PUBLICATIONS DE L'INSTITUT MATHÉMATIQUE
Nouvelle série, tome 10 (24), (1970.) 87—101

ÉQUATION FONCTIONNELLE CYCLIQUE LINÉAIRE ET NON HOMOGÈNE

Budimir Zarić

(Communiqué le 5 Décembre 1969)

Dans cet article on traite le problème de résolution de l'équation fonctionnelle cyclique.

$$a_1 f(x_1, x_2, x_3, x_4)+a_2 f(x_2, x_3, x_4, x_1)+a_3 f(x_3, x_4, x_1, x_2)+ \\ +a_4 f(x_4, x_1, x_2, x_3)=g(x_1, x_2, x_3, x_4), \tag{1}$$

où a_i, $x_j (i, j=1, 2, 3, 4))$ sont des nombres réels, la fonction $g(x_1, x_2, x_3, x_4)$ est donnée et la fonction $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$ est inconnue. On va tout d'abord démontrer que chacune des équations (1) est équivalente à une des équations fonctionnelles suivantes:

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4)=$$

$$=\frac{(a_1+a_3)[g(x_1, x_2, x_3, x_4)+g(x_3, x_4, x_1, x_2)]-(a_2+a_4)[g(x_2, x_3, x_4, x_1)+g(x_4, x_1, x_2, x_3]}{2[(a_1+a_3)^2-(a_2+a_4)};$$

$$+\frac{(a_1-a_3)[g(x_1, x_2, x_3, x_4)-g(x_3, x_4, x_1, x_2)]-(a_2-a_4)[g(x_2, x_3, x_4, x_1)-g(x_4, x_1, x_2, x_3)]}{2[a_1-a_3)^2+(a_2-a_4)^2]};$$

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4)+f(x_3, x_4, x_1, x_2)=\frac{a_1 g(x_1, x_2, x_3, x_4)-a_2 g(x_2, x_3, x_4, x_1)}{a_1{}^2-a_2{}^2};$$

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4)-f(x_3, x_4, x_1, x_2)=\frac{a_1 g(x_1, x_2, x_3, x_4)-a_2 g(x_2, x_3, x_4\ x_1)}{a_1{}^2+a_2{}^2};$$

$$0=g \tag{2}$$

$$+f(x_1, x_2, x_3, x_4)+f(x_2, x_3, x_4, x_1)=\frac{g(x_1, x_2, x_3, x_4)+g(x_3, x_4, x_1, x_2)}{2(a_1+a_3)}+$$

$$+\frac{(a_1-a_3)[g(x_1, x_2, x_3, x_4)-g(x_4, x_1, x_2, x_3)]+(a_2-a_4)[g(x_1, x_2, x_3, x_4)-g(x_2, x_3, x_4, x_1)]}{(a_1-a_3)^2+(a_2-a_4)^2};$$

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4)+f(x_2, x_3, x_4, x_1)+f(x_3, x_4, x_1, x_2)+f(x_4, x_1, x_2, x_3=\frac{g(x_1, x_2, x_3, x_4)}{a_1};$$

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4)-f(x_2, x_3, x_4, x_1)=\frac{g(x_1, x_2, x_3, x_4)+g(x_3, x_4, x_1, x_2)}{2(a_2+a_3)}+$$

$$+\frac{(a_1-a_3)[g(x_1, x_2, x_3, x_4)+g(x_4, x_1, x_2, x_3)]-(a_2-a_4)[g(x_1, x_2, x_3, x_4)+g(x_2, x_3, x_4, x_1)]}{(a_1-a_3)^2+(a_2-á_4)^2};$$

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4)-f(x_2, x_3, x_4, x_1)+f(x_3, x_4, x_1, x_2)-f(x_4, x_1, x_2, x_3)=\frac{g\, x_1, x_2, x_3, x_4)}{a_1}.$$

On va décrire aussi un procédé au moyen duquel on peut, pour chaque équation donnée, déterminer celle des équations (2) à laquelle elle est équivalente.

Par exemple, si:

$$a_2+a_4=0$$

$$a_1+a_3=0 \quad \text{et} \quad a_1{}^2+a_2{}^2\neq 0,$$

l'équation (1) équivaut à l'équation

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4)-f(x_3, x_4, x_1, x_2)=\frac{a_1\, g(x_1, x_2, x_3\; x_4)-a_2\, g(x_2, x_3, x_4, x_1)}{a_1{}^2+a_2{}^2}$$

Enfin, en appliquant la méthode de S. B. Prešić [1] on va trouver la solution générale de chacune des équations (2).

1. Soit donnée l'équation

$$\text{(1)} \qquad a_1 f(x_1, x_2, x_3, x_4)+a_2 f(x_2, x_3, x_4, x_1)+a_3 f(x_3, x_4, x_1, x_2)+$$
$$+a_4 f(x_4, x_1, x_2, x_3)=g(x_1, x_2, x_3, x_4),$$

où a_1, a_2, a_3, a_4, sont des constantes réelles, la fonction réelle g des variables réelles x_1, x_2, x_3, x_4 est donnée et la fonction réelle f des variables réelles x_1, x_2, x_3, x_4 est inconnue.

Cette équation est cyclique linéaire et non homogène.

En effectuant les permutations cyclique des variables, on obtient les équations suivantes.

$$\text{(3)} \qquad \begin{aligned} & a_4 f(x_1, x_2, x_3, x_4)+a_1 f(x_2, x_3, x_4, x_1)+a_2 f(x_3, x_4, x_1, x_2)+ \\ & \qquad +a_3 f(x_4, x_1, x_2, x_3)=g(x_2, x_3, x_4, x_1) \\ & a_3 f(x_1, x_2, x_3, x_4)+a_4 f(x_2, x_3, x_4, x_1)+a_1 f(x_3, x_4, x_1, x_2)+ \\ & \qquad +a_2 f(x_4, x_1, x_2, x_3)=g(x_3, x_4, x_1, x_2) \\ & a_2 f(x_1, x_2, x_3, x_4)+a_3 f(x_2, x_3, x_4, x_1)+a_4 f(x_3, x_4, x_1, x_2)+ \\ & \qquad +a_1 f(x_4, x_1, x_2, x_3)=g(x_4, x_1, x_2\; x_3). \end{aligned}$$

Si l'on pose:

$$f(x_2, x_3, x_4, x_1)=\overline{f},$$

$$f(x_3, x_4, x_1, x_2)=\overline{\overline{f}},$$

$$f(x_4, x_1, x_2, x_3)=\overline{\overline{\overline{f}}},$$

le système formé des équations (1) et (3) prend la forme suivante:

$$
(4) \qquad
\begin{aligned}
&a_1 f + a_2 \overline{f} + a_3 \overline{\overline{f}} + a_4 \overline{\overline{\overline{f}}} = g,\\
&a_4 f + a_1 \overline{f} + a_2 \overline{\overline{f}} + a_3 \overline{\overline{\overline{f}}} = \overline{g},\\
&a_3 f + a_4 \overline{f} + a_1 \overline{\overline{f}} + a_2 \overline{\overline{\overline{f}}} = \overline{\overline{g}},\\
&a_2 f + a_3 \overline{f} + a_4 \overline{\overline{f}} + a_1 \overline{\overline{\overline{f}}} = \overline{\overline{\overline{g}}},
\end{aligned}
$$

Introduisons les désignations:

$$
\begin{aligned}
&a_1 + a_3 = 2\,M; \qquad a_2 + a_4 = 2\,P;\\
&a_1 - a_3 = 2\,N \quad \text{et} \quad a_2 - a_4 = 2\,Q.
\end{aligned}
$$

On a $a_1 = M + N$; $a_2 = P + Q$; $a_3 = M - N$; $a_4 = P - Q$ et le système (4) devient.

$$
(5) \qquad
\begin{aligned}
&M(f + \overline{\overline{f}}) + P(\overline{f} + \overline{\overline{\overline{f}}}) + N(f - \overline{\overline{f}}) + Q(\overline{f} - \overline{\overline{\overline{f}}}) = g,\\
&P(f + \overline{\overline{f}}) + M(\overline{f} + \overline{\overline{\overline{f}}}) - Q(f - \overline{\overline{f}}) + N(\overline{f} - \overline{\overline{\overline{f}}}) = \overline{g},\\
&M(f + \overline{\overline{f}}) + P(\overline{f} + \overline{\overline{\overline{f}}}) - N(f - \overline{\overline{f}}) - Q(\overline{f} - \overline{\overline{\overline{f}}}) = \overline{\overline{g}}\\
&P(f + \overline{\overline{f}}) + M(\overline{f} + \overline{\overline{\overline{f}}}) + Q(f - \overline{\overline{f}}) - N(\overline{f} - \overline{\overline{\overline{f}}}) = \overline{\overline{\overline{g}}},
\end{aligned}
$$

c'est-à-dire:

$$
(6) \qquad
\begin{aligned}
&M(f + \overline{\overline{f}}) + P(\overline{f} + \overline{\overline{\overline{f}}}) = \frac{1}{2}(g + \overline{\overline{g}})\\
&P(f + \overline{\overline{f}}) + M(\overline{f} + \overline{\overline{\overline{f}}}) = \frac{1}{2}(\overline{g} + \overline{\overline{\overline{g}}})\\
&N(f - \overline{\overline{f}}) + Q(\overline{f} - \overline{\overline{\overline{f}}}) = \frac{1}{2}(g - \overline{\overline{g}})\\
&-Q(f - \overline{\overline{f}}) + N(\overline{f} = \overline{\overline{\overline{f}}}) = \frac{1}{2}(\overline{g} - \overline{\overline{\overline{g}}}),
\end{aligned}
$$

les systèmes (5) et (6) étant évidemment équivalents.

Le déterminant du système (4) est:

$$
(7) \qquad
\begin{aligned}
\Delta &= [(a_1 + a_3)^2 - (a_2 + a_4)^2]\,[(a_1 - a_3)^2 + (a_2 - a_4)^2] =\\
&= 16\,(M^2 - P^2)(N^2 + Q^2)
\end{aligned}
$$

Décomposons le système (6) en deux sous-systèmes

$$(8) \qquad M(f+\bar{\bar{f}})+P(\bar{f}+\bar{\bar{\bar{f}}})=\frac{1}{2}(g+\bar{\bar{g}}),$$

$$P(f+\bar{\bar{f}})+M(\bar{f}+\bar{\bar{\bar{f}}})=\frac{1}{2}(\bar{g}+\bar{\bar{\bar{g}}}),$$

$$(9) \qquad N(f-\bar{\bar{f}})+Q(\bar{f}-\bar{\bar{\bar{f}}})=\frac{1}{2}(g-\bar{\bar{g}}),$$

$$-Q(f-\bar{\bar{f}})+N(\bar{f}-\bar{\bar{\bar{f}}})=\frac{1}{2}(\bar{g}-\bar{\bar{\bar{g}}}),$$

dont les déterminants sont les deux derniers facteurs du produit (7), respectivement.

Les assertions suivantes sont évidentes:

(I) Si $M^2-P^2\neq 0$, le système (8) est équivalent à l'équation.

$$f+\bar{\bar{f}}=\frac{(a_1+a_3)(g+\bar{\bar{g}})-(a_2+a_4)(\bar{g}+\bar{\bar{\bar{g}}})}{(a_1+a_3)^2-(a_2+a_4)^2}$$

(II) Si $N^2+Q^2\neq 0$, le système (9) est équivalent à l'équation

$$f-\bar{\bar{f}}=\frac{(a_1-a_3)(g-\bar{\bar{g}})-(a_2-a_4)(\bar{g}-\bar{\bar{\bar{g}}})}{(a_1-a_3)^2+(a_2-a_4)^2}.$$

(III) Si $N=Q=0$, le système (9) est équivalent à l'équation

$$g-\bar{\bar{g}}=0.$$

(IV) Si $M^2-P^2=0$ et $M=P=0$, le système (8) est équivalent à l'équation

$$g+\bar{\bar{g}}=0.$$

(V) Si $M^2-P^2=0$ et $M=P\neq 0$, le système (8) est équivalent à l'équation

$$f+\bar{f}+\bar{\bar{f}}+\bar{\bar{\bar{f}}}=\frac{1}{a_1+a_3}(g+\bar{\bar{g}}),$$

(VI) Si $M^2-P^2=0$ et $P=-M\neq 0$, le système (8) est équivalent à l'équation

$$f-\bar{f}+\bar{\bar{f}}-\bar{\bar{\bar{f}}}=\frac{1}{a_1+a_2}(g+\bar{\bar{\bar{g}}}).$$

D'après (I)—(VI), on a immédiatement les conclusions suivantes:

I. Si $M^2-P^2\neq 0$, $N^2+Q^2\neq 0$, le système (6) est équivalent au système:

$$f+\bar{\bar{f}}=\frac{(a_1+a_3)(\bar{\bar{g}}+g)-(a_2+a_4)(\bar{g}+\bar{\bar{\bar{g}}})}{(a_1+a_3)^2-(a_2+a_4)^2},$$

$$f-\bar{\bar{f}}=\frac{(a_1-a_3)(\bar{\bar{g}}-g)-(a_2-a_4)(\bar{g}-\bar{\bar{\bar{g}}})}{(a_1-a_3)^2+(a_2-a_4)^2},$$

c'est-à-dire à l'équation:

$$f=\frac{(a_1+a_3)(g+\bar{\bar{g}})-(a_2+a_4)(\bar{g}+\bar{\bar{\bar{g}}})}{2\,[(a_1+a_3)^2-(a_2+a_4)^2]}+\frac{(a_1-a_3)(g-\bar{\bar{g}})-(a_3-a_4)(\bar{g}-\bar{\bar{\bar{g}}})}{2\,[(a_1-a_3)^2+(a_2-a_4)^2]}.$$

II. Si $M^2-P^2\neq 0$, $N=Q=0$, le système (6) est équivalent au système.

$$f+\bar{\bar{f}}=\frac{(a_1+a_3)(g+\bar{\bar{g}})-(a_2+a_4)(\bar{g}+\bar{\bar{\bar{g}}})}{(a_1+a_3)^2-(a_2+a_4)^2}$$

$$g-\bar{\bar{g}}=0,$$

c'est-à-dire à l'équation:

$$f+\bar{\bar{f}}=\frac{a_1 g-a_2 g}{a_1{}^2-a_2{}^2}$$

III. Si $M^2-P^2=0$, $N^2+Q^2=0$, et $P=M=0$, le système (6) est équivalent au système.

$$g+\bar{\bar{g}}=0$$

$$f-\bar{\bar{f}}=\frac{(a_1-a_3)(g-\bar{\bar{g}})-(a_2-a_4)(\bar{g}-\bar{\bar{\bar{g}}})}{(a_1-a_3)^2+(a_2-a_4)^2},$$

c'est-à-dire à l'équation

$$f-\bar{\bar{f}}=\frac{a_1 g-a_2\bar{g}}{a_1{}^2+a_2{}^2}.$$

IV. Si $M^2-P^2=0$, $P=M=0$, $N=Q=0$, le système (6) est équivalent à l'équation

$$0=g.$$

V. Si $M^2-P^2=0$, $P=M\neq 0$, $N^2+Q^2\neq 0$, le système (6) est équivalent au système

$$f+\bar{f}+\bar{\bar{f}}+\bar{\bar{\bar{f}}}=\frac{1}{a_1+a_3}\quad(g+\bar{\bar{g}})$$

$$f-\bar{\bar{f}}=\frac{(a_1-a_3)(g-\bar{\bar{g}})-(a_2-a_4)(\bar{g}-\bar{\bar{\bar{g}}})}{(a_1-a_3)^2+(a_2-a_4)^2},$$

c'est-à-dire à l'équation

$$f+\bar{f}=\frac{1}{2\,(a_1+a_3)}(g+\bar{\bar{g}})+\frac{(a_1-a_3)(g+\bar{g}-\bar{\bar{g}}-\bar{\bar{\bar{g}}})-(a_2-a_1)(\bar{g}+\bar{\bar{g}}-\bar{\bar{\bar{g}}}-g)}{2\,[a_1-a_3)^2+(a_2-a_4)^2}.$$

VI. Si $M^2-P^2=0$, $P=M\neq 0$, $N=Q=0$, le système (6) est équivalent au système

$$f+\bar{f}+\bar{\bar{f}}+\bar{\bar{\bar{f}}}=\frac{1}{a_1+a_3}(g+\bar{\bar{g}})$$

$$g=\bar{\bar{g}}=0,$$

c'est-à-dire à l'équation:

$$f+\bar{f}+\bar{\bar{f}}+\bar{\bar{\bar{f}}}=\frac{2}{a_1+a_3}\,g.$$

VII. Si $M^2-P^2=0$, $P=-M\neq 0$, $N^2+Q^2\neq 0$, le système (6) est équivalent au système:

$$f-\bar{f}+\bar{\bar{f}}-\bar{\bar{\bar{f}}}=\frac{1}{a_1+a_3}(g+\bar{\bar{g}}),$$

$$f-\bar{\bar{f}}=\frac{(a_1-a_3)(g-\bar{\bar{g}})-(a_2-a_4)(\bar{g}-\bar{\bar{\bar{g}}})}{(a_1-a_3)^2+(a_2-a_4)^2},$$

c'est-à-dire à l'équation

$$f-\bar{f}=\frac{3}{2(\bar{a}_1+a_3)}(g+\bar{\bar{g}})+\frac{(a_1-a_3)(g-\bar{g}-\bar{\bar{g}}+\bar{\bar{\bar{g}}})-(a_2-a_4)(g+\bar{g}-\bar{\bar{g}}-\bar{\bar{\bar{g}}})}{2[(a_1-a_3)^2+(a_2-a_4)^2]}.$$

VIII. Si $M^2-P^2=0$, $P=-M\neq 0$, $N=Q=0$, le système (6) est équivalent au système

$$f-\bar{f}+\bar{\bar{f}}-\bar{\bar{\bar{f}}}=\frac{1}{a_1+a_3}(g+\bar{\bar{g}}),$$

$$g-\bar{\bar{g}}=0,$$

c'est-à-dire à l'équation:

$$f-\bar{f}+\bar{\bar{f}}-\bar{\bar{\bar{f}}}=\frac{2g}{a_1+a_3}.$$

Nous avons donc démontré le lemme suivant.

Lemme 1. *L'équation fonctionnelle* (1) *est équivalente à l'équation*:

I. $$f=\frac{(a_1+a_3)(g+\bar{\bar{g}})-(a_2+a_4)(\bar{g}+\bar{\bar{\bar{g}}})}{2[(a_1+a_3)^2-(a_2+a_4)^2]}+\frac{(a_1-a_3)(\bar{g}-\bar{\bar{\bar{g}}})-(a_2-a_4(\bar{g}-\bar{\bar{\bar{g}}})}{2[(a_1-a_3)^2+(a_2-a_4)^2]},$$

si $(a_1+a_3)^2-(a_2+a_4)^2\neq 0$ *et* $(a_1-a_3)^2+(a_2-a_4)\neq 0$;

II. $$f+\bar{\bar{f}}=\frac{a_1 g-a_2\bar{g}}{a_1^2-a_2^2},$$

si $(a_1+a_3)^2-(a_2+a_4)^2\neq 0$, $a_1=a_3$ et a_2-a_4;

III. $$f-\bar{\bar{f}}=\frac{a_1 g-a_2\bar{g}}{a_1^2+a_2^2},$$

si $a_1+a_3=0$, $a_2+a_4=0$ *et* $a_1^2+a_2^2\neq 0$;

IV. $0=g$, si $a_1=a_2=a_3=a_4=0$;

V. $$f+\overline{f}=\frac{g+\overline{\overline{g}}}{2(a_1+a_3)}+$$

$$+\frac{(a_1-a_3)[(g+\overline{g}-\overline{\overline{g}}-\overline{\overline{\overline{g}}})}{2[(a_1-a_3)^2+(a_2-a_4)^2]}-\frac{(a_2-a_4)(g+\overline{g}-\overline{\overline{g}}-\overline{\overline{\overline{g}}})}{2[(a_1-a_3)^2+(a_2-a_4)^2]},$$

si $$a_1+a_4=a_2+a_4\neq 0 \quad et \quad (a_1-a_3)^2+(a_2-a_4)^2\neq 0;$$

VI. $$f+\overline{f}+\overline{\overline{f}}+\overline{\overline{\overline{f}}}=\frac{2}{a_1+a_3}\cdot g,$$

si $$a_1=a_3-a_3=a_4\neq 0;$$

VII. $$f-\overline{f}=\frac{g+\overline{\overline{g}}}{2(a_1+a_3)}+\frac{(a_1-a_3)(g-\overline{g}-\overline{\overline{g}}+\overline{\overline{\overline{g}}})}{2[(a_1-a_3)^2+(a_2-a_4)^2]}-\frac{(a_2-a_4)(g+\overline{g}-\overline{\overline{g}}-\overline{\overline{\overline{g}}})}{2[(a_1-a_3)^2+(a_2-a_4)^2]},$$

si: $$a_2+a_4=-(a_1+a_3)\neq 0 \quad et \quad (a_1-a_3)^2+(a_2-a_4)^2\neq 0;$$

VIII. $$f-\overline{f}+\overline{\overline{f}}-\overline{\overline{\overline{f}}}=\frac{2g}{a_1+a_3}$$

si $$a_2=-a_1,\quad a_3=a_1,\quad a_4,=-a_1,\quad a_1\neq 0.$$

2. Dans chacun des cas 1°—8°, nons allons déterminer les conditions relatifs à la fonction sous lesquelles l'équation est possible.

Proposition 1. *L'équation*:

$$a_1 f+a_2\overline{f}+a_3\overline{\overline{f}}+a_4\overline{\overline{\overline{f}}}=g$$

dont les coefficients satisfont aux conditions:

$(a_1+a_3)^2-(a_2+a_4)^2\neq 0$, $a_1=a_3$ *et* $a_2=a_4$ *est possible si et seulement si la fonction* g *satisfait à la condition* $g=\overline{\overline{g}}$.

Démonstration. Dans ce cas-là l'équation considérée est équivalente à l'équation.

$$f+\overline{\overline{f}}=\frac{a_1 g-a^2\overline{g}}{a_1^{\,2}-a_2^{\,2}}$$

(lemme 1, cas II).

On a la matrice $A=\begin{pmatrix}1&0&1&0\\0&1&0&1\\1&0&1&0\\0&1&0&1\end{pmatrix}$, et la matrice $B=-\frac{I}{2}$ est compatible avec le groupe cyclique de l'ordre 4 et satisfait à la condition $ABA+A=0$.

La condition $ABG+G=0$ [1] se réduit maintenant à

$$g=\bar{\bar{g}}.$$

Ici G désigne la matrice: $\dfrac{1}{a_1{}^2-a_2{}^2}$, $\left\|\begin{matrix} a_1 g-a_2\bar{g} \\ a_1\bar{g}-a_2\bar{\bar{g}} \\ a_1\bar{\bar{g}}-a_2\bar{\bar{\bar{g}}} \\ a_1\bar{\bar{\bar{g}}}-a_2 g \end{matrix}\right\|$.

Proposition 2. *Sous la condition*:

$$a_2+a_4=-(a_1+a_3)\neq 0 \quad \text{et} \quad (a_1-a_3)^2+(a_2-a_4)^2\neq 0,$$

l'équation:

$$a_1 f+a_2\bar{f}+a_3\bar{\bar{f}}-a_4\bar{\bar{\bar{f}}}=g.$$

est possible si et seulement si la fonction g satifait à la condition

$$g+\bar{g}+\bar{\bar{g}}+\bar{\bar{\bar{g}}}=0.$$

Démonstration. L'équation considérée sous les conditions $a_2+a_4= =(a_1+a_3)\neq 0$ et $(a_1-a_3)^2+(a_2-a_4)^2\neq 0$ est équivalente à l'équation:

$$f-\bar{f}=\frac{g+\bar{\bar{g}}}{2\,(a_1=a_3)}+\frac{(a_1-a_3)\,(g-\bar{g}-\bar{\bar{g}}+\bar{\bar{\bar{g}}})}{2\,[(a_1-a_3)^2+(a_2-a_4)^2]}-\frac{(a_2-a_4)\,(g+\bar{g}-\bar{\bar{g}}-\bar{\bar{\bar{g}}})}{2\,[(a_1-a_3)^2+(a_2-a_4)^2]}$$

(lemme 1, cas VII)

Dans ce cas-là, on a la matrice $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et

la matrice

$$B=\left|\begin{matrix} -\dfrac{3}{4} & -\dfrac{2}{4} & -\dfrac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\dfrac{3}{4} & -\dfrac{2}{4} & -\dfrac{1}{4} \\ -\dfrac{1}{4} & 0 & -\dfrac{3}{4} & -\dfrac{2}{4} \\ -\dfrac{2}{4} & -\dfrac{1}{4} & 0 & -\dfrac{3}{4} \end{matrix}\right|.$$

La matrice B est compatible avec le groupe cyclique de l'ordre 4 et satisfait à la condition:

$$ABA+A=0$$

La condition $ABG+G=0$ se réduit à

$$g+\bar{g}+\bar{\bar{g}}+\bar{\bar{\bar{g}}}=0,$$

c. q. f. d.

Ici G désigne la matrice:

$$\begin{pmatrix}
\dfrac{g+\bar{\bar{g}}}{2(a_1+a_3)}+\dfrac{(a_1-a_3)(g-\bar{g}-\bar{\bar{g}}+\bar{\bar{\bar{g}}})-(a_2-a_4)(g+\bar{g}-\bar{\bar{g}}-\bar{\bar{\bar{g}}})}{2[(a_1-a_3)^2+(a_2-a_4)^2]} \\[2ex]
\dfrac{\bar{g}+\bar{\bar{\bar{g}}}}{2(a_1+a_3)}+\dfrac{(a_1-a_3)(\bar{g}-\bar{\bar{g}}-\bar{\bar{\bar{g}}}+g)-(a_2-a_4)(\bar{g}-\bar{\bar{g}}-\bar{\bar{\bar{g}}}-g)}{2[(a_1-a_3)^2+((a_2-a_4)^2]} \\[2ex]
\dfrac{\bar{\bar{g}}+g}{2(a_1+a_3)}+\dfrac{(a_1+a_3)(\bar{\bar{g}}-\bar{\bar{\bar{g}}}-g+\bar{g})-(a_2-a_4)(\bar{\bar{g}}+\bar{\bar{\bar{g}}}-g-\bar{g})}{2[(a_1-a_3)^2+(a_2-a_4)^2]} \\[2ex]
\dfrac{\bar{\bar{\bar{g}}}+\bar{g}}{2(a_1+a_3)}+\dfrac{(a_1-a_3)(\bar{\bar{\bar{g}}}-g-\bar{g}+\bar{\bar{g}})-(a_2-a_4)(\bar{\bar{\bar{g}}}+g-\bar{g}-\bar{\bar{g}})}{2\,](a_1-a_3)^2+(a_2-a_4)^2]}
\end{pmatrix}$$

Nous aboutissons ainsi au lemme suivant:

L e m m e 2. *L'équation* (J) *est possible si et seulement si la fonction* g *satisfait à la condition* (C).

	Équation (J)	Condition (C)
1°	$f=\dfrac{(a_1+a_3)(g+\bar{\bar{g}})-(a_2+a_4)(\bar{g}+\bar{\bar{\bar{g}}})}{2(a_1+a_3)^2-(a_2+a_4)^2]}+\dfrac{(a_1-a_3)(g-\bar{\bar{g}})-(a_2-a_4)(\bar{g}-\bar{\bar{\bar{g}}})}{2[(a_1+a_3)^2-(a_2+a_4)^2]}$	g fonction arbitraire
2°	$f+\bar{\bar{f}}=\dfrac{a_1 g-a_2 \bar{g}}{a_1^2-a_2^2}$	$g-\bar{\bar{g}}=0$
3°	$f-\bar{\bar{f}}=\dfrac{a_1 g-a_2 \bar{g}}{a_1^2+a_2^2}$	$g+\bar{\bar{g}}=0$
4°	$0=g$	$g=0$
5°	$f+\bar{f}=\dfrac{g+\bar{\bar{g}}}{2(a_1+a_3)}+\dfrac{(a_1-a_3)(g+\bar{g}-\bar{\bar{g}}-\bar{\bar{\bar{g}}})-(a_2-a_4)(\bar{g}+\bar{\bar{g}}+\bar{\bar{\bar{g}}}-g)}{2[(a_1-a_2)^2+(a_2-a_4)^2]}$	$g-\bar{g}+\bar{\bar{g}}-\bar{\bar{\bar{g}}}=0$

	Équation (J)	Condition (C)
6°	$f+\bar{f}+\bar{\bar{f}}+\bar{\bar{\bar{f}}}=\dfrac{2}{a_1+a_3}$	$g-\bar{\bar{g}}=0$
7°	$f-\bar{f}=\dfrac{g+\bar{\bar{g}}}{2(a_1+a_3)}+\dfrac{(a_1-a_3)(g-\bar{g}-\bar{\bar{g}}+\bar{\bar{\bar{g}}})-(a_2-a_4)(g+\bar{g}-\bar{\bar{g}}-\bar{\bar{\bar{g}}})}{2[(a_1-a_3)^2+(a_2-a_4)^2]}$	$g+\bar{g}+\bar{\bar{g}}+\bar{\bar{\bar{g}}}=0$
8°	$f-\bar{f}+\bar{\bar{f}}-\bar{\bar{\bar{f}}}=\dfrac{2}{a_1+a_3}g$	$g-\bar{\bar{g}}=0$

D'après tout ce qui précède, on a le théorème suivant.

Théorème 1. *L'équation*

$$a_1 f(x_1, x_2, x_3, x_4)+a_2 f(x_2, x_3, x_4, x_1)+a_3 f(x_3, x_4, x_1, x_2)+$$
$$+a_4 f(x_4, x_1\ x_2, x_3)=g(x_1, x_2, x_3, x_4)$$

est possible si et seulement si la fonction g satisfait à la condition:

1° $\quad g$ *arbitraire*, si $(a_1+a_3)^2-(a_2+a_4)^2\neq 0$ *et* $(a_1-a_3)^2+(a_2-a_4)^2\neq 0$;

2° $\quad g-\bar{\bar{g}}=0$, *si* $(a_1+a_3)^2-(a_2+a_4)^2\neq 0$, $a_1=a_3$ *et* $a_2=a_4$;

3° $\quad g+\bar{\bar{g}}=0$, *si* $a_1+a_3=0$, $a_2+a_4=0$, $a_1{}^2+a_2{}^2\neq 0$;

4° $\quad g=0$, *si* $a_1=a_2=a_3=a_4=0$;

5° $\quad g-\bar{g}+\bar{\bar{g}}-\bar{\bar{\bar{g}}}=0$, *si* $a_1+a_3=a_2+a_4\neq 0$ *et* $(a_1-a_3)^2+(a_2-a_4)^2\neq 0$;

6° $\quad g-\bar{\bar{g}}=0$, *si* $a_1=a_2=a_3=a_4\neq 0$;

7° $\quad g+\bar{g}+\bar{\bar{g}}+\bar{\bar{\bar{g}}}=0$, *si* $a_2+a_4=-(a_1-a_3)$ *et* $(a_1-a_3)^2+(a_2-a_4)^2\neq 0$;

8° $\quad g-\bar{\bar{g}}=0$, *si* $a_2=-a_1, a_3=a_1, a_4=-a_1, a_1\neq 0$.

Notons que les solutions générales des équations,

$$g-\bar{\bar{g}}=0,\ g+\bar{\bar{g}}=0,\ g-\bar{g}+\bar{\bar{g}}-\bar{\bar{\bar{g}}}=0,\ g+\bar{g}+\bar{\bar{g}}+\bar{\bar{\bar{g}}}=0$$

peuvent être exprimées d'une manière assez simple [2].

Dans la suite, nous allons écrire les équations fonctionnelles en f 1°—8° sous des formes simplifiées au moyen des conditions concernant g correspondents.

3. Nous allons déterminer la solution générale de chacune des équations.

$$f=\frac{(a_1+a_3)(g+\overline{\overline{g}})-(a_2+a_4)(\overline{g}+\overline{\overline{\overline{g}}})}{2\left[(a_1+a_3)^2-(a_2+a_4)^2\right.}+\frac{)a_1-a_3)(g-\overline{\overline{g}})-(a_2-a_4)(\overline{g}-\overline{\overline{\overline{g}}})}{2\left[(a_1-a_3)^2+(a_2-a_4)^2\right]},$$

$$f+\overline{\overline{f}}=\frac{a_1 g-a_2\overline{g}}{a_1^2-a_2^2},\quad f-\overline{\overline{f}}=\frac{a_1 g-a_2\overline{g}}{a_1^2+a_2^2},\quad 0=g,$$

$$f+\overline{f}=\frac{g+\overline{\overline{g}}}{2(a_1+a_2)}+\frac{(a_1-a_3)(g-\overline{\overline{\overline{g}}})+(a_2-a_4)(g-\overline{g})}{(a_1-a_3)^2+(a_2-a_4)^2},\quad f+\overline{f}+\overline{\overline{f}}+\overline{\overline{\overline{f}}}=\frac{g}{a_1},$$

$$f-\overline{f}=\frac{g+\overline{\overline{g}}}{2(a_1+a_3)}+\frac{(a_1-a_3)(g+\overline{\overline{\overline{g}}})-(a_2-a_4)(g+\overline{g})}{(a_1-a_3)^2+(a_2-a_4)^2},\quad f-\overline{f}+\overline{\overline{f}}-\overline{\overline{\overline{f}}}=\frac{g}{a_1}.$$

Proposition 3. *L'équation*

$$f+\overline{\overline{f}}=\frac{a_1 g-a_2\overline{g}}{a_1^2-a_2^2}$$

a la solution générale:

$$f=\frac{1}{2}\overline{\Pi}-\frac{1}{2}\overline{\overline{\Pi}}+\frac{1}{2(a_1^2-a_2^2)}(a_1 g-a_2\overline{g})$$

où Π *est une fonction réelle des variables réelles* x_1, x_2, x_2, x_4 *arbitraire.*

Démonstration. A l'équation considérée correspond au système:

$$f+o\overline{f}+\overline{\overline{f}}+o\overline{\overline{\overline{f}}}=\frac{a_1 g-a_2\overline{g}}{a_1^2-a_2^2}$$

$$of+\overline{f}+o\overline{\overline{f}}+\overline{\overline{\overline{f}}}=\frac{a_1\overline{g}-a_2\overline{\overline{g}}}{a_1^2-a_2^2},$$

$$f+o\overline{f}+\overline{\overline{f}}+o\overline{\overline{\overline{f}}}=\frac{a_1\overline{\overline{g}}-a_2\overline{\overline{\overline{g}}}}{a_1^2+a_2^2},$$

$$of+\overline{f}+o\overline{\overline{f}}+\overline{\overline{\overline{f}}}=\frac{a_1\overline{\overline{\overline{g}}}-a_2 g}{a_1^2-a_2^2}.$$

dont la matrice des coefficients est

$$A=\begin{pmatrix}1&0&1&0\\0&1&0&1\\1&0&1&0\\0&1&0&1\end{pmatrix}$$

La solution générale, d'après [1]. est donnée par

$$(11)\qquad \begin{pmatrix} f \\ \overline{f} \\ \overline{\overline{f}} \\ \overline{\overline{\overline{f}}} \end{pmatrix} = (BA+I) \begin{pmatrix} \Pi \\ \overline{\Pi} \\ \overline{\overline{\Pi}} \\ \overline{\overline{\overline{\Pi}}} \end{pmatrix} - BG$$

D'après la formule (11), on a:

$$f = \frac{1}{2}\,\Pi - \frac{1}{2}\,\overline{\overline{\overline{\Pi}}} + \frac{1}{2\,(a_1{}^2 - \hat{a}_2{}^2)}\,(a_1 g - a_2 \overline{g}), \quad c.q.f.d.$$

Proposition 4. *La solution générale de l'équation*

$$f - \overline{f} = \frac{g + \overline{\overline{g}}}{2\,(a_1 + a_3)} + \frac{(a_1 - a_3)\,(g + \overline{\overline{\overline{g}}}) - (a_2 - a_4)\,(g + \overline{g})}{(a_1 - a_3)^2 + (a_2 - a_4)^2}$$

est

$$f = \frac{1}{4}\,\Pi + \frac{1}{4}\,\overline{\Pi} + \frac{1}{4}\,\overline{\overline{\Pi}} + \frac{1}{4}\,\overline{\overline{\overline{\Pi}}} + \frac{g + \overline{\overline{g}}}{4\,(a_1 + a_3)} + \frac{(a_1 - a_3)\,(g - \overline{\overline{g}})}{2\,[a_1 - a_3)^2 + (a_2 - a_4)^2]} -$$

$$- \frac{(a_2 - a_4)\,(\overline{g} - \overline{\overline{\overline{g}}})}{2\,[a_1 - \grave{a}_3)^2 + (a_2 - a_4)^2]},$$

où Π *est une fonction réelle des variables réelles* x_1, x_2, x_3, x_4, *arbitraire.*

Démonstration. A l'équation considérée correspond le système:

$$f - \overline{f} + 0 \cdot \overline{\overline{f}} + o\overline{\overline{\overline{f}}} = \frac{g + \overline{\overline{\overline{g}}}}{2\,(a_1 + a_3)} + \frac{(a_1 - a_3)\,(g + \overline{\overline{\overline{g}}}) - (a_2 - a_4)\,(g + \overline{g})}{(a_1 - a_3)^2 + (a_2 - a_4)^2},$$

$$of = \overline{f} - \overline{\overline{f}} + o\overline{\overline{\overline{f}}} = \frac{\overline{g} + \overline{\overline{\overline{g}}}}{2\,(a_1 + a_3)} + \frac{(a_1 - a_3)\,(\overline{g} + g) - (a_2 = a_4)\,(\overline{g} + \overline{\overline{g}})}{(a_1 - a_3)^2 + (a_2 - a_4)^2},$$

$$of + o\overline{f} + \overline{\overline{f}} - \overline{\overline{\overline{f}}} = \frac{\overline{\overline{g}} + g}{2\,(a_1 - a_3)} + \frac{(a_1 - a_3)\,(\overline{\overline{g}} + \overline{g}) - (a_2 - a_4)\,(\overline{\overline{g}} + \overline{\overline{\overline{g}}})}{(a_1 - a_3)^2 + (a_2 - a_4)^2},$$

$$-f + of + of + f = \frac{\overline{\overline{\overline{g}}} + \overline{g}}{2\,(a_1 + a_3)} + \frac{(a_1 - a_3)\,(\overline{\overline{\overline{g}}} + \overline{\overline{g}}) - (a_2 - a_4)\,(\overline{\overline{\overline{g}}} + g)}{(a_1 - a_3)^2 + (a_2 - a_4)^2},$$

dont la matrice des coefficients est:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dans ce cas-là, on a la matrice $B=\begin{pmatrix} -\frac{3}{4} & -\frac{2}{4} & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & -\frac{3}{4} & -\frac{2}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & 0 & -\frac{3}{4} & -\frac{2}{4} \\ -\frac{2}{4} & -\frac{1}{4} & 0 & -\frac{3}{4} \end{pmatrix}$.

Elle est compatible avec le groupe cyclique de l'ordre 4 et satisfait à la condition $ABA+A=0$.

La solution générale, d'après la formule (11), est:

$$f=\frac{1}{4}\Pi+\frac{1}{4}\bar{\Pi}+\frac{1}{4}\bar{\bar{\Pi}}+\frac{1}{4}\bar{\bar{\bar{\Pi}}}+\frac{g+\bar{\bar{g}}}{4(a_1+a_3)}+\frac{(a_1-a_3)(g-\bar{\bar{g}})}{2[(a_1-a_3)^2+(a_2-a_4)^2]}-$$
$$-\frac{(a_2-a_4)(\bar{g}-\bar{\bar{g}})}{2[(a_1-a_3)^2+(a_2-a_4)^2]}, \text{ c. q. f. d.}$$

Nous aboutissons ainsi au lemme suivant:

L e m m e 3. *La solution générale de l'équation* (J) *est donnée par la formule* (F), *où* Π *désigne une fonction arbitraire.*

	Équation (J)	Formule (F)
1°	$f=\frac{(a_1+a_3)(g+\bar{\bar{g}})-(a_2+a_4)(\bar{g}+\bar{\bar{\bar{g}}})}{2[(a_1+a_3)^2-(a_2+a_4)^2]}=$ $+\frac{(a_1-a_3)(g-\bar{\bar{g}})-(a_2-a_4)(\bar{g}-\bar{\bar{\bar{g}}})}{2[(a_1-a_3)^2+(a_2-a_4)^2]}$	
2°	$f+\bar{\bar{f}}=\frac{a_1 g-a_2\bar{g}}{a_1^2-a_2^2}$	$f=\frac{1}{2}\Pi-\frac{1}{2}\bar{\bar{\Pi}}+\frac{(a_1 g-a_2\bar{g})}{2(a_1^2-a_2^2)}$
3°	$f-\bar{\bar{f}}=\frac{a_1 g-a_2\bar{g}}{a_1^2+a_2^2}$	$f=\frac{1}{2}\Pi+\frac{1}{2}\bar{\bar{\Pi}}+\frac{a_1 g-a_2\bar{g}}{2(a_1^2-a_2^2)}$
4°	$0=g$	$f=\Pi$
5°	$f+\bar{f}=$ $=\frac{g+\bar{\bar{g}}}{2(a_1+a_3)}+\frac{(a_1-a_3)(g-\bar{\bar{\bar{g}}})}{(a_1-a_3)^2+(a_2-a_4)^2}+$ $+\frac{(a_2-a_4)(g-\bar{g})}{a_1-a_3)^2+(a_2-a_4)^2}$	$f=\frac{1}{4}\Pi-\frac{1}{4}\bar{\Pi}+\frac{1}{4}\bar{\bar{\Pi}}-\frac{1}{4}\bar{\bar{\bar{\Pi}}}+$ $+\frac{g+\bar{\bar{g}}}{4(a_1+a_3)}+$ $+\frac{(a_1-a_3)(g-\bar{\bar{g}})-(a_2-a_4)(\bar{g}-\bar{\bar{\bar{g}}})}{2[(a_1-a_3)+(a_2-a_4)^2]}$

	Équation (J)	Formule (F)
6°	$f+\bar f+\bar{\bar f}+\bar{\bar{\bar f}}=\dfrac{g}{a_1}$	$f=\dfrac{3}{4}\Pi-\dfrac{1}{4}\bar\Pi-\dfrac{1}{4}\bar{\bar\Pi}+\dfrac{1}{4}\bar{\bar{\bar\Pi}}+\dfrac{g}{4a_1}$
7°	$f-\bar f=\dfrac{g+\bar{\bar g}}{2(a_1+a_3)}+$ $=\dfrac{(a_1-a_3)(g+\bar{\bar{\bar g}})}{(a_1-a_3)^2+(v_2-a_4)^2}-$ $-\dfrac{(a_2-a_4)(g+\bar g)}{(a_1-a_3)^2+(a_2-a_4)^2}$	$f=\dfrac{1}{4}\Pi+\dfrac{1}{4}\bar\Pi+\dfrac{1}{4}\bar{\bar\Pi}+\dfrac{1}{4}\bar{\bar{\bar\Pi}}+$ $+\dfrac{g+g}{4(a_1+a_3)}+$ $+\dfrac{(a_1-a_3)(g-\bar{\bar g})-(a_2-a_4)(\bar g-\bar{\bar{\bar g}})}{2[(a_1-a_3)^2+(a_2-a_4)^2]}$
8°	$f-\bar f+\bar{\bar f}-\bar{\bar{\bar f}}=\dfrac{g}{a_1}$	$f=\dfrac{3}{4}\Pi+\dfrac{1}{4}\bar\Pi-\dfrac{1}{4}\bar{\bar\Pi}+\dfrac{1}{4}\bar{\bar{\bar\Pi}}+\dfrac{g}{4a_1}$

Le théorème suivant, corollaire immédiat des lemmes 1, 2. 3, et du théorème, 1, est le résultat principal de ce travail.

Théorème 2. *La solution générale de l'équation*

$$a_1 f(x_1, x_2, x_3, x_4)+a_2 f(x_2, x_3, x_4, x_1)+a_3 f x_3, x_4, x_1, x_2)+$$
$$+a_4 f(x_4, x_1, x_2, x_3)=g(x_1, x_2, x_3, x_4)$$

est donnée par les formules suivantes

1° $f(x_1, x_2, x_3, x_4)=$

$$=\frac{(a_1+a_3)[g(x_1,x_2,x_3,x_4)+g(x_3,x_4,x_1,x_2)]-(a_2+a_4)[g(x_2,x_3,x_4,x_1)+g(x_4,x_1,x_2,x]}{2(a_1+a_3)^2-(a_2+a_4)^2}+$$
$$+\frac{(a_1-a_3)[g(x_1,x_2,x_3,x_4)-g(x_3,x_4,x_1,x_2)]-(a_2-a_4)[g(x_2,x_3,x_4,x_1)-g(x_4,x_1,x_2x_3]}{2(a_1-a_3)^2-(a_2-a_4)^2},$$

si $\quad (a_1+a_3)^2-(a_2+a_4)^2\neq 0 \quad$ *et* $\quad (a_1-a_3)^2+(a_2-a_4)^2\neq 0;$

2° $$f(x_1, x_2, x_3, x_4=\frac{1}{2}\Pi(x_1, x_2, x_3, x_4)-\frac{1}{2}\Pi(x_3, x_4, x_1, x_2)+$$
$$+\frac{a_1 g(x_1, x_2, x_3, x_3)-a_2 g(x_2, x_3, x_4, x_1)}{2(a_1^2-a_2^2)}$$

si $\quad (a_1+a_3)^2-(a_2+a_4)^2\neq 0, \quad a_1=a_3$ *et* $a_2=a_4;$

3° $$f(x_1, x_2, x_3, x_4)=\frac{1}{2}\Pi(x_1, x_2, x_3, x_4)+\frac{1}{2}\Pi(x_3, x_3, x_1, x_2)+$$
$$+\frac{a_1 g(x_1, x_2, x_3, x_4)-a_2 g(x_2, x_3, x_4, x_1)}{2(a_1^2-a_2^2)},$$

si $\quad a_1+a_3=0, \quad a_2+a_4=0$ *et* $a_1^2+a_2^2\neq 0;$

4° $$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \Pi(x_1, x_2, x_3, x_4), \quad si \quad a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = 0;$$

5° $$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \frac{1}{4}\Pi(x_1, x_2, x_3, x_4(-\frac{1}{4}\Pi(x_2, x_3, x_4, x_1) +$$

$$+\frac{1}{4}\Pi(x_3, x_4, x_1, x_2) - \frac{1}{4}\Pi(x_4, x_1, x_2, x_3) + \frac{g(x_1, x_2 x_3, x_4) + (x_3, x_4, x_1, x_2)}{4(a_1 + a_3)} +$$

$$+\frac{(a_1 - a_3)\, g\,[(x_1, x_2, x_4, x_4) - g(x_3, x_4, x_1, x_2)] - (a_2 - a_4)\,[g(x_2, x_3, x_4, x_1) - g(x_4, x_1, x_2, x_3]}{2\,[(a_1 - a_3)^2 + (a_2 - a_4)^2]},$$

si $$a_1 + a_3 = a_2 + a_4 \neq \quad et \quad (a_1 - a_3)^2 + (a_2 - a_4)^2 \neq 0;$$

6° $$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \frac{3}{4}\Pi(x_1, x_2, x_3, x_4) - \frac{1}{4}\Pi(x_2, x_3, x_4, x_1) -$$

$$-\frac{1}{4}\Pi(x_3, x_4, x_1, x_2) + \frac{1}{4}\Pi(x_4, x_1, x_2, x_3) + \frac{g(x_1, x_2, x_3, x_4)}{4a_1}.$$

si $$a_1 = a_2 = a_3 = a_4 \neq 0;$$

7° $$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \frac{1}{4}\Pi(x_1, x_2, x_3, x_4) + \frac{1}{4}\Pi(x_2, x_3, x_4, x_1) +$$

$$+\frac{1}{4}\Pi(x_3, x_4, x_1, x_2) + \frac{1}{4}\Pi(x_4, x_1, x_2, x_3) + \frac{g(x_1, x_2, x_3, x_4) + g(x_3, x_4, x_1, x_2)}{4(a_1 + a_3)} +$$

$$+\frac{(a_1 - a_3)\,[g(x_1, x_2, x_3, x_4) - g(x_3, x_4, x_1, x_2)] - (a_2 - a_4)\,[g(x_2, x_3, x_4, x_1) - g(x_4, x_1, x_2 x_3)]}{2\,[(a_1 - a_3)^2 + (a_2 - a_4)^2]},$$

si $$a_2 + a_4 = -(a_1 + a_3) \neq 0 \quad et \quad (a_1 a_3)^2 + (a_2 - a_4)^2 \neq 0$$

8° $$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \frac{3}{4}\Pi(x_1, x_2, x_3, x_4) + \frac{1}{4}\Pi(x_2, x_3, x_4, x_1) -$$

$$-\frac{1}{4}\Pi(x_3, x_4, x_1, x_2) + \frac{1}{4}\Pi(x_4, x_1, x_2, x_3) + \frac{g(x_1, x_2, x_3, x_4)}{4a_1},$$

si $$a_2 = -a_1 \quad a_3 = a_1 \quad a_4 = -a_1, \quad a_1 \neq 0.$$

BIBLIOGRAPHIE

[1] S. B. Prešić, *Méthode de résolution d'une classe d'équations fonctionnelles linéaires et non homogènes*, Publikacije Elektrotehn. fak. ser. mat. fiz. Nos 247—273. Beograd, 1969.

[2] B. M. Zarić, Ces Publications, Nos 274—301, 1969.