Sur les lignes géodésiques d'une classe des surfaces

Par
DRAGOSLAV MITRINOVITCH.

Les projections des lignes géodésiques dans le plan xoy de la surface

$$z=f(x, y) \tag{1}$$

s'obtiennent par l'intégration de l'équation différentielle

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & -1 \\ dx & dy & dz \\ d^2x & d^2y & d^2z \end{vmatrix} = 0, \tag{2}$$

où dz et d^2z doivent être calculés à l'aide de la relation (1).

Si l'on considère x comme variable indépendante et y comme sa fonction, l'équation (2) devient

$$(1+p^2+q^2)y''-pt\,y'^3+(qt-2ps)y'^2+(2qs-pr)y'+qr=0, \tag{3}$$

ou bien

$$(1+p^2+q^2)\,y''+(q-py')(r+2sy'+t\,y'^2)=0,$$

p, q, r, s, t étant des notations classiques de la théorie des équations aux dérivées partielles.

L'équation (3) rentre dans la classe des équations différentielles du deuxième ordre de la forme

$$y'' + a_1(x, y)\, y'^3 + a_2(x, y)\, y'^2 + a_3(x, y)\, y' + a_4(x, y) = 0.$$

On ne peut pas effectuer l'intégration de l'équation (3) dans le cas général. *Nous allons indiquer le cas particulier dans lequel l'équation* (3) *est réductible à une équation linéaire différentielle du deuxième ordre.*

Si l'on a

$$t = 0,$$

ce qui entraîne

$$f(x, y) = \lambda(x) y + \mu(x),$$

$\lambda(x)$ et $\mu(x)$ étant des fonctions arbitraires de x, l'équation (3) devient

$$\begin{aligned} (4) \qquad & [1 + \lambda^2 + (\lambda' y + \mu')^2]\, y'' - 2\lambda' (\lambda' y + \mu')\, y'^2 + \\ & + [2\lambda\lambda' - (\lambda' y + \mu')(\lambda'' y + \mu'')]\, y' + \lambda (\lambda'' y + \mu'') = 0. \end{aligned}$$

Dans le cas spécial

$$\lambda' = 0,$$

c'est-à-dire

$$\lambda = k = \text{const.},$$

l'équation (4) se réduit à

$$(5) \qquad (1 + k^2 + \mu'^2)\, y'' - \mu'\mu'' y' + k\mu'' = 0,$$

laquelle, par substitution $y' = p$, se ramène à l'équation intégrable par des méthodes élémentaires.

Donc *on peut complètement résoudre le problème de la détermination des lignes géodésiques de la surface*

$$z = ky + \mu(x).$$

Si l'on prend, dans l'équation (2), y pour la variable indépendante, on parvient à ce résultat que: *la recherche des projections des lignes géodésiques dans le plan* xoy *de la surface*

$$z=kx+\theta(y),$$

$\theta(y)$ étant une fonction arbitraire de y, *est également réductible à l'intégration d'une équation linéaire intégrable.*

Supposons maitenant que les équations

$$(6)\quad \begin{cases} z=f(x, y), \\ \varphi(x, y, C_1, C_2)=0 \end{cases}$$

représentent des lignes géodésiques de la surface (1), où la famille des courbes à deux paramètres C_1 et C_2, savoir

$$\varphi(x, y, C_1, C_2)=0$$

représente des projections des lignes géodésiques dans le plan xoy.

D'une part, les projections des lignes géodésiques (6) dans le plan yoz s'obtiendront par l'élimination de x des équations (6). Soit

$$(7)\qquad \psi(y, z, C_1, C_2)=0$$

le résultat d'élimination.

D'autre part, à l'aide de l'équation (2) on peut obtenir l'équation différentielle des projections des lignes géodésiques dans le plan yoz qui sera de la forme (3). L'équation (7) sera l'intégrale générale de l'équation différentielle de la forme (3), obtenue de la manière précédente.

Cette remarque conduit ainsi à une manière de former des équations différentielles intégrables de la forme (3).

Nous sommes ainsi en état de déterminer les lignes géodésiques pour chaque surface

$$\Phi(x, y, z)=0$$

pour laquelle deux des variables figurent linéarement, tandis que la troisième peut figurer arbitrairement.

En général, la difficulté de la détermination des lignes géodésiques réside dans l'impossibilité d'intégrer l'équation différentielle de la forme (3). Les géomètres ont alors essayé des méthodes spéciales applicables à certaines catégories des surfaces. Ainsi, par exemple, la détermination des lignes géodésiques sur les surfaces spirales se ramène, par la méthode de *Jacobi*[1]), à l'intégration de l'équation différentielle de la forme

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + y^2 = f(x),$$

qui ne peut s'intégrer, à la vérité, que dans des cas très restreints, mais néanmoins le problème est ramené à l'intégration de l'équation différentielle d'un ordre moins élevé.

---

1) *Darboux*, Leçons sur la Théorie des Surfaces t. III, p. 85.