PUBLICATIONS DE L'INSTITUT MATHÉMATIQUE
Nouvelle série, tome 10 (24), 1970. pp. 159—167.

# SUR LE TRANSPORT DU TRIÈDRE DE FERMI LE LONG D'UNE LIGNE D'UNIVERS DE L'ESPACE-TEMPS RELATIVISTE

*Mirjana Lukačević*

(Communiqué le 25 Février 1970)

Synge fait un usage systématique du trièdre de Fermi (cf. [2]), en considérant qu'il permet la généralisation relativiste correcte du concept newtonien du système de référence qui n'effectue pas de rotation. En effet, c'est à plusieurs reprises qu'il arrive, dans la référence citée, après des calculs un peu longs et appliqués à des "expériences imaginaires", à la conclusion que le trièdre de Fermi n'effectue pas de rotation au cours du transport infinitésimal le long d'une ligne d'univers.

Le but de ce travail est: 1) d'arriver à la même conclusion par un calcul simple et direct, et 2) de démontrer que les vitesses d'accroissement des angles entre les vecteurs du trièdre considéré et les vecteurs du trièdre qui effectue un transport parallèle le long de ladite courbe, sont des quantités infinitésimales de deuxième ordre, par rapport à l'arc de la courbe, considéré comme une quantité infinitésimale de premier ordre.

* * *

Soit $x^{\alpha}$ [1] un système de coordonnées dans l'espace-temps $V_4$. Désignons par $g_{\alpha\beta}$ les coordonnées du tenseur fondamental par rapport à ce système. Nous considérerons que la forme fondamentale $\Phi$ est de signature $+2$:

$$\Phi = g_{\alpha\beta}\, dx^{\alpha}\, dx^{\beta}. \tag{1}$$

Considérons dans l'espace-temps une courbe $C$, orientée dans le temps, donnée par les équations

$$x^{\alpha} = x^{\alpha}(s), \tag{2}$$

où le paramètre $s$ est la longeur de l'arc de $C$, mesurée dans la métrique déterminée par la forme $\Phi$.

---

[1] Les indices qui prennent les valeurs 1, 2, 3, 4 seront désignés par des lettres grecques, tandis que les indices qui prennent les valeurs 1, 2, 3 par des lettres de l'alphabet latin.

Le transport de Fermi-Walker[1] d'un vecteur $F^\alpha$ le long de $C$ est défini par la relation

$$\frac{\delta F^\alpha}{\delta s} = \varkappa_{(1)} F_\beta \left( u^\alpha n^\beta_{(1)} - u^\beta n^\alpha_{(1)} \right), \tag{3}$$

où $\frac{\delta F^\alpha}{\delta s}$ est la dérivée absolue de $F^\alpha$, $\varkappa_{(1)}$ — la première courbure, $u^\alpha = \frac{dx^\alpha}{ds}$ le vecteur unitaire de la tangente, et $n^\alpha_{(1)}$ le vecteur unitaire de la première normale de $C$.

Partant de la relation (3), on peut aisément démontrer que le transport de Fermi-Walker conserve l'intensité des vecteurs, ainsi que les angles qu'ils constituent. D'où la conclusion qu'un système de vecteurs, initialement orthonormé, demeure tel lors du transport considéré le long de $C$.

Considérons maintenant le système orthonormé de vecteurs $\lambda^\alpha_{(\mu)}$[2], attachés à la courbe $C$, et tel qu'on ait toujours $\lambda^\alpha_{(4)} \equiv u^\alpha$. Si nous posons $u^\alpha$ à la place de $F^\alpha$ dans la relation (3), nous aurons la première formule de Frénet pour un espace riemannien général:

$$\frac{\delta u^\alpha}{\delta s} = \varkappa_{(1)} n^\alpha_{(1)}. \tag{4}$$

D'où la conclusion que le vecteur unitaire de la tangente d'une courbe orientée dans le temps subit le transport de Fermi-Walker.

Posons la condition que les trois autres vecteurs du repère considéré, $\lambda^\alpha_{(i)}$, soient astreints au transport de Fermi-Walker. En usant de (3) et du fait que nous avons $\lambda^\alpha_{(i)} u_\alpha = 0$, nous obtiendrons que les vecteurs $\lambda^\alpha_{(i)}$ doivent satisfaire aux relations

$$\frac{\delta \lambda^\alpha_{(i)}}{\delta s} = \varkappa_{(1)} \lambda_{(i)\beta} u^\alpha n^\beta_{(1)}. \tag{5}$$

Pour mettre en évidence l'avantage du repère $\lambda^\alpha_{(\mu)}$ par rapport à un repère orthonormé qui subit un transport parallèle le long de $C$, considérons un tel repère $\xi^\alpha_{(\mu)}$ qui coïncide avec $\lambda^\alpha_{(\mu)}$ à un certain moment, que nous pouvons choisir comme moment initial, et qui effectuera un transport parallèle le long de $C$. Il est clair que $\xi^\alpha_{(4)}$, qui coïncide avec $u^\alpha$ au moment initial, ne peut rester tangent par rapport à $C$ (excepté quand $C$ est une géodésique, à la suite de quoi le transport de Fermi-Walker se réduit à un transport parallèle). Le vecteur $\lambda^\alpha_{(4)}$, cependant, demeure tangent par rapport à $C$, à la suite de quoi les trois vecteurs $\lambda^\alpha_{(i)}$ lui sont toujours orthogonaux. Lors du transport de Fermi-Walker, le trièdre orthonormé, orthogonal par rapport à $C$, demeure tel, ce qui permet, ainsi que le remarque Synge, de former un "repère d'espace", attaché à l'observateur dont la ligne d'univers est $C$[3]. Un trièdre ayant ces

[1] Voir [2], page 20.

[2] L'indice entre les parenthèses n'a pas un caractère tensoriel, mais il désigne les numéros d'ordre des vecteurs du système; dans ce cas aussi les indices grecs prendront les valeurs de 1 à 4, et les indices latins de 1 à 3.

[3] Le trièdre $\lambda^\alpha_{(i)}$, qui effectue un transport de Fermi-Walker le long de $C$, est appelé par Synge "trièdre de Fermi".

propriétés (orthonormé et toujours orthogonal par rapport à $C$) pourrait, il est vrai, représenter un repère constitué par les trois normales de notre courbe[1]. On sait, cependant, que ce trièdre effectue une rotation lors du transport le long d'une courbe. Nous démontrerons que la rotation est absente lors du transport infinitésimal du trièdre $\lambda^{\alpha}_{(i)}$, à la suite de quoi ce trièdre représente, à la différence du trièdre $n^{\alpha}_{(i)}$, „la généralisation relativiste correcte de la notion newtonienne du „repère qui ne tourne pas"" (cf. [2], p. 22).

Examinons, dans le but indiqué, le déplacement du trièdre $n^{\alpha}_{(i)}$ par rapport à celui de Fermi, lors de leur transport le long de $C$.

Le cosinus de l'angle $\theta_{(ij)}$ entre la normale $n^{\alpha}_{(i)}$ et le vecteur $\lambda^{\alpha}_{(j)}$ est donné par l'expression

$$\cos\theta_{(ij)} = n^{\alpha}_{(i)}\lambda_{(j)\alpha},$$

d'où on obtient en dérivant par rapport à $s$:

$$-\sin\theta_{(ij)}\frac{d\theta_{(ij)}}{ds} = \frac{\delta n^{\alpha}_{(i)}}{ds}\lambda_{(j)\alpha} + n^{\alpha}_{(i)}\frac{\delta\lambda_{(j)\alpha}}{\delta s}.$$

Si nous usons maintenant de l'équation (5) et du fait que $n^{\alpha}_{(i)}u_{\alpha}=0$, nous obtiendrons

$$-\sin\theta_{(ij)}\frac{d\theta_{(ij)}}{ds} = \frac{\delta n^{\alpha}_{(i)}}{\delta s}\lambda_{(j)\alpha}. \tag{6}$$

La deuxième formule de Frénet pour un espace riemannien général étant

$$\frac{\delta n^{\alpha}_{(1)}}{\delta s} = \varkappa_{(2)} n^{\alpha}_{(2)} + \varkappa_{(1)} u^{\alpha}, \tag{7}$$

($\varkappa_{(2)}$ est la deuxième courbure de $C$), nous obtiendrons de (6), en y posant $i=1$,

$$\frac{d\theta_{(1j)}}{ds} = -\frac{\varkappa_{(2)} n^{\alpha}_{(2)}\lambda_{(j)\alpha}}{\sin\theta_{(1j)}}. \tag{8}$$

L'équation (8) détermine la vitesse angulaire du vecteur $n^{\alpha}_{(1)}$ par rapport au vecteur $\lambda^{\alpha}_{(j)}$ du trièdre de Fermi, lors du transport le long de $C$. Choisissons le moment $t=0$ comme étant celui où les axes des trièdres considérés coïncident, et faisons-lui correspondre, pour simplifier, la valeur $s=0$. Nous aurons de (8):

$$\left(\frac{d\theta_{(12)}}{ds}\right)_{s=0} = -\varkappa_{(2)}(0); \qquad \left(\frac{d\theta_{(13)}}{ds}\right)_{s=0} = 0. \tag{9}$$

Pour $s=0$ l'expression $\dfrac{d\theta_{(11)}}{ds}$ devient indéterminée, ainsi qu'on le voit de (8). Nous admettrons ici l'hypothèse mathématique selon laquelle la valeur d'une expression qui se réduit, en fonction de son argument, à la forme indéter-

[1] Nous désignerons ce trièdre par $n^{\alpha}_{(i)}$.

minée $\frac{0}{0}$, est égale à celle de sa valeur limite quand l'argument tend à la valeur pour laquelle cette expression se réduit à $\frac{0}{0}$. Nous aurons donc

$$\left(\frac{d\theta_{(11)}}{ds}\right)_{s=0}=\lim_{s\to 0}\frac{d\theta_{(11)}}{ds}=\lim_{s\to 0}\left[-\frac{\varkappa_{(2)}\overset{\alpha}{n}_{(2)}\lambda_{(1)\alpha}}{\sin\theta_{(11)}}\right]=$$

$$(10)\qquad =-\lim_{s\to 0}\frac{\frac{d\varkappa_{(2)}}{ds}\overset{\alpha}{n}_{(2)}\lambda_{(1)\alpha}+\varkappa_{(2)}\frac{\delta\overset{\alpha}{n}_{(2)}}{\delta s}\lambda_{(1)\alpha}+\varkappa_{(2)}\overset{\alpha}{n}_{(2)}\frac{\delta\lambda_{(1)\alpha}}{\delta s}}{\frac{d\theta_{(11)}}{ds}\cos\theta_{(11)}}.$$

La troisième formule de Frénet étant:

$$(11)\qquad \frac{\delta\overset{\alpha}{n}_{(2)}}{\delta s}=\varkappa_{(3)}\overset{\alpha}{n}_{(3)}-\varkappa_{(2)}\overset{\alpha}{n}_{(1)},$$

où $\varkappa_{(3)}$ est la troisième courbure de $C$, nous aurons, en tenant compte de (5),

$$\left(\frac{d\theta_{(11)}}{ds}\right)_{s=0}=$$

$$=-\lim_{s\to 0}\frac{\frac{d\varkappa_{(2)}}{ds}\overset{\alpha}{n}_{(2)}\lambda_{(1)\alpha}+\varkappa_{(2)}\left(\varkappa_{(3)}\overset{\alpha}{n}_{(3)}-\varkappa_{(2)}\overset{\alpha}{n}_{(1)}\right)\lambda_{(1)\alpha}+\varkappa_{(2)}\overset{\alpha}{n}_{(2)}\varkappa_{(1)}\lambda_{(1)\beta}\overset{\beta}{n}_{(1)}u_{\alpha}}{\frac{d\theta_{(11)}}{ds}\cos\theta_{(11)}},$$

d'où nous obtiendrons, puisque pour $s=0$, $\theta_{(11)_0}=0$, $\lambda_{(1)\alpha_0}=n_{(1)\alpha_0}$,

$$(12)\qquad \left(\frac{d\theta_{(11)}}{ds}\right)_{s=0}=\sqrt{\varkappa^2_{(2)}(0)}\,.$$

Pour $i=2$ l'équation (6) nous donne

$$-\sin\theta_{(2j)}\frac{d\theta_{(2j)}}{ds}=\frac{\delta\overset{\alpha}{n}_{(2)}}{\delta s}\lambda_{(j)\alpha},$$

d'où nous obtenons, en usant de (11),

$$(13)\qquad \frac{d\theta_{(2j)}}{ds}=-\frac{\left(\varkappa_{(3)}\overset{\alpha}{n}_{(3)}-\varkappa_{(2)}\overset{\alpha}{n}_{(1)}\right)\lambda_{(j)\alpha}}{\sin\theta_{(2j)}}.$$

On peut obtenir de (13) sans difficulté:

$$(14)\qquad \left(\frac{d\theta_{(21)}}{ds}\right)_{s=0}=\varkappa_{(2)}(0);\quad \left(\frac{d\theta_{(22)}}{ds}\right)_{s=0}=\sqrt{\varkappa^2_{(2)}(0)-\varkappa^2_{(3)}(0)};$$

$$\left(\frac{d\theta_{(23)}}{ds}\right)_{s=0}=-\varkappa_{(3)}(0).$$

Enfin, en posant $i=3$ dans (6), et en usant de la quatrième formule de Frénet pour l'espace riemannien $V_4$

$$\frac{\delta n^{\alpha}_{(3)}}{\delta s} = -\varkappa_{(3)}\, n^{\alpha}_{(2)}, \tag{15}$$

nous aurons

$$\frac{d\theta_{(3j)}}{ds} = -\frac{\dfrac{\delta n^{\alpha}_{(3)}}{\delta s}\lambda_{(j)\alpha}}{\sin\theta_{(3j)}} = \frac{\varkappa_{(3)}\, n^{\alpha}_{(2)}\lambda_{(j)\alpha}}{\sin\theta_{(3j)}},$$

d'où

$$\left(\frac{d\theta_{(31)}}{ds}\right)_{s=0} = 0; \quad \left(\frac{d\theta_{(32)}}{ds}\right)_{s=0} = \varkappa_{(3)}(0); \quad \left(\frac{d\theta_{(33)}}{ds}\right)_{s=0} = \sqrt{\varkappa^2_{(3)}(0)}. \tag{16}$$

Afin de comparer les valeurs obtenues pour $\left(\frac{d\theta_{(ij)}}{ds}\right)_{s=0}$ avec celles des vitesses angulaires $\left(\frac{d\varphi_{(ij)}}{ds}\right)_{s=0}$ des vecteurs $n^{\alpha}_{(i)}$ par rapport aux vecteurs $\xi^{\alpha}_{(i)}$, pour $s=0$, (nous rappelons que les $\xi^{\alpha}_{(i)}$ sont les vecteurs du trièdre qui effectue le transport parallèle, et qui coïncide aussi, au moment initial, avec le trièdre de Fermi), nous donnerons ces dernières, sans démonstration[1]:

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{d\varphi_{(11)}}{ds}\right)_{s=0} = \sqrt{\varkappa^2_{(2)}(0) - x^2_{(1)}(0)}; \quad \left(\frac{d\varphi_{(12)}}{ds}\right)_{s=0} = -\varkappa_{(2)}(0); \quad \left(\frac{d\varphi_{(13)}}{ds}\right)_{s=0} = 0;\\
&\left(\frac{d\varphi_{(21)}}{ds}\right)_{s=0} = \varkappa_{(2)}(0); \quad \left(\frac{d\varphi_{(22)}}{ds}\right)_{s=0} = \sqrt{\varkappa^2_{(2)}(0) - \varkappa^2_{(3)}(0)}; \quad \left(\frac{d\varphi_{(23)}}{ds}\right)_{s=0} = -\varkappa_{(3)}(0);\\
&\left(\frac{d\varphi_{(31)}}{ds}\right)_{s=0} = 0; \quad \left(\frac{d\varphi_{(32)}}{ds}\right)_{s=0} = \varkappa_{(3)}(0); \quad \left(\frac{d\varphi_{(33)}}{ds}\right)_{s=0} = \sqrt{\varkappa^2_{(3)}(0)}\,.
\end{aligned} \tag{17}$$

Si nous comparons les valeurs obtenues pour $\left(\frac{d\theta_{(ij)}}{ds}\right)_{s=0}$ (v. (9), (12), (14) et (16)) avec celles de (17), nous voyons que les vitesses angulaires correspondantes sont égales, exception faite de $\left(\frac{d\theta_{(11)}}{ds}\right)_{s=0}$ et de $\left(\frac{d\varphi_{(11)}}{ds}\right)_{s=0}$, qui diffèrent. D'où la conclusion que le transport du trièdre de Fermi, par rapport au trièdre $\xi^{\alpha}_{(i)}$, est tel

[1]) Les valeurs des dérivées $\left(\frac{d\varphi_{(ij)}}{ds}\right)_{s=0}$ peuvent être facilement obtenues partant de l'expression du cosinus de l'angle $\varphi_{(ij)}$, de même que les valeurs $\left(\frac{\alpha\theta_{(ij)}}{ds}\right)_{s=0}$. Remarquons ici que, pour $i \neq j$, les valeurs de $\left(\frac{d\varphi_{(ij)}}{ds}\right)_{s=0}$ sont égales aux coordonnées correspondantes du tenseur de Darboux, associé à la courbe $C$ de l'espace-temps $V_4$ (cf. [1]).

que les angles $\psi_{(ij)}$ compris entre les vecteurs $\lambda^{\alpha}_{(i)}$ et $\xi^{\alpha}_{(j)}$, excepté l'angle $\psi_{(11)}$, restent constants lors du transport de ces deux systèmes de la position donnée par $s=0$ à une position infiniment voisine sur la courbe $C$.

Calculons enfin directement les valeurs des vitesses angulaires $\left(\frac{d\psi_{(ij)}}{ds}\right)_{s=0}$.

Puisqu'on a

$$\cos\psi_{(ij)}=\lambda^{\alpha}_{(i)}\,\xi_{(j)\,\alpha},$$

on obtiendra, en dérivant par rapport à $s$:

$$-\sin\psi_{(ij)}\,\frac{d\psi_{(ij)}}{ds}=\frac{\delta\lambda^{\alpha}_{(i)}}{\delta s}\,\xi_{(j)\alpha}+\lambda^{\alpha}_{(i)}\,\frac{\delta\xi_{(j)\alpha}}{\delta s},$$

d'où, en usant de l'équation (5) et le fait que $\xi_{(j)\alpha}$ subit un transport parallèle le long de $C$, nous avons

$$\frac{d\psi_{(ij)}}{ds}=-\frac{\varkappa_{(1)}\,\lambda_{(i)\,\beta}\,n^{\beta}_{(1)}\,u^{\alpha}\,\xi_{(j)\alpha}}{\sin\psi_{(ij)}}. \tag{18}$$

Nous considérons que les systèmes $\lambda^{\alpha}_{(i)}$ et $\xi^{\alpha}_{(i)}$ coïncidaient au moment initial. Pour $i\neq j$ les équations (18), à la suite de $\xi^{\alpha}_{(j)0}\perp u^{\alpha}_{0}$, donnent

$$\left(\frac{d\psi_{(ij)}}{ds}\right)_{s=0}=0,\ \text{pour}\ i\neq j. \tag{19}$$

Les expressions de $\frac{d\psi_{(ii)}}{ds}$ deviennent indéterminées pour $s=0$, ce qu'on voit de (18). En cherchant les valeurs limites de ces expressions pour $s=0$, nous obtenons sans difficulté

$$\left(\frac{d\psi_{(11)}}{ds}\right)_{s=0}=\sqrt{\varkappa^{2}_{(1)}(0)};\quad \left(\frac{d\psi_{(22)}}{ds}\right)_{s=0}=\left(\frac{d\psi_{(33)}}{ds}\right)_{s=0}=0. \tag{20}$$

Tout cela nous permet de conclure que, en première approximation, le trièdre de Fermi $\lambda^{\alpha}_{(i)}$ n'effectue pas de rotation *autour* de la courbe lors du transport, par rapport au trièdre parallèlement transporté $\xi^{\alpha}_{(i)}$. Par rotation du trièdre *autour* de la courbe, nous comprenons la rotation autour de sa tangente. D'autre part, la rotation autour d'une direction orthogonale par rapport à $C$ doit nécessairement exister lors du transport du trièdre de Fermi le long de $C$ qui n'est pas une géodésique de l'espace-temps $V_4$. Autrement le trièdre $\lambda^{\alpha}_{(i)}$ ne resterait pas orthogonal par rapport à $C$. C'est la raison pour laquelle la vitesse $\left(\frac{d\psi_{(11)}}{ds}\right)_{s=0}$ est différente de zéro. Remarquons qu'il s'agit d'une rotation qui ne peut être constatée du point de vue intrinsèque spatial du sous-espace à trois dimensions de l'espace englobant $V_4$.

Pour établir si le trièdre de Fermi effectue une rotation autour de la courbe lors d'un transport fini, représentons l'angle $\psi_{(ij)}(s)$ par une série de Mac Laurin au voisinage du point $s=0$:

$$\psi_{(ij)}(s)=\varphi_{(ij)}(0)+\left(\frac{d\psi_{(ij)}}{ds}\right)_{s=0}s+\frac{1}{2!}\left(\frac{d^2\psi_{(ij)}}{ds^2}\right)_{s=0}s^2+\cdots \tag{21}$$

On peut facilement calculer les valeurs des dérivées secondes ou d'ordre supérieur qui figurent au second membre de l'équation (21). Nous n'exposerons pas ici les détails de ce calcul. Nous avons obtenu des valeurs nulles pour toutes les dérivées secondes $\left(\frac{d^2\varphi_{(ij)}}{ds^2}\right)_{s=0}$, excepté pour $\left(\frac{d^2\varphi_{(11)}}{ds^2}\right)_{s=0}$, laquelle est différente de zéro et imaginaire. Cependant, les $\left(\frac{d^3\psi_{(ij)}}{ds^3}\right)_{s=0}$ sont réelles et différentes de zéro. Cela veut dire que le trièdre de Fermi effectue une rotation autour de la courbe, lors d'un transport fini. Comme nous avons, par exemple, $\left(\frac{d^3\psi_{(12)}}{ds^3}\right)_{s=0} = -\varkappa^2_{(1)}(0)\,\varkappa_{(2)}(0)$, on aura

$$\psi_{(12)}(s) = \frac{\pi}{2} - \frac{\varkappa^2_{(1)}(0)\,\varkappa_{(2)}(0)}{3\,!}\,s^3 + \cdots$$

Nous aurons des expressions semblables aussi pour les autres angles $\psi_{(ij)}(s)$. Si nous considérons, donc, la variable $s$ comme une quantité infinitésimale du premier ordre, les vitesses d'accroissement des angles $\psi_{(ij)}(s)$, lors du transport du trièdre $\lambda^{\alpha}_{(i)}$ le long de $C$, seront des quantités infinitésimales du deuxième ordre.

* * *

Considérons, à la fin, au lieu des trièdres $\lambda^{\alpha}_{(i)}$, $\xi^{\alpha}_{(i)}$ et $n^{\alpha}_{(i)}$, les *tétraèdres* $\lambda^{\alpha}_{(\mu)}$, $\xi^{\alpha}_{(\mu)}$ et $n^{\alpha}_{(\mu)}$ (où nous avons désigné par $n^{\alpha}_{(4)}$ le vecteur unitaire de la tangente $u^{\alpha}$, de manière que nous ayons $\lambda^{\alpha}_{(4)} \equiv n^{\alpha}_{(4)} \equiv u^{\alpha}$). Nous avons établi précédemment les vitesses $\left(\frac{d\theta_{(ij)}}{ds}\right)_{s=0}$, $\left(\frac{d\varphi_{(ij)}}{ds}\right)_{s=0}$ et $\left(\frac{d\psi_{(ij)}}{ds}\right)_{s=0}$. Cherchons maintenant les valeurs des vitesses de changement des angles pour $s=0$ — $\left(\frac{d\theta_{(i4)}}{ds}\right)_{s=0}$, $\left(\frac{d\theta_{(4\mu)}}{ds}\right)_{s=0}$, $\left(\frac{d\varphi_{(i4)}}{ds}\right)_{s=0}$, $\left(\frac{d\varphi_{(4\mu)}}{ds}\right)_{s=0}$, $\left(\frac{d\psi_{(i4)}}{ds}\right)_{s=0}$ et $\left(\frac{d\psi_{(4\mu)}}{ds}\right)_{s=0}$ où les notations des angles sont en accord avec celles que nous avions introduites antérieurement, de manière que $\theta_{(i4)}$, par exemple, représente l'angle entre le vecteur $n^{\alpha}_{(i)}$ et le vecteur $\lambda^{\alpha}_{(4)}$, $\varphi_{(4\mu)}$ représente l'angle entre $n^{\alpha}_{(4)}$ et $\xi^{\alpha}_{(\mu)}$, $\psi_{(i4)}$ celui entre $\lambda^{\alpha}_{(i)}$ et $\xi^{\alpha}_{(4)}$, etc.

Pour les cosinus des angles $\theta_{(i4)}$, $\theta_{(4\mu)}$ nous avons

$$\cos\theta_{(i4)} = n^{\alpha}_{(i)}\,\lambda_{(4)\alpha} \equiv n^{\alpha}_{(i)}\,u_{\alpha} = 0,$$

$$\cos\theta_{(4i)} = n^{\alpha}_{(4)}\,\lambda_{(i)\alpha} \equiv u^{\alpha}\,\lambda_{(i)\alpha} = 0,$$

$$\cos\theta_{(44)} = n^{\alpha}_{(4)}\,\lambda_{(4)\alpha} \equiv u^{\alpha}\,u_{\alpha} = -1,$$

ce qui signifie que les vitesses $\frac{d\theta_{(i4)}}{ds}$, $\frac{d\theta_{(4\mu)}}{ds}$ sont toujours égales à zéro, donc aussi pour $s=0$:

$$\left(\frac{d\theta_{(i4)}}{ds}\right)_{s=0} = \left(\frac{d\theta_{(4\mu)}}{ds}\right)_{s=0} = 0. \tag{22}$$

Ensuite, partant de

$$\cos\varphi_{(i\,4)} = n^{\alpha}_{(i)}\,\xi_{(4)\alpha}; \qquad \cos\varphi_{(4\,\mu)} = n^{\alpha}_{(4)}\,\xi_{(\mu)\alpha} \equiv u^{\alpha}\,\xi_{(\mu)\alpha},$$

et

$$\cos\psi_{(i\,4)} = \lambda^{\alpha}_{(i)}\,\xi_{(4)\alpha}, \qquad \cos\psi_{(4\,\mu)} = \lambda^{\alpha}_{(4)}\,\xi_{(\mu)\alpha} \equiv u^{\alpha}\,\xi_{(\mu)\alpha},$$

nous obtiendrons facilement, par le même procédé que pour les autres vitesses angulaires, les valeurs suivantes:

$$\begin{aligned}(23)\qquad &\left(\frac{d\varphi_{(14)}}{ds}\right)_{s=0} = -\left(\frac{d\varphi_{(41)}}{ds}\right)_{s=0} = \varkappa_{(1)}(0); \quad \left(\frac{d\varphi_{(24)}}{ds}\right)_{s=0} = \left(\frac{d\varphi_{(42)}}{ds}\right)_{s=0} = \\ &= \left(\frac{d\varphi_{(34)}}{ds}\right)_{s=0} = \left(\frac{d\varphi_{(43)}}{ds}\right)_{s=0} = 0; \quad \left(\frac{d\varphi_{(44)}}{ds}\right)_{s=0} = \sqrt{\varkappa^2_{(1)}(0)},\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}(24)\qquad &\left(\frac{d\psi_{(14)}}{ds}\right)_{s=0} = -\left(\frac{d\psi_{(41)}}{ds}\right)_{s=0} = \varkappa_{(1)}(0); \quad \left(\frac{d\psi_{(24)}}{ds}\right)_{s=0} = \left(\frac{d\psi_{(42)}}{ds}\right)_{s=0} = \\ &= \left(\frac{d\psi_{(34)}}{ds}\right)_{s=0} = \left(\frac{d\psi_{(43)}}{ds}\right)_{s=0} = 0; \quad \left(\frac{d\psi_{(44)}}{ds}\right)_{s=0} = \sqrt{\varkappa^2_{(1)}(0)}.\end{aligned}$$

Afin d'avoir une meilleure vue des vitesses angulaires calculées jusqu'à présent, représentons-les au moyen de matrices:

$$(25)\qquad \left(\frac{d\psi_{(\mu\nu)}}{ds}\right)_{s=0} = \begin{Bmatrix} \sqrt{-\varkappa^2_{(1)}} & 0 & 0 & \varkappa_{(1)} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\varkappa_{(1)} & 0 & 0 & \sqrt{\varkappa^2_{(1)}} \end{Bmatrix},$$

$$(26)\qquad \left(\frac{d\theta_{(\mu\nu)}}{ds}\right)_{s=0} = \begin{Bmatrix} \sqrt{\varkappa^2_{(2)}} & -\varkappa_{(2)} & 0 & 0 \\ \varkappa_{(2)} & \sqrt{\varkappa^2_{(2)}-\varkappa^2_{(3)}} & -\varkappa_{(3)} & 0 \\ 0 & \varkappa_{(3)} & \sqrt{\varkappa^2_{(3)}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{Bmatrix},$$

$$(27)\qquad \left(\frac{d\varphi_{(\mu\nu)}}{ds}\right)_{s=0} = \begin{Bmatrix} \sqrt{\varkappa^2_{(2)}-\varkappa^2_{(1)}} & -\varkappa_{(2)} & 0 & \varkappa_{(1)} \\ \varkappa_{(2)} & \sqrt{\varkappa^2_{(2)}-\varkappa^2_{(3)}} & -\varkappa_{(3)} & 0 \\ 0 & \varkappa_{(3)} & \sqrt{\varkappa^2_{(3)}} & 0 \\ -\varkappa_{(1)} & 0 & 0 & \sqrt{\varkappa^2_{(1)}} \end{Bmatrix}.$$

En comparant les valeurs correspondantes des vitesses qui figurent dans ces matrices, nous tirons la conclusion que le transport infinitésimal du tétraèdre orthonormé $n^{\alpha}_{(\mu)}$, le long d'une courbe orientée dans le temps (v. la matrice (27)), peut être considéré comme résultant de deux transports infinitésimaux: l'un est le transport de Fermi-Walker, auquel correspondent les vitesses qui figurent dans la matrice (25), et l'autre est la rotation du tétraèdre autour de la tangente, à laquelle correspondent les vitesses de changement des angles qui figurent dans la matrice (26).

Remarquons enfin, que les valeurs des vitesses (27) nous montrent que le transport infinitésimal du tétraèdre orthonormé $n^{\alpha}_{(\mu)}$ le long de notre courbe se réduit à un transport infinitésimal de Fermi-Walter, au cas où la deuxième et la troisième courbure de $C$ sont nulles.

## RÉFÉRENCES

[1] Анђелић, Т. П., *Генерализација йојма Дарбуова векшора и Ланкреова сшава за Риманов йросшор*, Зборник радова књ. XVIII М. И. књ. 2, стр. 147—158, Београд, 1952.

[2] Синг, Дж. Л, *Общая теория относительности*, Изд. иностр. лит., Москва, (1963).