PUBLICATIONS DE L'INSTITUT MATHÉMATIQUE
Nouvelle série, tome 10 (24), 1970. pp. 79—86

CONDITIONS DE NON-EXISTENCE DE TRAJECTOIRES DE PHASE FERMÉES D'UN SYSTÈME DE POINTS MATÉRIELS

Veljko A. Vujičić

(Communiqué le 19 Novembre 1969)

Dans le domaine de la Mécanique qui fait usage de l'analyse qualitative pour l'étude du comportement des intégrales d'équations différentielles du mouvement, le critère de Bendixon [1], sur la non-existence de trajectoires de phase fermées, est bien connu. C'est en l'appliquant qu'on peut, par dérivation des seconds membres des équations différentielles

$$\frac{dx}{dt}=X(x, y), \quad \frac{dy}{dt}=Y(x, y) \tag{*}$$

prendre connaissance s'il n'existe pas de trajectoires de phase fermées simples [2] dans le plan x, y. Cette condition est satisfaite si l'expression

$$\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y} \tag{**}$$

ne change pas de signe dans le domaine considéré, ou si elle, n'est pas identiquement nulle. L'énoncé rigoureux de ce critère, et son application se trouvent chez A. A. Andronov, et un groupe d'auteurs: Leonovich, Gordon, Maier, Vitt, Haikin [3].

Au système d'équations différentielles (*) correspondent les équations différentielles canoniques du mouvement d'un système matériel à un degré de liberté. En tout cas, les équations différentielles du mouvement d'un système matériel peuvent être écrites dans une forme plus déterminée, et par conséquent obtenir des conditions plus concrètes qui nous informeront quand un système matériel n'a pas de trajectoires de phase fermées.

Ayant en vue le fait que le mouvement d'un système de plusieurs points matériels dans l'espace de phase à $2n$ dimensions peut être considéré comme le mouvement d'un point représentatif, nous généraliserons, c'est-à-dire que nous étendrons, dans cet article, le critère de Bendixon, à un système mécanique autonome de plusieurs degrés de liberté. L'expression mathématique d'après laquelle on doit juger de la non-existence des trajectoires de phase fermées sera obtenue directement au moyen des équations différentielles du mouvement du système dans l'espace de phase.

1. Considérons, dans ce but un système dynamique de N points M_i $(i=1,2,\ldots,N)$ de masses m_i, dont les positions sont déterminées par les vecteurs $\mathbf{r}_i$. Supposons que ce mouvement soit soumis à l'action de k liaisons idéales scléronomes: $f_\mu(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2,\ldots,\mathbf{r}_n)=0$. Le système considéré a, de cette manière, $n=3N-k$ degrés de liberté. Nous leur correspondrons n coordonnées généralisées q^α et n impulsions généralisées p_α $(\alpha=1,2,\ldots,n)$, c'est-à-dire $2n$ coordonnées de phase.

Partons des équations dynamiques de première espèce de Lagrange:

$$\frac{d}{dt}(m_i\mathbf{v}_i)=\mathbf{F}_i+\sum_{\mu=1}^{N}\lambda_\mu \operatorname{grad}_{\mathbf{r}_i} f_\mu, \tag{1.1}$$

où le vecteur de la quantité de mouvement peut être exprimé de la manière suivante:

$$\mathbf{K}_i=m_i\mathbf{v}_i=m_i\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q^\alpha}\dot{q}^\alpha. \tag{1.2}$$

Si nous effectuons la multiplication scalaire des relations (1.1) et (1.2) par les vecteurs de base des coordonnées $\dfrac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q^\beta}$ puis leur sommation selon l'indice i, nous obtiendrons:

$$\sum_{i=1}^{N}\frac{d}{dt}\left(m_i\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q^\alpha}\cdot\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q^\beta}\dot{q}^\beta\right)-\sum_{i=1}^{N}m_i\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q^\alpha}\cdot\frac{\partial^2 \mathbf{r}_i}{\partial q^\eta\,\partial q^\gamma}\dot{q}^\alpha\dot{q}^\gamma=\sum_{i=1}^{N}\mathbf{F}_i\cdot\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q^\beta},$$

$$\sum_{i=1}^{N}\mathbf{K}_i\cdot\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q^\beta}=\sum_{i=1}^{N}m_i\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q^\alpha}\cdot\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q^\beta}=a_{\alpha\beta}.$$

Si l'on tient compte de ce que les composantes covariantes du tenseur métrique de l'espace de configuration sont:

$$a_{\alpha\beta}=\sum_{i=1}^{N}m_i\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q^\alpha}\cdot\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q^\beta}=a_{\alpha\beta}.$$

et qu'on a

$$\frac{\partial^2 \mathbf{r}_i}{\partial q^\alpha\,\partial q^\gamma}=\Gamma^\delta_{\beta\gamma}\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q^\delta},$$

nous obtiendrons les équations différentielles du mouvement du système matériel dans l'espace de phase dans la forme:

$$\begin{cases}\dot{q}^\alpha=a^{\alpha\beta}p_\beta,\\ \dot{p}_\alpha=\Gamma^\gamma_{\alpha\beta}p_\gamma\dot{q}^\beta+Q_\alpha,\end{cases} \tag{1.3}$$

où les $a^{\alpha\beta}$ sont les composantes contravariantes du tenseur métrique, les $\Gamma^\gamma_{\alpha\beta}$ les coefficients de la connexion, et les Q_α les composantes des forces généralisées, qui dépendent des variables de phase q^α et p_α. A l'état d'équilibre du système les valeurs des coordonnées $q^\alpha=q^\alpha_0$ et $p_\alpha=0$.

Il est facile d'éliminer dt du système d'équations différentielles (1.3), et d'obtenir la relation:

$$\frac{dp_\alpha - \Gamma^\gamma_{\alpha\beta}\, p_\gamma\, dq^\beta}{dq^\alpha} = \frac{Q_\alpha}{a^{\alpha\delta}\, p_\delta}\,.$$

Cette relation, que nous écrirons sous la forme:

$$a^{\alpha\beta}\, p_\beta\, dp_\alpha = (a^{\alpha\delta}\, \Gamma^\gamma_{\alpha\beta}\, p_\gamma\, p_\delta + Q_\beta)\, dq^\beta \tag{1.4}$$

représente l'équation différentielle de la trajectoire de phase du point représentatif dans l'espace de phase à $2n$ dimensions. Au système matérial à un degré de liberté correspond également une équation différentielle de la trajectoire de phase, mais avec deux coordonnées seulement q et p. Cependant, dans l'espace à $2n$ dimensions, si nous perdons la représentation graphique d'une courbe plane, il est possible de tirer des conclusions sur le comportement de la trajectoire de phase d'un point représentatif. Supposons que la trajectoire de phase soit une courbe fermée pour laquelle on ait:

$$\oint_C \{a^{\alpha\gamma}\, p_\gamma\, dp_\alpha - (a^{\nu\delta}\, \Gamma^\gamma_{\nu\beta}\, p_\gamma\, p_\delta + Q_\beta)\, dq^\beta\} = 0 \tag{1.5}$$

et que cette trajectoire se trouve sur la surface S dans le domaine simplement connexe G.

Si nous établissons la relations entre les variables de phase q^α et p_α d'une part, et les paramètres $u_1, u_2 \in S$ l'intégrale prise le long d'une courbe (1.3) peut être écrite sous la forme:

$$\begin{aligned} J = \oint_C \Bigg\{ & \left[a^{\alpha\gamma}\, p_\gamma\, \frac{\partial p_\alpha}{\partial u_1} - (a^{\nu\delta}\, \Gamma^\gamma_{\nu\beta}\, p_\gamma\, p_\delta + Q_\beta)\, \frac{\partial q^\beta}{\partial u_1}\, du_1 + \right. \\ & + \left. a^{\alpha\gamma}\, p_\gamma\, \frac{\partial p_\alpha}{\partial u_2} - (a^{\nu\delta}\, \Gamma^\gamma_{\nu\beta}\, p_\gamma\, p_\delta + Q_\beta)\, \frac{\partial q^\beta}{\partial u_2}\, du_2 \right] \Bigg\} = 0. \end{aligned} \tag{1.6}$$

En usant la formule de Green; nous aurons

$$\begin{aligned} J = \iint_{(G)} \Bigg\{ & \frac{\partial}{\partial u_2} \left[a^{\alpha\gamma}\, p_\gamma\, \frac{\partial p_\alpha}{\partial u_1} - (a^{\nu\delta}\, \Gamma^\gamma_{\nu\beta}\, p_\gamma\, p_\delta + Q_\beta)\, \frac{\partial q^\beta}{\partial u_1} \right] - \\ & - \frac{\partial}{\partial u_1} \left[a^{\alpha\gamma}\, p_\gamma\, \frac{\partial p_\alpha}{\partial u_2} - (a^{\nu\delta}\, \Gamma^\gamma_{\nu\beta}\, p_\gamma\, p_\delta + Q_\beta)\, \frac{\partial q^\beta}{\partial u_2} \right] \Bigg\}\, du_1\, du_2 = 0. \end{aligned} \tag{1.7}$$

Par dérivation partielle, par rapport à u_1 et à u_2 l'expression sous l'intégrale est développée, et nous obtenons

$$\begin{aligned} J = \iint \Bigg(& \frac{\partial a^{\alpha\gamma}}{\partial u_{[2}}\, \frac{\partial p_\alpha}{\partial u_{1]}}\, p_\gamma + a^{\nu\delta}\, \Gamma^\gamma_{\nu\beta}\, \frac{\partial p_\gamma}{\partial u_{[1}}\, \frac{\partial q^\beta}{\partial u_{2]}}\, p_\delta + a^{\nu\delta}\, \Gamma^\gamma_{\nu\beta}\, \frac{\partial p_\delta}{\partial u_{[1}}\, \frac{\partial q^\beta}{\partial u_{2]}}\, p_\gamma + \\ & + a^{\nu\delta}\, \frac{\partial \Gamma^\gamma_{\nu\beta}}{\partial u_{[1}}\, \frac{\partial q^\beta}{\partial u_{2]}}\, p_\gamma\, p_\delta + \frac{\partial a^{\nu\delta}}{\partial u_{[1}}\, \frac{\partial q^\beta}{\partial u_{2]}}\, \Gamma^\gamma_{\nu\beta}\, p_\gamma\, p_\delta + \frac{\partial Q_\beta}{\partial u_{[1}}\, \frac{\partial q^\beta}{\partial u_{2]}} \Bigg)\, du_1\, du_2 = 0. \end{aligned} \tag{1.8}$$

Ayant en vue que le tenseur fondamental (métrique) et les coefficients de la connexion $\Gamma^{\gamma}_{\nu\beta}$ ne dépendent que des coordonnées q, et par là, de u_1 et de u_2, nous obtiendrons que

$$\frac{\partial a^{\alpha\gamma}}{\partial u_{[2}}\frac{\partial p_\alpha}{\partial u_{1]}}=\frac{\partial a^{\alpha\gamma}}{\partial q^\beta}\frac{\partial p_\alpha}{\partial u_{[1}}\frac{\partial q^\beta}{\partial u_{2]}},$$

$$a^{\nu\delta}\frac{\partial \Gamma^{\gamma}_{\nu\beta}}{\partial u_{[1}}\frac{\partial q^\beta}{\partial u_{2]}}=a^{\nu\delta}\frac{\partial \Gamma^{\gamma}_{\nu\beta}}{\partial q^\sigma}\frac{\partial q^\sigma}{\partial u_{[1}}\frac{\partial q^\beta}{\partial u_{2]}}.$$

C'est pour cette raison que les trois sommes dans (1.8) seront:

$$A=\frac{\partial a^{\alpha\gamma}}{\partial u_{[2}}\frac{\partial p_\alpha}{\partial u_{1]}}p_\gamma+a^{\nu\delta}\Gamma^{\gamma}_{\nu\beta}\frac{\partial p_\gamma}{\partial u_{[1}}\frac{\partial q^\beta}{\partial u_{2]}}p_\delta+a^{\nu\delta}\Gamma^{\gamma}_{\nu\beta}\frac{\partial p_\delta}{\partial u_{[1}}\frac{\partial q^\beta}{\partial u_{2]}}p_\gamma=$$

$$=\frac{\partial a^{\delta\gamma}}{\partial q^\beta}\frac{\partial p_\delta}{\partial u_{[1}}\frac{\partial q^\beta}{\partial u_{2]}}p_\gamma+a^{\nu\gamma}\Gamma^{\delta}_{\nu\beta}\frac{\partial p_\delta}{\partial u_{[1}}\frac{\partial q^\beta}{\partial u_{2]}}p_\gamma+a^{\nu\delta}\Gamma^{\gamma}_{\nu\beta}\frac{\partial p^\delta}{\partial u_{[1}}\frac{\partial q^\beta}{\partial u_{2]}}p_\gamma=$$

$$=\left(\frac{\partial a^{\delta\gamma}}{\partial q^\gamma}+a^{\nu\gamma}\Gamma^{\delta}_{\nu\beta}+a^{\nu\delta}\Gamma^{\gamma}_{\nu\beta}\right)\frac{\partial p_\delta}{\partial u_{[1}}\frac{\partial q^\beta}{\partial u_{2]}}p_\gamma=\nabla a^{\delta\gamma}\frac{\partial p_\delta}{\partial u_{[1}}\frac{\partial q^\beta}{\partial u_{2]}}p_\gamma=0$$

car l'expression entre les parenthèses, étant la dérivée covariante du tenseur fondamental, est égale à zéro, c'est-à-dire

$$\text{(1.9)}\qquad \frac{\partial a^{\delta\gamma}}{\partial q^\beta}+a^{\nu\gamma}\Gamma^{\delta}_{\nu\beta}+a^{\nu\delta}\Gamma^{\gamma}_{\nu\beta}=0.$$

Transformons de la manière suivante les autres expressions où figurent les coefficients de connexion:

$$B=a^{\nu\delta}\frac{\partial \Gamma^{\gamma}_{\nu\beta}}{\partial u_{[1}}\frac{\partial q^\beta}{\partial u_{2]}}p_\gamma p_\delta+\frac{\partial a^{\nu\delta}}{\partial u_{[1}}\frac{\partial q^\beta}{\partial u_{2]}}\Gamma^{\gamma}_{\nu\beta}p_\gamma p_\delta=$$

$$=\left(a^{\nu\delta}\frac{\partial \Gamma^{\gamma}_{\nu\beta}}{\partial q^\sigma}+\frac{\partial a^{\nu\delta}}{\partial q^\sigma}\Gamma^{\gamma}_{\nu\beta}\right)\frac{\partial q^\sigma}{\partial u_{[1}}\frac{\partial q^\beta}{\partial u_{2]}}p_\gamma p_\delta,$$

ou en considération de (1.9).

$$B=\left(a^{\nu\delta}\frac{\partial \Gamma^{\gamma}_{\nu\beta}}{\partial q^\sigma}-a^{\mu\nu}\Gamma^{\delta}_{\mu\sigma}\Gamma^{\gamma}_{\nu\beta}-a^{\mu\delta}\Gamma^{\gamma}_{\mu\sigma}\Gamma^{\gamma}_{\nu\beta}\right)\frac{\partial q^\sigma}{\partial u_{[1}}\frac{\partial q^\beta}{\partial u_{2]}}p_\gamma p_\delta=$$

$$=\left\{\left(a^{\nu\delta}\frac{\partial \Gamma^{\gamma}_{\nu\beta}}{\partial q^\sigma}-a^{\mu\nu}\Gamma^{\delta}_{\mu\sigma}\Gamma^{\gamma}_{\nu\beta}-a^{\mu\delta}\Gamma^{\nu}_{\mu\sigma}\Gamma^{\gamma}_{\nu\beta}\right)\frac{\partial q^\sigma}{\partial u_1}\frac{\partial q^\beta}{\partial u_2}-\right.$$

$$\left.-\left(a^{\nu\delta}\frac{\partial \Gamma^{\gamma}_{\nu\beta}}{\partial q^\sigma}-a^{\mu\nu}\Gamma^{\delta}_{\mu\sigma}\Gamma^{\gamma}_{\nu\beta}-a^{\mu\delta}\Gamma^{\nu}_{\mu\sigma}\Gamma^{\gamma}_{\nu\beta}\right)\frac{\partial q^\sigma}{\partial u_2}\frac{\partial q^\beta}{\partial u_1}\right\}p_\gamma p_\delta=$$

$$=\left\{a^{\mu\delta}\left(\frac{\partial \Gamma^{\gamma}_{\mu\beta}}{\partial q^\sigma}-\frac{\partial \Gamma^{\gamma}_{\mu\sigma}}{\partial q^\beta}+\Gamma^{\nu}_{\mu\beta}\Gamma^{\gamma}_{\nu\sigma}-\Gamma^{\nu}_{\mu\sigma}\Gamma^{\gamma}_{\nu\beta}\right)+\right.$$

$$\left.+a^{\mu\nu}\left(\Gamma^{\delta}_{\mu\beta}\Gamma^{\gamma}_{\nu\sigma}-\Gamma^{\delta}_{\mu\sigma}\Gamma^{\gamma}_{\mu\beta}\right)\right\}\frac{\partial q^\sigma}{\partial u_1}\frac{\partial q^\beta}{\partial u_2}p_\gamma p_\delta.$$

Puisque $a^{\mu\nu}=a^{\nu\mu}$, et l'expression entre les parenthèses est égale au tenseur de Riemann-Christoffel $R_{\beta\sigma,\mu\cdot}^{\cdot\cdot\cdot\gamma}$, nous aurons

$$B=a^{\mu\delta}R_{\beta\sigma,\mu\cdot}^{\cdot\cdot\cdot\gamma}\frac{\partial q^{\sigma}}{\partial u_1}\frac{\partial q^{\beta}}{\partial u_2}p_{\gamma}p_{\delta}+a^{\mu\nu}\Gamma_{\mu\beta}^{\delta}\Gamma_{\nu\sigma}^{\gamma}\frac{\partial q^{\sigma}}{\partial u_1}\frac{\partial q^{\beta}}{\partial u_2}p_{\gamma}p_{\delta}-$$

$$-a^{\nu\mu}\Gamma_{\nu\sigma}^{\delta}\Gamma_{\mu\beta}^{\gamma}\frac{\partial q^{\sigma}}{\partial u_1}\frac{\partial q^{\beta}}{\partial u_2}p_{\gamma}p_{\delta}=a^{\mu\delta}R_{\beta\sigma,\mu\cdot}^{\cdot\cdot\cdot\gamma}\frac{\partial q^{\sigma}}{\partial u_1}\frac{\partial q^{\beta}}{\partial u_2}p_{\gamma}p_{\delta}.$$

Ou bien, compte tenu des relations (1.3) entre les vitesses généralisés et les impulsions généralisées, ainsi que de la relation entre le tenseur mixte et le tenseur covariant de courbure, nous obtiendrons

$$B=R_{\beta\sigma,\mu\cdot}^{\cdot\cdot\cdot\gamma}\frac{\partial q^{\gamma}}{\partial u_1}\frac{\partial q^{\beta}}{\partial u_2}p_{\gamma}\,\dot{q}^{\mu}=R_{\beta\sigma,\mu\cdot}^{\cdot\cdot\cdot}\frac{\partial q^{\sigma}}{\partial u_1}\frac{\partial q^{\beta}}{\partial u_2}a_{\gamma\alpha}\,\dot{q}^{\alpha}\,\dot{q}^{\mu}=R_{\beta\sigma,\mu\alpha}\frac{\partial q^{\sigma}}{\partial u_1}\frac{\partial q^{\beta}}{\partial u_2}\,\dot{q}^{\alpha}\,\dot{q}^{\mu}.$$

Ayant en vue que le tenseur $R_{\beta\sigma,\mu\alpha}$ est antisymétrique par rapport aux indices μ et α nous concluons que l'expression B est égale à zéro. C'est pour cette raison et à cause de $A=0$ que l'intégrale (1.8) se réduit à

(1.10) $$J=\iint\limits_{(G)}\frac{\partial Q_{\beta}}{\partial u_{[1}}\frac{\partial q^{\beta}}{\partial u_{2]}}\,du_1\,du_2.$$

Si nous écrivons la fonction sous l'intégrale dans sa forme explicite

$$\frac{\partial Q_{\beta}}{\partial u_{[1}}\frac{\partial q^{\beta}}{\partial u_{2]}}=\frac{\partial Q_{\beta}}{\partial u_1}\frac{\partial q^{\beta}}{\partial u_2}-\frac{\partial Q_{\beta}}{\partial u_2}\frac{\partial q^{\beta}}{\partial u_1}$$

et en tenant compte que $dQ_{\beta}=\frac{\partial Q_{\beta}}{\partial u_j}du_j$, $dq^{\beta}=\frac{\partial q^{\beta}}{\partial u_j}du_j$, $(j=1,2)$, l'intégrale (1.10) aura la forme

(1.11) $$J=\iint\limits_{(G)}[dQ_{\beta}\,dq^{\beta}]=0$$

où les parenthèses signifient le produit extérieur des vecteurs.

Étant donné la supposition de l'existence de trajectoires fermées simples, pour lesquelles l'intégrale (1.11) est égale à zéro, nous avons démontré le contraire.

Le point représentatif d'un système dynamique autonome holonome, qui se meut sous l'action de forces généralisées Q_{α}, n'a pas de trajectoires de phase simples fermées dans le domaine de l'espace de phase à $2n$ dimensions $V_{2n}\ni q^{\alpha}$, p_{α} si:

(1.12) $$\iint\limits_{(G)}[dQ_{\beta}\,dq^{\beta}]\neq 0.$$

2. Les forces généralisées Q_β que nous considérons, dépendent des coordonnées généralisées q^α et des impulsions généralisées p_α, ce qui donne

$$dQ_\beta = \frac{\partial Q_\beta}{\partial q^\alpha}\, dq^\alpha + \frac{\partial Q_\beta}{\partial p_\alpha}\, \partial p_\alpha =$$

$$= \left(\frac{\partial Q_\beta}{\partial q^\alpha}\,\frac{\partial q^\alpha}{\partial u_1} + \frac{\partial Q_\beta}{\partial p_\alpha}\,\frac{\partial p_\alpha}{\partial u_1}\right) du_1 + \left(\frac{\partial Q_\beta}{\partial q^\alpha}\,\frac{\partial q^\alpha}{\partial u_2} + \frac{\partial Q_\beta}{\partial p_\alpha}\,\frac{\partial p_\alpha}{\partial u_2}\right) du_2.$$

Le produit extérieur $[dQ_\beta\, dq^\beta]$ dans cette forme développée peut se réduire à

$$[dQ_\beta\, dq^\beta] = \frac{\partial Q_\beta}{\partial q^\alpha}\,[dq^\alpha\, dq^\beta] + \frac{\partial Q_\beta}{\partial p_\alpha}\, dp_\alpha\, dq^\beta \tag{2.1}$$

ou

$$[dQ_\beta\, dq^\beta] = \left\{\left(\frac{\partial Q_\beta}{\partial q^\alpha} - \frac{\partial Q_\alpha}{\partial q^\beta}\right)\frac{\partial q^\beta}{\partial u_2}\,\frac{\partial q^\alpha}{\partial u_1} + \frac{\partial Q_\beta}{\partial p_\alpha}\,\frac{\partial p_\alpha}{\partial u_{[1}}\,\frac{\partial q^\beta}{\partial u_{2]}}\right\} du_1\, du_2. \tag{2.2}$$

L'expression (2.2) est propice à la discussion des conditions de non-existence de trajectoires de phase simples en fonction de la forme des forces Q_α. A cet effet écrivons l'intégrale J sous la forme

$$J = \iint\limits_{(G)} \left\{\left(\frac{\partial Q_\beta}{\partial q^\alpha} - \frac{\partial Q_\alpha}{\partial q^\beta}\right)\frac{\partial q^\beta}{\partial u_2}\,\frac{\partial q^\alpha}{\partial u_1} + \frac{\partial Q_\beta}{\partial p_\alpha}\,\frac{\partial p_\alpha}{\partial u_{[1}}\,\frac{\partial q^\beta}{\partial u_{2]}}\right\} du_1\, du_2 \tag{2.3}$$

et examinons certains aspects généraux des forces.

Si les forces généralisées ont un potentiel $V = V(q^1, q^2, \ldots, q^n)$ elles sont alors, ainsi qu'on le sait

$$Q_\alpha = -\frac{\partial V}{\partial q^\alpha}$$

d'où il suit que

$$\frac{\partial Q_\beta}{\partial q^\alpha} = \frac{\partial Q_\alpha}{\partial q^\beta} \tag{2.4}$$

et

$$\frac{\partial Q_\beta}{\partial p_\alpha} = 0. \tag{2.5}$$

Pour cette raison l'intégrale (2.3) est égale à zéro. Ce qui prouve que l'existence de trajectoires de phase fermées est *possible*, pour un système de n degrés de liberté sous l'action de forces ayant un potentiel.

Pour un système oscillatoire sous l'action supplémentaire de forces non-conservatives, l'intégrale (2.3), à la suite de (2.4) dégénère en

$$J = \iint\limits_{(G)} \frac{\partial Q_\beta}{\partial p_\alpha}\,[dp_\alpha\, dq^\beta]. \tag{2.6}$$

Dans ce cas la non-existence de trajectoires de phase est la conséquence, en premier lieu, des dérivées partielles de la force généralisée par rapport aux impulsions généralisées. A la suite de (2.6) nous affirmons: *Un système oscillatoire, à m degrés de liberté, sous l'action de non conservatives* $Q_\beta = Q_\beta(p_1, \ldots, p_n)$ *n'aura pas de trajectoires de phase simples fermées dans l'espace de phase à* $2n$ *dimensions si l'intégrale* (2.6) *est différente de zéro.*

S'il est question d'un système oscillatoire linéaire sous l'action de forces dissipatives [4]

$$Q_\beta = -b_{\beta\alpha}\,\dot{q}^\alpha = -b_{\alpha\beta}\,\dot{q}^\alpha = -b_{\alpha\beta}\,a^{\alpha\gamma}p_\gamma = -b^\gamma_\beta\,p_\gamma$$

et de forces gyroscopiques

$$G_\beta = -g_{\alpha\beta}\,\dot{q}^\alpha = g_{\beta\alpha}\,\dot{q}^\alpha = g_{\beta\alpha}\,a^{\alpha\gamma}p_\gamma = g^\gamma_\beta\,p_\gamma$$

où les g^γ_β sont les coefficients constants dissipatifs, et les coefficients constants gyroscopiques, l'intégrale (2.6) se réduit, de toute évidence, à

$$J = (g^\alpha_\beta - b^\alpha_\beta)\iint_{(G)} [dp_\alpha\, dq^\beta]. \tag{2.7}$$

Il est également évident que dans le cas $g^\alpha_\beta = b^\alpha_\beta$ il y aura la possibilité d'existence de trajectoires de phase fermées, ce qui signifie la stabilisation de l'état d'équilibre du système.

3. Pour un système à un degré de liberté le critère de Bendixon est applicable, et il est pris dans la forme (*) [1]. Cependant, dans la mécanique des systèmes à un degré de liberté, il y aura deux équations différentielles du mouvement de premier ordre, mais une seule force généralisée $Q_1 = Q_k(q^1, p_1) = Q(q, p)$ et l'intégrale (2.3) pourra être simplifiée dans une mesure notable, d'où on pourra formuler, en fonction de la force Q, le critère de Bendixon sous une forme beaucoup plus commode pour la mécanique. Dans ce cas nous avons

$$\frac{\partial Q_\beta}{\partial q^\alpha} - \frac{\partial Q_\alpha}{\partial q^\beta} = 0.$$

Nous écrivons la dérivée partielle $\dfrac{\partial Q_\beta}{\partial p_\alpha}$ simplement comme $\dfrac{\partial Q}{\partial p}$, et

$$\frac{\partial p_\alpha}{\partial u_{[1}}\,\frac{\partial q^\beta}{\partial u_{2]}} = \frac{\partial p}{\partial u_1}\,\frac{\partial q}{\partial u_2} - \frac{\partial p}{\partial u_2}\,\frac{\partial q}{\partial u_1}.$$

En substituant dans (2.3) nous obtenons:

$$J = \iint_{(G)} \frac{\partial Q(q,p)}{\partial p}\left(\frac{\partial p}{\partial u_1}\,\frac{\partial q}{\partial u_2} - \frac{\partial p}{\partial u_2}\,\frac{\partial q}{\partial u_1}\right) du_1\, du_2. \tag{3.1}$$

D'où suit la conclusion *qu'un système matérial à un degré de liberté n'a pas de trajectoires de phase simples sur la surface* $S \ni u_1, u_2$, *dans le domaine G, si*

$$\frac{\partial Q}{\partial p}\,\frac{\partial p}{\partial u_{[1}}\,\frac{\partial q}{\partial u_{2]}} \tag{3.2}$$

n'est pas identiquement nul ou ne change pas de signe dans le domaine G.

Si l'on considère le mouvement du point représentatif du système matériel dans le plan de phase $S \ni q = u_2$, $p = u_1$ on a alors

$$\frac{\partial p}{\partial u_{[1}} \frac{\partial q}{\partial u_{2]}} = 1$$

et l'intégrale (3.1) se réduit à

$$J = \iint\limits_{(G)} \frac{\partial Q(q, p)}{\partial p} \, dp \, dq.$$

Cette intégrale sera nulle si $\frac{\partial Q}{\partial p} = 0$ ou si la fonction qu'on intègre n'est pas définie par le signe. D'où la conclusion:

Un système de points matériels à un degré de liberté n'aura pas de trajectoires de phase simples dans le plan de phase $S \ni q, p$ si la dérivée partielle de la force généralisée selon l'impulsion généralisée est une fonction définie positive (ou négative) des coordonnées de phase, ou identiquement nulle.

La dérivée partielle $\frac{\partial Q(q, p)}{\partial p}$, comme nous l'avons montré, est équivalente à l'expression (**) qui nous donne l'expression du critère de Bendixon [4]. Cependant, cette conclusion est beaucoup plus avantageuse en mécanique pour la raison qu'il n'est pas nécessaire de constituer les équations différentielles du mouvement du système pour un examen qualitatif du comportement de leurs intégrales. Il suffit de déterminer la force généralisée et d'établir, à partir de ses dérivées, l'inexistence de trajectoires de phase fermées.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Андронов, А. А., Леонович, Е. А., Гордон, И. И., Майер, А. Г., *Качествeная теория динамических систем второго порядка*, Москва, 1966.

[2] Андронов, А. А., Витт, А. А. и Хайкин, С. Э., *Теория колебаний* Москва, 1959.

[3] Bendixon, I., *Sur les courbes définies par d'équations différentielles*, Acta, Math., 24 (1901).

[4] Vujičić, V., *Teorija oscilacija*, Beograd, 1969.