PUBLICATIONS DE L'INSTITUT MATHÉMATIQUE
Nouvelle série, tome 10 (24), 1970, pp. 185—193

SUR QUELQUES MOUVEMENTS ADIABATIQUES D'UN GAZ PARFAIT

K. Voronjec

(Communiqué le 11 Mars 1970)

Considérons l'écoulement plan permanent d'un gaz parfait et désignons par ρ la densité et par v_x et v_y les projections de la vitesse $\vec{v}$. On déduit de l'équation de continuité que

$$(1)\qquad \begin{aligned} \rho\, v_x &= \rho\gamma \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \Psi}{\partial y},\\ \rho\, v_y &= \rho\,\gamma \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\partial \Psi}{\partial x}, \end{aligned}$$

où $\Psi(x, y)$ est la fonction de courant et où les lignes $\varphi(x, y) = \text{const.}$ sont les trajectoires orthogonales de la famille des lignes de courant. Le paramètre γ est une fonction de x et de y. Si le mouvement est adiabatique l'équation d'énergie donne

$$p = \rho^{\varkappa}\, \varepsilon(\Psi),$$

où p est la pression, ε une fonction de Ψ et $\varkappa$ le rapport de deux chaleurs spécifiques de gaz.

On sait*) que la compatibilité des équations d'Euler exige que le tourbillon $2\,\omega$ soit donné par la formule

$$(2)\qquad 2\,\omega = \rho\left(\frac{1}{\varkappa-1}\,\rho^{\varkappa-1}\,\varepsilon' - \lambda'\right),$$

où λ' est la dérivée par rapport à Ψ d'une nouvelle fonction λ de Ψ. On déduit, ensuite, en intégrant les équations d'Euler, que

$$(3)\qquad v^2 = 2\left(\lambda - \frac{\varkappa}{\varkappa-1}\,\rho^{\varkappa-1}\,\varepsilon\right).$$

Il est opportun de passer à des coordonnées curvilignes orthogonales φ et Ψ à des fonctions inconnues v et ϑ, où ϑ est l'angle que fait la vitesse $\vec{v}$ avec l'axe des x. On voit facilement que le tourbillon s'exprime par

$$2\,\omega = -\rho\, v^2 \frac{\partial}{\partial \psi} \ln \gamma$$

*) voir p.e. [1], [2]

et que la condition (2), tenant compte de (3), s'écrit sous la forme

$$\frac{\partial}{\partial\psi}\ln\gamma^2=\frac{\lambda'-\dfrac{1}{\varkappa-1}\rho^{\varkappa-1}\varepsilon'}{\lambda-\dfrac{\varkappa}{\varkappa-1}\rho^{\varkappa-1}\varepsilon}. \tag{4}$$

En utilisant l'équation de continuité et la condition que rot $(\vec{v}/\gamma)=0$ on obtient, à la place des équations (1), les équations

$$\begin{aligned}&\frac{1}{\gamma}\frac{\partial(\rho v)}{\partial\varphi}+\rho^2 v\frac{\partial\vartheta}{\partial\psi}=0,\\ &\rho\frac{\partial}{\partial\psi}\frac{v}{\gamma}-\frac{v}{\gamma^2}\frac{\partial\vartheta}{\partial\varphi}=0,\end{aligned} \tag{5}$$

que l'on peut amener à la forme

$$\begin{aligned}&\frac{\partial\vartheta}{\partial\psi}=\frac{\dfrac{\varkappa(\varkappa+1)}{\varkappa-1}\rho^{\varkappa-1}\varepsilon-2\lambda}{2\gamma\varkappa\rho^{\varkappa-1}\varepsilon\left(\lambda-\dfrac{\chi}{\varkappa-1}\rho^{\varkappa-1}\varepsilon\right)}\frac{\partial}{\partial\psi}(\rho^{\varkappa}\varepsilon),\\ &\frac{\partial\vartheta}{\partial\varphi}=-\frac{\gamma}{2\left(\lambda-\dfrac{\varkappa}{\varkappa-1}\rho^{\varkappa-1}\varepsilon\right)}\frac{\partial}{\partial\psi}(\rho^{\varkappa}\varepsilon).\end{aligned} \tag{5'}$$

On cherche ordinairement des solutions de problème ainsi posé en donnant des formes convenables à des fonctions introduites $\varepsilon(\Psi)$, et $\lambda(\psi)$, liées à l'entropie et à l'entalpie. Si ces deux fonctions sont constantes, le mouvement est évidemment irrotationnel et nous laissons à part ce cas comme bien étudié par plusieurs auteurs. Ot trouve aussi des méthodes approximatives liées à la théorie des fonctions complexes [3], [4]. Le mouvement peut être irrotationnel même sans cette condition, mais la densité, alors, doit être fonction de Ψ seulement*). Dans deux travaux récents [2], [5] nous avons analysé le cas d'un mouvement tourbillonnaire sous la condition que rot $(\rho\vec{v})=0$. Les solutions, dans ce cas, correspondent à un nombre très restreint de mouvements possibles.

On peut partir de l'équation (4) et faire de diverses hypothèses sur la nature de la fonction γ. Si γ est une constante ou fonction de φ, le mouvement est irrotationel. Si γ est inversement proportionnel à la densité, les deux fonctions φ et Ψ sont harmoniques et l'on a le problème mentionné déjà. On admettera ici que γ est une fonction arbitraire de la densité et l'on cherchera les mouvements fluides correspondants.

---

*) Voir [1]

Soit donc

$$\ln \gamma^2 = f(\rho). \tag{6}$$

L'équation (4) contient alors deux variables seulement, ρ et λ, puisqu'on peut considérer ε comme une fonction de λ. Dans le cas général il faut supposer qu'il existe un facteur intégrant que nous désignerons par σ (ρ) admettant ainsi qu'il ne dépend que de la densité.

L'équation (4) devient

$$\left(\lambda - \frac{\varkappa}{\varkappa-1}\rho^{\varkappa-1}\varepsilon\right)\sigma f'\,d\rho - \left(1-\frac{1}{\varkappa-1}\rho^{\varkappa-1}\frac{d\varepsilon}{d\lambda}\right)\sigma\,d\lambda = 0 \tag{7}$$

et les conditions pour que σ soit un facteur intégrant donnent

$$\varepsilon = k\lambda, \quad f' = \frac{k\rho^{\varkappa-2}}{1-\dfrac{k\varkappa}{\varkappa-1}\rho^{\varkappa-1}} - \frac{1-\dfrac{k}{\varkappa-1}\rho^{\varkappa-1}}{1-\dfrac{k\varkappa}{\varkappa-1}\rho_{\varkappa}^{-1}}\,\frac{\sigma'}{\sigma}, \tag{8}$$

où k est une constante arbitraire. Ces résultats ne correspondent pas au cas où ε et λ sont des constantes et au cas où $\sigma=\rho$, $f=-\ln\rho$, $\gamma^2=1/\rho$. Dans ce dernier cas existe la relation

$$\rho\lambda - \frac{1}{\varkappa-1}\rho^{\varkappa}\varepsilon = \text{fonct. de } \varphi.$$

L'équation (7) donne après l'intégration

$$\sigma\left(1-\frac{k}{\varkappa-1}\rho^{\varkappa-1}\right) = \frac{\mu(\varphi)}{\lambda(\psi)}, \tag{9}$$

où $\mu(\varphi)$ présente une fonction arbitraire de φ. On voit, donc, que la densité s'exprime par le rapport de deux fonctions arbitraires de φ et de Ψ.

Dans ce qui suit nous appliquerons les désignations

$$\lambda_1 = \ln\lambda, \quad \mu_1 = \ln\mu, \quad u_1 = \lambda_1 - \mu_1, \quad u_2 = \lambda_1 + \mu_1. \tag{10}$$

Si l'on pose pour abréger

$$\frac{k}{\varkappa-1}\rho^{\varkappa-1} = f_1(u_1), \tag{11}$$

on obtient

$$\sigma(1-f_1) = e^{u_1}, \quad f = -\int \frac{1-f_1}{1-xf_1}\,du_1 \tag{12}$$

et les équations (5) deviennent

$$\frac{\partial\vartheta}{\partial\lambda_1} = M_1\frac{\mu_1'}{\lambda_1'}, \quad \frac{\partial\vartheta}{\partial\mu_1} = -M_2\frac{\lambda_1'}{\mu_1'}, \tag{13}$$

où la différentiation par rapport à φ et Ψ est remplacée par la différentiation par rapport à μ_1 et λ_1 et où M_1 et M_2 signifies les expressions

$$(14)\qquad M_1=-\frac{f_1'\left[1-\frac{1}{2}\varkappa(\varkappa+1)f_1\right]}{f_2(1-\varkappa f_1)},\qquad M_2=-\frac{f_2\left(\frac{\varkappa}{\varkappa-1}f_1'-f_1\right)}{2f_1(1-\varkappa f_1)}.$$

Ces expressions sont des fonctions de u_1 seulement (ou de f_1) et la fonction f_2 est égale à

$$(15)\qquad f_2=k\left(\frac{\varkappa-1}{k}\right)^{\frac{\varkappa}{\varkappa-1}} f_1^{\frac{\varkappa}{\varkappa-1}} e^{\frac{1}{2}f}.$$

En introduisant les variables u_1 et u_2 à la place de λ_1 et μ_1 on obtient

$$(13')\qquad \begin{aligned} 2\frac{\partial\vartheta}{\partial u_1}&=-\left(M_1\frac{\mu_1'}{\lambda_1'}+M_2\frac{\lambda_1'}{\mu_1'}\right),\\ 2\frac{\partial\vartheta}{\partial u_2}&=M_1\frac{\mu_1'}{\lambda_1'}-M_2\frac{\lambda_1'}{\mu_1'}.\end{aligned}$$

Nous n'analysons pas ici ces équations dans le cas général, puisque cette analyse fait l'objet d'un autre travail, mais nous les appliquons dans un cas particulier où est supposé que l'angle ϑ est une fonction de u_1 seulement.

Soit donc

$$\vartheta=\vartheta(u_1).$$

Il s'ensuit des équations (13') que l'on a dans ce cas

$$(16)\qquad \vartheta'^2=M_1 M_2,\quad \frac{\mu_1'^2}{\lambda_1'^2}=\frac{M_2}{M_1}.$$

La seconde équation, après la différentitation par rapport à u_2, donne comme suite d'un calcul élémentaire

$$(17)\qquad \lambda_1=k_1\ln\frac{\psi}{\psi_0},\quad \mu_1=k_1\ln\frac{\varphi}{\varphi_0},$$

où k_1, φ_0 et ψ_0 sont des constantes, après quoi elle devient

$$(18)\qquad \frac{M_2}{M_1}=\frac{\psi_0^2}{\varphi_0^2}e^{-2\frac{u_1}{k_1}}$$

et sert à déterminer f_1 en fonction de u_1.

Tenant compte des formules (14) et (15) on arrive à l'équation

$$P_1 f_1''+P_2 f_1'^3-P_3 f_1'^2+P_4 f_1'=0$$

avec

(19)
$$P_1=f_1^2(1-\varkappa f_1)\left[1-\frac{1}{2}\varkappa(\varkappa+1)f_1\right],$$

$$P_2=\frac{\varkappa(\varkappa+1)}{(\varkappa-1)^2}(1-\varkappa f_1)^2,$$

$$P_3=\frac{\varkappa}{\varkappa-1}f_1\left\{3\left(1-\frac{\varkappa+1}{2}f_1\right)\left[1-\frac{1}{3}\varkappa(\varkappa+2)f_1\right]-\right.$$
$$\left.-\frac{2}{k_1}(1-\varkappa f_1)\left[1-\frac{1}{2}\varkappa(\varkappa+1)f_1\right]\right\},$$

$$P_4=f_1^2\left[1-\frac{1}{2}\varkappa(\varkappa+1)f_1\right]\left[(1-f_1)-\frac{2}{k_1}(1-\varkappa f_1)\right],$$

qui se réduit facilement à l'équation de Riccati

(18′)
$$P_1\frac{df_1'}{df_1}+P_2f_1'^2-P_3f_1'+P_4=0.$$

La valeur

$$f_1'=\frac{\varkappa-1}{\varkappa}f_1$$

de la fonction f_1' étant une intégrale particulière de l'équation (18′) on arrive par un changement de variables

$$f_1'=\frac{\varkappa-1}{\varkappa}f_1+\frac{1}{t}$$

à l'équation linéaire

(18″)
$$P_1\frac{dt}{df_1}-P_5t-P_2=0,$$

où P_5 est donné par l'expression

$$P_5=\frac{2}{2(\varkappa-1)}f_1(a_1f_1^2+a_2f_1+a_3)$$

avec

$$a_1=\varkappa^2(\varkappa-1)\left(2-\varkappa+\frac{2\varkappa}{k_1}\right),$$

$$a_2=\varkappa\left[2\varkappa^2-\varkappa-5-\frac{2\varkappa}{k_1}(\varkappa+3)\right],$$

$$a_3=2\left(2-\varkappa+\frac{2\varkappa}{k_1}\right).$$

L'intégrale de cette équation donne t et ensuite f_1' comme fonction de f_1 sous la forme

$$(20)\qquad f_1' = \frac{\varkappa-1}{\varkappa} f_1 \left[1 + \frac{(\varkappa-1)k_2}{\varkappa+1} \frac{1-\frac{1}{2}\varkappa(\varkappa+1)f_1}{(1-\varkappa f_1)(C f_1^{k^2}-1)} \right],$$

où C est la constante d'intégration et k_2 est égal à

$$(21)\qquad k_2 = \frac{2\varkappa+k_1}{(\varkappa-1)k_1}.$$

On voit, donc, que le problème posé est réduit à une quadrature qui détermine la densité en fonction de u_1. On effectuera ici l'intégration dans le cas spécial où la constante C est égale à 0. L'équation (20) devient alors

$$(20')\qquad f_1' = \frac{(\varkappa-1)(k_1-2\varkappa)}{2k_1} \frac{f_1(a-f_1)}{1-\varkappa f_1}$$

avec

$$(22)\qquad a = \frac{2(k_1-2)}{(\varkappa+1)(k_1-2\varkappa)}$$

et détermine f_1 en fonction de u_1 par l'expression

$$(23)\qquad f_1^{\frac{\varkappa+1}{\varkappa-1}} (a-f_1)^{\frac{k_1+2\varkappa}{k_1-2\varkappa}} = e^{\frac{k_1-2}{k_1}(u_1-u_0)},$$

u_0 étant une constante d'intégration. On constante facilement que pour la valeur $k_1=-2$, qui apparaîtra plus tard dans les formules, l'équation (23) prend la forme

$$(23')\qquad f_1^{\frac{\varkappa+1}{\varkappa-1}} \left[\frac{4}{(\varkappa+1)^2} - f_1 \right]^{-\frac{\varkappa-1}{\varkappa+1}} = e^{2(u_1-u_0)}$$

et que pour $k_1=2\varkappa^2$ cette équation devient de deuxième degrés et peut être résolue par rapport à f_1.

Il est facile maintenant de calculer, sans aucune intégration, les fonctions f et γ et l'on obtient

$$\gamma^2 = A f_1^{-\frac{\varkappa+1}{\varkappa-1}} (a-f_1) e^{-2\frac{u_1}{k_1}}$$

avec

$$A = \frac{\psi_0^2}{\varphi_0^2} (\varkappa+1)(\varkappa-1)^{-\frac{\varkappa+1}{\varkappa-1}} k^{\frac{2}{\varkappa-1}} \frac{2\varkappa-k_1}{2\varkappa+k_1}.$$

Mais il est de plus grand intérêt de déterminer la fonction $\vartheta(u_1)$ qui permet de trouver les propriétés des mouvements considérés.

L'expression

$$(24)\qquad \left(\frac{d\vartheta}{df_1}\right)^2 = \frac{M_1 M_2}{f_1'^2} = \frac{2\varkappa+k_1}{(\varkappa^2-1)(2\varkappa-k_1)} \frac{\left[1-\frac{1}{2}\varkappa(\varkappa+1)f_1\right]^2}{f_1(1-\varkappa f_1)^2(a-f_1)}$$

montre que les valeurs de paramètre k_1 ne peuvent pas être arbitraires. Puisque la fonction f_1 est toujours positive et plus petite que $1/\varkappa$ (voir l'expression (3) pour v^2) on constate facilement que le paramètre a doit être positif et ensuite que k_1 se trouve dans l'intervalle $-2\varkappa<k_1<2$. Dans ce cas a est plus petit que $1/\varkappa$, $(a-f_1)<0$ et f_1 se trouve entre 0 et a.

On effectue sans difficultés l'intégration de l'équation (24) et l'on obtient

$$\vartheta-\vartheta_0=\pm m \operatorname{arc\,tg}\sqrt{\frac{a-f_1}{f_1}}\mp\operatorname{arc\,tg}\frac{\varkappa+1}{m(\varkappa-1)}\sqrt{\frac{a-f_1}{f_1}}, \tag{25}$$

où par m est désigné un nouveau paramètre

$$m^2=\frac{\varkappa+1}{\varkappa-1}\,\frac{2\varkappa+k_1}{2\varkappa-k_1}$$

et où ϑ_0 présente une constante d'intégration qui peut être posée égale à 0. L'expression f_1/a étant positive et plus petite que 1, on peut introduire deux angles α_1 et α_2 par les formules

$$\frac{f_1}{a}=\sin^2\alpha_1,\qquad \frac{\varkappa+1}{m(\varkappa-1)}\operatorname{ctg}\alpha_1=\operatorname{ctg}\alpha_2 \tag{26}$$

et obtenir ainsi

$$\vartheta-\vartheta_0=m\,\alpha_1-\alpha_2. \tag{25'}$$

Dans le cas où $k_1=-2$ cette formule donne $m=1$, $\vartheta-\vartheta_0=\alpha_1-\alpha_2$.

Pour retourner à des variables x et y on considère les équations (1) et puisque

$$D=\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial\psi}{\partial y}-\frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\partial\psi}{\partial x}=\frac{\rho}{\gamma}v^2$$

on arrive à des équations

$$\cos\vartheta=\rho\, v\frac{\partial y}{\partial\psi}=\frac{v}{\gamma}\frac{\partial x}{\partial\varphi},$$

$$\sin\vartheta=-\rho\, v\frac{\partial x}{\partial\psi}=\frac{v}{\gamma}\frac{\partial y}{\partial\varphi}.$$

Introduisons de nouveau les variables u_1 et u_2 tenant compte que

$$\lambda_1'=\frac{k_1}{\psi_0}e^{-\frac{u_2-u_1}{2k_1}},\quad \mu_1'=\frac{k_1}{\varphi_0}e^{-\frac{u_2+u_1}{2k_1}},\quad \sqrt{\lambda}=e^{-\frac{u_2-u_1}{4}}$$

et que l'on peut écrire $v=\sqrt{\lambda}\,v_1$, où v_1 est une fonction de u_1 seulement. En posant pour abréger

$$F_1=\varphi_0\frac{\gamma}{v_1}e^{b_2u_1},\quad F_2=\frac{\psi_0}{\rho v_1}e^{b_1u_1},\quad b_1=\frac{k_1-2}{4k_1},\quad b_2=\frac{k_1+2}{4k_1} \tag{27}$$

on obtient les équations

$$2\,k_1\,\frac{\partial x}{\partial u_2}=(F_1\cos\vartheta-F_2\sin\vartheta)\,e^{-b_1 u_2},$$

$$2\,k_1\frac{\partial x}{\partial u_1}=(F_1\cos\vartheta+F_2\sin\vartheta)\,e^{-b_1 u_2},$$

$$2\,k_1\,\frac{\partial y}{\partial u_2}=(F_1\sin\vartheta+F_2\cos\vartheta)\,e^{-b_1 u_2},$$

$$2\,k_1\,\frac{\partial y}{\partial u_1}=(F_1\sin\vartheta-F_2\cos\vartheta)\,e^{-b_1 u_2},$$

déterminant x et y comme fonctions de u_1 et u_2. L'intégration de ces équations donne

$$2\,k_1\,b_1\,x=-(F_1\cos\vartheta-F_2\sin\vartheta)\,e^{-b_1 u_2}$$

$$2\,k_1\,b_1\,y=-(F_1\sin\vartheta)+F_2\cos\vartheta)\,e^{-b_1 u_2}$$

où les constantes sont égalées à 0, car le choix de l'origine des coordonnées est arbitraire.

En introduisant les coordonnées polaires r et Θ on constate facilement que l'angle Θ est une fonction de u_1 seulement, c'est-à-dire que les lignes $u_1=\text{const.}$ sont des droites $\Theta=\text{const.}$ L'angle ϑ que font les lignes de courant avec l'axe des x dans des points d'intersection avec une droite fixée $\theta=\text{const.}$ sont les mêmes pour toutes les lignes de courant. En posant

$$F_1=F\cos\alpha,\qquad F_2=F\sin\alpha$$

on constate que l'angle α est égal à α_2 et que l'on peut écrire

$$\theta=m\,\alpha \tag{29}$$

($\vartheta_0=0$). Si l'on a $k_1=-2$, l'angle Θ est égal à α_1.

Quant au rayon r on le calcul à l'aide de formules obtenues auparavant tenant compte que

$$e^{2\,b_1 u_1}\,e^{-2\,b_1 u_2}=e^{-4\,b_1\lambda_1}=\left(\frac{\psi}{\psi_0}\right)^{2-k_1}.$$

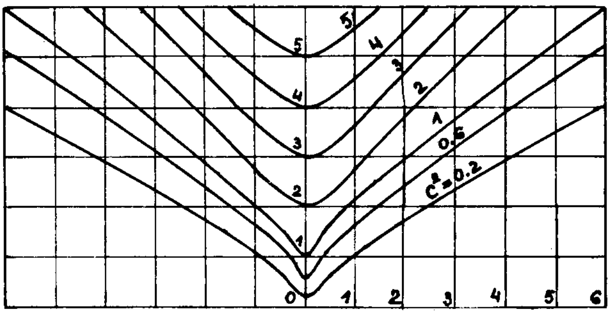
Ce calcul permet déterminer la fonction de courant ψ sous la forme

$$\left(\frac{\psi}{\psi_0}\right)^{2-k_1}=A_1\,r^2\left(\sin^2\frac{\theta}{m}\right)^{\frac{\varkappa+1}{\varkappa-1}},$$

où le facteur constant dépend de k_1. On peut, donc, trouver les expressions pour les projections v_r et v_θ de la vitesse, ce que nous faisons plus loin pour la valeur $k_1=-2$ de paramètre k_1. Les lignes de courant sont données par la formule

$$r\left(\sin\frac{\theta}{m}\right)^{\frac{\varkappa+1}{\varkappa-1}}=\text{const.}$$

Ces lignes, correspondant à la valeur $k_1 = -2$, sont reproduites sur la figure pour quelques valeurs de la constante, et correspondent bien à celles que l'on trouve dans le livre de L. Sedov [6].



Si $k_1 = -2$ on a (prenant $\varkappa = 1,4$)

$$m = 1, \quad a = 4/(\varkappa + 1)^2, \quad \psi = \overline{A}_1 \sqrt{r} \sin^3 \theta$$

et les projections de la vitesse sont données par des expressions

$$v_r = A_r \frac{1}{\sqrt{r}} \frac{\cos \theta}{\sin^3 \theta}, \qquad v_\theta = A_\theta \frac{1}{\sqrt{r}} \frac{1}{\sin^3 \theta},$$

où A_r et A_θ sont des constantes ne dépendant que de paramètre k. Dans ce cas les lignes de courant

$$\sqrt{r} \sin^3 \theta = \text{const.}$$

sont symétriques qar rapport à l'axe des y.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Кочин, Кибель, Розе, *Теоретическая Гидромеханика*, Часть II (1963), стр. 35.

[2] К. Вороњец, *О неким применама комплексних функција у адијабатским струјањима невискозног гаса*, Гл. САНУ (у штампи).

[3] С. А. Чаплыгин, *О газовых струях*, Изв. Москов. Унив., 21 (1904), 1—21.

[4] Христианович, *Обтекание тел газом при больших дозвуковых скоростях*, Труды У. А. Г. И., в. 481 (140).

[5] K. Voronjec, *Sur les mouvements analogues d'un gaz parfait et d'un fluide incompressible*, Publ. Inst. Math., t. 9 (23), 1969, Beograd.

[6] Л. Седов, *Плоские задачи гидродинамички и аэродинамики*, Москва—Ленинград, 1950, стр. 363.