\alpha\beta}\,\xi^\alpha\eta^\beta - \hat{\int} g_{\alpha\beta}\,\eta^\beta D\xi^\alpha = \xi^\alpha\eta_\alpha - \hat{\int}\eta_\alpha D\xi^\alpha. \tag{4.2}$$

Если $\xi^\alpha = \eta^\alpha$, в смысле (3.7), будет

$$\hat{\int} g_{\alpha\beta}\,\xi^\alpha D\xi^\alpha = g_{\alpha\beta}\,\xi^\alpha\xi^\beta - \frac{1}{2}\hat{\int} D(g_{\alpha\beta}\xi^\alpha\xi^\beta) = \frac{1}{2}g_{\alpha\beta}\,\xi^\gamma\xi^\beta - \psi_0. \tag{4.3}$$

5. В конце этой статьи приведём пример интегрирования системы дифференциальных уравнений

$$\frac{d^2\xi^\alpha}{dt^2} + \partial_\sigma\Gamma^\alpha_{\gamma\delta}\,\xi^\gamma\,\frac{dx^\delta}{dt}\,\frac{dx^\sigma}{dt} + 2\,\Gamma^\alpha_{\gamma\delta}\,\frac{d\xi^\gamma}{dt}\,\frac{dx^\delta}{dt} + \Gamma^\alpha_{\gamma\delta}\,\xi^\gamma\,\frac{d^2x^\delta}{dt^2} +$$

$$+\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}\,\Gamma^\beta_{\sigma\delta}\,\xi^\sigma\,\frac{dx^\gamma}{dt}\,\frac{dx^\delta}{dt} = c\,\xi^\alpha \tag{5.1}$$

где ξ^α координаты вектора ξ в координатной системе $x^\alpha\,(\alpha = 1, \ldots, n)$, t-параметр и c постоянная.

Эту нелинейную систему дифференциальных уравнений второго рода можно написать короче в выде

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{D\xi^\alpha}{dt}\right) + \Gamma^\alpha_{\beta\gamma}\,\frac{D\xi^\beta}{dt}\,\frac{dx^\gamma}{dt} = c\,\xi^\alpha$$

или

$$\frac{D}{dt}\left(\frac{D\xi^\alpha}{dt}\right) = c\,\xi^\alpha \tag{5.2}$$

где $\dfrac{D\xi^\beta}{dt} = \dfrac{d\xi^\beta}{dt} + \Gamma^\beta_{\sigma\delta}\,\xi^\sigma\,\dfrac{dx^\delta}{dt}$ абсолютная производная вектора ξ^β по параметру t.

Теперь дифференциальные уравнения (5.2) компонируем* выражением $g_{\alpha\beta}\,D\xi^\beta = g_{\alpha\beta}\,\dfrac{D\xi^\beta}{dt}\,dt$: получим

$$g_{\alpha\beta}\,\frac{D\xi^\beta}{dt}\,D\left(\frac{D\xi^\alpha}{dt}\right) = c\,g_{\alpha\beta}\,\xi^\alpha D\xi^\beta, \tag{5.3}$$

или дальше

$$D\left(g_{\alpha\beta}\,\frac{D\xi^\alpha}{dt}\,\frac{D\xi^\beta}{dt}\right) = cD\,(g_{\alpha\beta}\,\xi^\alpha\xi^\beta).$$

Абсолютный интеграл этого равенства согласно выражению (3.7) будет

$$g_{\alpha\beta}\,\frac{D\xi^\alpha}{dt}\,\frac{D\xi^\beta}{dt} = cg_{\alpha\beta}\,\xi^\alpha\xi^\beta + \psi_0.$$

Это первый интеграл системы дифференциальных уравнений (5.1), что и хотели получить.

Ряд других примеров интегрирования дифференциальных уравнений движений механической системы в Римановом пространстве опубликуем в журнале „Математички весник“, 7(22), св. 3 1970.

---

* операция умножения и свертывания.