PUBLICATIONS DE L'INSTITUT MATHÉMATIQUE
Nouvelle série, tome 10 (24), 1970. pp. 103—111

SUR LES ZÉROS DES POLYNÔMES DE COMPOSITION

D. M. Simeunović

(Communiqué le 17 Décembre 1969)

Nous démontrerons plusieurs théorèmes sur les zéros des polynômes de composition, qui généralisent certains résultats connus, et permettent d'obtenir, dans certains cas, des limites plus précises pour les modules des zéros des polynômes.

Nous remarquons aussi que le théorème 4 concernant les polynômes de composition peut être formulé pour des fonctions entières donnés par leurs séries de Taylor.

D'après la règle de Descartes, l'équation

$$C_0+C_1 z+\cdots+C_{n-1} z^{n-1}-C_n z^n=0, \quad C_0 C_n \neq 0, \quad C_k \geqslant 0 \qquad (k=0, 1, \ldots, n)$$

n'a qu'une racine positive, tandis que l'équation

$$C_0+C_1 z+\cdots+C_{p-1} z^{p-1}-C_p z^p+C_{p+1} z^{p+1}+\cdots+C_n z^n=0$$
$$C_0 C_p C_n \neq 0, \quad 0<p<n$$

peut avoir, au plus, deux racines positives (y compris le cas de racines doubles). En nous appuyant sur ces faits, nous démontrerons les deux théorèmes suivants:

Théorème 1. *Si R_1 est une racine positive de l'équation*

$$(1) \qquad \Phi_1(z) \equiv A_0+A_1 z+\cdots+A_{n-1} z^{n-1}-A_n z^n=0, \quad A_0 A_n \neq 0, \quad A_k \geqslant 0,$$

la racine positive R_s de l'équation

$$(2) \qquad \Phi_s(z) \equiv A_0^s+A_1^s z+\cdots+A_{n-1}^s z^{n-1}-A_n^s=0 \quad (1<s<\infty)$$

satisfera à la condition

$$(3) \qquad R_s \leqslant R_1^s.$$

Démonstration. Pour $z=R_1$, il résulte de (1) que $A_n R_1^n=\sum_{k=0}^{n-1} A_k R_1^k$, d'où

$$A_n^s R_1^{ns}=\left(\sum_{k=0}^{n-1} A_k R_1^k\right)^s \geqslant \sum_{k=0}^{n-1} A_k^s R_1^{ks},$$

c'est-à-dire

$$A_0^s+A_1^s R_1^s+\cdots+A_{n-1}^s R_1^{(n-1)s}-A_n^s R_1^{ns} \leqslant 0,$$

ce qui, d'après (2), donne $\Phi_s(R_1^s) \leqslant 0$.

Les inégalités $\Phi_s(0)>0$ et $\Phi_s(R_1^s)\leqslant 0$, ajoutées au fait que $\Phi_s(z)=0$ possède une seule racine positive R_s, assurent que $0<R_s\leqslant R_1^s$.

Théorème 2. *Si l'équation*

$$(4)\qquad F_1(z)\equiv A_0+A_1 z+\cdots+A_{p-1}z^{p-1}-A_p z^p+A_{p+1}z^{p+1}+\cdots+A_n z^n=0,$$

$$A_0 A_p A_n\neq 0,\qquad 0<p<n$$

a deux racines positives r_1 et R_1, $r_1<R_1$, l'équation

$$(5)\qquad F_s(z)\equiv A_0^s+A_1^s z+\cdots+A_{p-1}^s z^{p-1}-A_p^s z^p+A_{p+1}^s z^{p+1}+\cdots+A_n^s z^n=0$$

$$(1<s<\infty)$$

a également deux racines positives r_s et R_s, $r_s<R_s$, qui satisfont aux conditions

$$r_s\leqslant r_1^s,\qquad R_1^s\leqslant R_s.$$

Démonstration. Pour $z=r_1$ il résulte de (4) que $A_p r_1^p=\sum_{\substack{k=0\\k\neq p}}^n A_k r_1^k$, d'où

$$A_p^s r_1^{ps}=\Bigl(\sum_{\substack{k=0\\k\neq p}}^n A_k r_1^k\Bigr)^s\geqslant\sum_{\substack{k=0\\k\neq p}}^n A_k^s r_1^{ks},$$

c'est-à-dire

$$A_0^s+A_1^s r_1^s+\cdots+A_{p-1}^s r_1^{(p-1)s}-A_p^s r_1^{ps}+A_{p+1}^s r_1^{(p+1)s}+\cdots+A_n^s r_1^{ns}\leqslant 0,$$

ce qui, d'après (5), signifie que $F_s(r_1^s)\leqslant 0$.

Comme $F_s(0)>0$ et $F_s(r_1^s)\leqslant 0$, il n'existe qu'un seul r_s, avec $0<r_s\leqslant r_1^s$, pour lequel on a $F_s(r_s)=0$.

De même, pour $z=R_1$ il résulte de (4) que $A_p R_1^p=\sum_{\substack{k=0\\k\neq p}} A_k R_1^k$, d'où

$$A_p^s R_1^{ps}=\Bigl(\sum_{\substack{k=0\\k\neq p}}^n A_k R_1^k\Bigr)^s\geqslant\sum_{\substack{k=0\\k\neq p}}^n A_k^s R_1^{ks},$$

c'est-à-dire

$$A_0^s+A_1^s R_1^s+\cdots A_{p-1}^s R_1^{(p-1)s}-A_p^s R_1^{ps}+A_{p+1}^s R_1^{(p+1)s}+\cdots+A_n^s R_1^{ns}\leqslant 0,$$

ce qui, d'après (5), signifie que $F_s(R_1^s)\leqslant 0$.

Enfin, manifestement, $F_s(0)>0$ et $F_s(+\infty)>0$.

Le fait que $0<r_1<R_1$, et les inégalités $F_s(0)>0$, $F_s(r_1^s)\leqslant 0$, $F_s(R_1^s)\leqslant 0$ et $F_s(+\infty)>0$ démontrent que $F_s(z)=0$ possède au moins deux racines positives r_s et R_s, satisfaisant aux inégalités $0<r_s\leqslant r_1^s<R_1^s\leqslant R_s<+\infty$, donc aussi à $r_s<R_s$. En vertu de la règle de Descartes, $F_s(z)=0$ ne peut posséder d'autres racines positives.

Nous démontrerons maintenant encore deux théorèmes sur les polynômes de composition.

Théorème 3. *Soit R_s la racine positive* (*unique*) *de l'équation*

(6) $$A_0^s + A_1^s R_s + \cdots + A_{n-1}^s R_s^{n-1} - A_n^s R_s^n = 0, \quad A_n \neq 0, \quad s > 1.$$

Alors tous les zéros du polynôme de composition

(7) $$P(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k b_k z^k, \quad b_n \neq 0, \quad |a_k| = A_k, \quad |b_k| = B_k$$

sont contenus dans chacun des cercles

(8) $$|z| < R_s^{\frac{1}{s}} (1 + M_1^t)^{\frac{1}{t}} \leqslant R_1 (1 + M_1^t)^{\frac{1}{t}},$$

(9) $$|z| < R_s^{\frac{1}{s}} M_2 \leqslant R_1 M_2$$

où on a posé

$$M_1 = \max_{0 \leqslant k \leqslant n-1} \left(\frac{B_k}{B_n} \right)$$

$$M_2 = \max_{0 \leqslant k \leqslant n-1} \left(\frac{B_k}{B_n \alpha_k^{\frac{1}{t}}} \right)^{\frac{1}{n-k}}, \quad \alpha_k > 0, \quad \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k \leqslant 1$$

avec $\dfrac{1}{s} + \dfrac{1}{t} = 1.$

Démonstration. Soit

(10) $$z = u\lambda$$

un zéro du polynôme (7). On aura alors

$$A_n B_n |u|^n |\lambda|^n \leqslant \sum_{k=0}^{n-1} A_k |u|^k B_k |\lambda|^k,$$

c'est-à-dire

(11) $$A_n |u|^n \leqslant \sum_{k=0}^{n-1} A_k |u|^k \frac{B_k}{B_n} \cdot \frac{1}{|\lambda|^{n-k}}.$$

En appliquant au second membre de (11) l'inégalité de Hölder avec $\dfrac{1}{s} + \dfrac{1}{t} = 1$, on obtient

(12) $$A_n^s |u|^{ns} \leqslant \left(\sum_{k=0}^{n-1} A_k^s |u|^{ks} \right) \left(\sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{B_k}{B_n} \right)^t \cdot \frac{1}{|\lambda|^{(n-k)t}} \right)^{\frac{s}{t}}.$$

Soit $M_1 = \max\limits_{0 \leqslant k \leqslant n-1} \left(\dfrac{B_k}{B_n} \right)$ avec $|\lambda| > 1$. Il résulte alors de (12)

$$A_n^s |u|^{ns} \leqslant \left(\sum_{k=0}^{n-1} A_k^s |u|^{ks} \right) \left(\frac{M_1^t}{|\lambda|^t} \cdot \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{|\lambda|^{t\nu}} \right)^{\frac{s}{t}},$$

c'est-à-dire

$$A_n^s |u|^{ns} \leqslant \left(\sum_{k=0}^{n-1} A_k^s |u|^{ks}\right)\left(\frac{M_1^t}{|\lambda|^t - 1}\right)^{\frac{s}{t}}. \tag{13}$$

Pour $|\lambda| = (1+M_1^t)^{\frac{1}{t}}$, $|u| = \rho^{\frac{1}{s}}$ (13) se réduit à

$$A_n^s \rho^n \leqslant \sum_{k=0}^{n-1} A_k^s \rho^k$$

ce qui, d'après (6), signifie que $\rho \leqslant R_s$, d'où résulte, à la suite de (10), la première des inégalités de (8), tandis que la deuxième résulte de (3) (théorème 1).

Pour démontrer (9), supposons que nous ayons dans (12)

$$\left(\frac{B_k}{B_n} \cdot \frac{1}{|\lambda|^{n-k}}\right)^t \leqslant \alpha_k, \quad \alpha_k > 0, \quad \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k \leqslant 1,$$

ce qui signifie que

$$|\lambda| \leqslant \left(\frac{B_k}{B_n \alpha_k^{\frac{1}{t}}}\right)^{\frac{1}{n-k}}.$$

Pour

$$|\lambda| = \max_{0 \leqslant k \leqslant n-1} \left(\frac{B_k}{B_n \alpha_k^{\frac{1}{t}}}\right)^{\frac{1}{n-k}}. \quad |u| = \rho^{\frac{1}{s}} \tag{14}$$

on a

$$\sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{B_k}{B_n} \cdot \frac{1}{|\lambda|^{n-k}}\right)^{\frac{1}{t}} \leqslant 1$$

et (12) se réduit à

$$A_n \rho^n \leqslant \sum_{k=0}^{n-1} A_k \rho^k,$$

ce qui, d'après (6), nous donne $\rho \leqslant R_s$, d'où rèsulte, à la suite de (10) et de (14), la première des inégalités (9), tandis que la seconde résulte également de (3) (théorème 1)

Lorsque $t \to \infty$, alors $s \to 1$ et (9) se réduit à

$$|z| < R_1 \overline{M}_2, \quad \overline{M}_2 = \max_{0 \leqslant k \leqslant n-1} \left(\frac{B_k}{B_n}\right)^{\frac{1}{n-k}},$$

ce qui est un résultat connu, obtenu par D. Markovitch [4].

En particulier, pour $a_k = 1$ $(k = 0, 1, \ldots, n)$ le polynôme (7) se réduit à

$$P(z) = \sum_{k=0}^{n} b_k z^k. \tag{15}$$

Dans ce cas, la racine positive de l'équation (6) est R_s, $1<R_s<2$, ce qui signifie que tous les zéros du polynôme (15) sont contenus dans chacun des cercles

$$|z|<2^{\frac{1}{s}}\left(1+M_1^t\right)^{\frac{1}{t}}, \tag{16}$$

$$|z|<2^{\frac{1}{s}} M_2. \tag{17}$$

Lorsque $s\to\infty$, on a $t\to 1$ et (16) se réduit à

$$|z|<1+M_1,$$

et ceci est le résultat classique de Cauchy [1], tandis que (17) se réduit, dans ce cas, à

$$|z|<M_2^*=\max_{0\leqslant k\leqslant n-1}\left(\frac{B_k}{B_n\,\alpha_k}\right)^{\frac{1}{n-k}}. \quad \alpha_k<0, \quad \sum_{k=0}^{n-1}\alpha_k\leqslant 1$$

ce qui est le résultat obtenu par Fujiwara [3] (méthode de Fujiwara).

Quand $t\to\infty$, on a $s\to 1$ et (17) se réduit à

$$|z|<2\,M^*, \quad M^*=\max_{0\leqslant k\leqslant n-1}\left(\frac{B_k}{B_n}\right)^{\frac{1}{n-k}} \quad \text{(Montel [5], Dieudonné [2]).}$$

Exemple. Soient

$$f_1(z)=\sum_{k=0}^{5} a_k z^k=9+6z+3z^2+4z^3+z^4+z^5,$$

$$f_2(z)=\sum_{k=0}^{5} b_k z^k=1+z+3z^2+2z^3+4z^4+2z^5.$$

On aura alors

$$P(z)=\sum_{k=0}^{5} a_k b_k z^k=9+6z+9z^2+8z^3+4z^4+2z^5.$$

L'équation (6) pour $s=1$ dans ce cas est

$$9+6R_1+3R_1^2+4R_1^3+R_1^4-R_1^5=0;$$

sa racine positive est $R_1=3$. Nous avons ensuite, dans notre cas

$$\overline{M}_2=\max_{0\leqslant k\leqslant 4}\left(\frac{B_k}{B_5}\right)^{\frac{1}{5-k}}=2$$

d'où on a $R_1\overline{M}_2=6$.

Pour $s=t=2$ l'équation (6) est

$$81+36R_2+9R_2^2+16R_2^3+R_2^4-R_2^5=0$$

avec la racine positive $R_2<5$. Nous avons $M_1=\max\limits_{0\leqslant k\leqslant 4}\left(\frac{B_k}{B_5}\right)=2$, ce qui donne d'après (8)

$$R_2^{\frac{1}{2}}(1+M_1^2)^{\frac{1}{2}}<\sqrt{25}=5.$$

Donc, pour $s=t=2$ tous les zéros du polynôme de composition $P(z)$ sont contenus, pour l'exemple considéré, dans le cercle $|z|<5$, tandis que du théorème de D. Markovitch [4] on aurait dans ce cas la conclusion que tous les zéros du polynôme donné $P(z)$ se trouvent dans le cercle $|z|\leqslant 6$.

Théorème 4. *Si l'équation*

$$(18)\qquad A_0^s+A_1^s R_s+\cdots+A_{p-1}^s R_s^{p-1}-A_p^s R_s^p+A_{p+1}^s R_s^{p+1}+\cdots+A_n^s R_s^n=0,$$
$$A_p\neq 0\quad (1<s<\infty)$$

a deux racines positives R_s' et R_s'', avec $R_s'<R_s''$, le polynôme de composition

$$(19)\qquad f(z)=\sum_{k=0}^{n} a_k b_k z^k,\quad b_p\neq 0\quad |a_k|=A_k,\quad |b_k|=B_k$$

admet alors exactement p zéros dans le cercle

$$(20)\qquad |z|<R_s'^{\frac{1}{s}}M$$

et pas de zéros dans l'anneau circulaire

$$(21)\qquad R_s'^{\frac{1}{s}}M<|z|<R_s''^{\frac{1}{s}}M,$$

s'il existe un nombre positif M tel que

$$(22)\qquad \max_{0\leqslant k\leqslant p-1}\left(\frac{B_k}{B_p\,\alpha_k^{\frac{1}{t}}}\right)^{\frac{1}{p-k}}\leqslant M\leqslant \min_{p+1\leqslant k\leqslant n}\left(\frac{B_p\,\alpha_k^{\frac{1}{t}}}{B_k}\right)^{\frac{1}{k-p}}$$

avec $\alpha_k>0,\quad \sum\limits_{\substack{k=0\\k\neq p}}^{n}\alpha_k\leqslant 1;\quad \frac{1}{s}+\frac{1}{t}=1,\quad t>1.$

Démonstration. Soit

$$z=u\lambda,\quad (|\lambda|=M)$$

et ε un nombre positif pour lequel on a

$$(23)\qquad R_s'+\varepsilon\leqslant|u|^s\leqslant R_s''-\varepsilon.$$

Il résulte alors de (18) que

$$A_p^s|u|^{ps}>\sum_{\substack{k=0\\k\neq p}}^{n}A_k^s|u|^{ks},$$

d'où

$$(24) \qquad A_p |u|^p > \left(\sum_{\substack{k=0 \\ k \neq p}}^{n} A_k^s |u|^{ks} \right)^{\frac{1}{s}}.$$

Soit $M = |\lambda| > 1$ de façon que nous ayons

$$(25) \qquad \left(\sum_{\substack{k=0 \\ k \neq p}}^{n} \left(\frac{B_k}{B_p} \cdot \frac{1}{M^{p-k}} \right)^t \right)^{\frac{1}{t}} < 1.$$

Il résulte alors de (24), compte tenu de (25) et de l'inégalité de Hölder avec $\frac{1}{s} + \frac{1}{t} = 1, \quad t > 1$ que

$$A_p |u|^p > \left(\sum_{\substack{k=0 \\ k \neq p}}^{n} A_k^s |u|^{ks} \right)^{\frac{1}{s}} \left(\sum_{\substack{k=0 \\ k \neq p}}^{n} \left(\frac{B_k}{B_p} \cdot \frac{1}{M^{p-k}} \right)^t \right)^{\frac{1}{t}} \geqslant \sum_{\substack{k=0 \\ k \neq p}}^{n} A_k |u|^k \left(\frac{B_k}{B_p} \cdot \frac{1}{M^{p-k}} \right),$$

d'où on a, à la suite de $M = |\lambda|$, que

$$(26) \qquad A_p B_p |u\lambda|^p > \sum_{\substack{k=0 \\ k \neq p}}^{n} A_k B_k |u\lambda|^k.$$

Soient

$$(27) \qquad P(z) = \sum_{\substack{k=0 \\ k \neq p}}^{n} a_k b_k z^k, \quad Q(z) = a_p b_p z^p.$$

On a, sur le cercle $|z| = |u\lambda|$, de (27), compte tenu de (26), que

$$|P(z)| \leqslant \sum_{\substack{k=0 \\ k \neq p}}^{n} A_k B_k |u\lambda|^k < A_p B_p |u\lambda|^p = |Q(z) \neq 0,$$

d'où il résulte, d'après le théorème ds Rouché, que dans le cercle $|z| < |u\lambda|$, $f(z) = P(z) + Q(z)$ a le même nombre de zéros que $Q(z)$, donc p zéros. Étant donné que $|u|$, d'après (23), est un nombre aıbitraire tel que

$$R_s'^{\frac{1}{s}} < |u| < R_s''^{\frac{1}{s}}$$

d'où

$$R_s'^{\frac{1}{s}} M < |u\lambda| < R_s''^{\frac{1}{s}} M, \quad (|\lambda| = M),$$

il en résulte que la fonction $f(z)$ a exactement p zéros dans le cercle $|z| < R_s'^{\frac{1}{s}} M$, et qu'elle n'a pas de zéros dans le domaine $R_s'^{\frac{1}{s}} M < |z| < R_s''^{\frac{1}{s}} M$, où M est nombre positif pour lequel sont satisfaites les relations (22).

Dans notre cas M est choisi dans (22) de manière que

$$\left(\frac{B_k}{B_p}\cdot\frac{1}{M^{p-k}}\right)^t \leqslant \alpha_k, \quad \alpha_k>0, \quad \sum_{\substack{k=0\\k\neq p}}^{n} \alpha_k \leqslant 1.$$

Les dernières relations sont satisfaites si

$$M \geqslant \left(\frac{B_k}{B_p\,\alpha_k^{\frac{1}{t}}}\right)^{\frac{1}{p-k}}, \quad k=0,\ 1, \ldots,\ p-1,$$

$$M \leqslant \left(\frac{B_p\,\alpha_k^{\frac{1}{t}}}{B_k}\right)^{\frac{1}{k-p}}, \quad k=p+1,\ p+2, \ldots,\ n,$$

c'est-à-dire si les relations (22) sont satisfaites, ce qui démontre complètement le théorème 4.

Si l'équation (18) a deux racines positives distinctes R_1' et R_1'' pour $s=1$, elle a, d'après le théorème 2, deux racines positives distinctes également R_s' et R_s'' pour chaque $s>1$. Pour cette raison nous avons que $t\to\infty$ quand $s\to 1$, et le polynôme (19) a, d'après (20), exactement p zéros dans le cercle

$$|z|<R_1'\overline{M}$$

et d'après (21), pas de zéros dans l'anneau circulaire

$$R_1'\overline{M}<|z|<R_1''\overline{M}$$

où on a

$$\max_{0\leqslant k\leqslant p-1}\left(\frac{B_k}{B_p}\right)^{\frac{1}{p-k}} \leqslant \overline{M} \leqslant \min_{p+1\leqslant k\leqslant n}\left(\frac{B_p}{B_k}\right)^{\frac{1}{k-p}}.$$

Si on a encore $b_k=1$ $(k=0,\ 1, \ldots,\ n)$, alors $\overline{M}=1$, et on obtient dans ce cas le théorème classique de Pellet [6] pour le polynôme $\sum_{k=0}^{n} a_k z^k$.

Remarque. Par le même procédé utilisé dans la démonstration du théorème 4 on peut démontrer le

Théorème 4'.* *Soit la fonction donnée,* $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$, *converge absolument pour tous les* z *et soit la fonction* $\sum_{k=0}^{\infty} b_k z^k$ *admet un rayon de convergence* $r>0$. *Si l'équation*

$$\sum_{\substack{k=0\\k\neq p}}^{\infty} A_k^s R_s^k - A_p^s R_s^p = 0 \quad (A_p\neq 0,\ A_k=|a_k|;\ 1<s<\infty)$$

*) Je tiens à remercier le professeur Stojaković de l'Université de Novi Sad, de m'avoir suggéré l'extension du théorème 4 aux fonctions entières.

possède deux racines positives R'_s *et* R''_s, *avec* $R'_s < R''_s$, *alors la fonction composée*

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k b_k z^k \quad (b_p \neq 0,\ B_k = |b_k|)$$

a exactement p zéros dans le cercle

$$|z| < R'^{\frac{1}{s}}_s M$$

et pas de zéros dans l'anneau circulaire

$$R'^{\frac{1}{s}}_s M < |z| < R''^{\frac{1}{s}}_s M$$

à condition qu'il existe un nombre positif M tel que

$$\max_{0 \leqslant k \leqslant p-1} \left(\frac{B_k}{B_p \alpha_k^{\frac{1}{t}}} \right)^{\frac{1}{p-k}} \leqslant M \leqslant \min_{k \geqslant p+1} \left(\frac{B_p \alpha_k^{\frac{1}{t}}}{B_k} \right)^{\frac{1}{k-p}}$$

avec

$$\alpha_k > 0, \quad \sum_{\substack{k=0 \\ k \neq p}}^{\infty} \alpha_k \leqslant 1; \quad \frac{1}{s} + \frac{1}{t} = 1, \quad t > 1.$$

RÉFÉRENCES

[1] Cauchy, A. L., *Exercices de mathématique*, Oeuvres (2), Vol. 9, 1829, 122. — *Calcul des indices des fonctions*, Oeuvres (2), Vol. 1, 1829, 416—446. — Journ. Ecole Polytech. 25 (1837), 176—229.

[2] Dieudonné, J., *La théorie analytique des polynômes d'une variable*, Mém. Sci. Math. 93 (1938).

[3] Fujiwara, M., *Ueber die obere Schranke des absoluten Betrages des Wurzeln einer algebraischen Gleichung*, Tôhoku Math. Journ. 10 (1916), 167—171.

[4] Markovitch, D., *On the composite polynomials*, Bull. Soc. Math. Phys. Serbie 3 (1951), No. 3—4, 11—14.

[5] Montel, P., *Sur la limite supérieure du module des racines d'une équation algébrique*, C. R. Soc. Sci. Varsovie 24 (1932), 317—326, — *Sur la limite supérieure des modules des zéros des polynômes*, C. R. Acad. Sci. Paris 193 (1931), 974—976.

[6] Pellet, M. A., *Sur une mode de séparation des racines des équations et la formule de Lagrange*, Bull. Sci. Math. 5 (1881), 393—395.