# Über einige Inversionssätze der Limitierungsverfahren.

Von

J. KARAMATA

**1.** In der Arbeit „Über die $O$-Inversionssätze der Limitierungsverfahren" (Math. Zeit. **37**, 582—588, 1933) bewies ich den folgenden

**Satz A.** *Sei* $\varphi(t)$ *eine im Intervall* $(0, \infty)$ *stetige und nicht, zunehmende Funktion, so dass die Reihen*

$$(1.1) \qquad \sum_{\nu=0}^{\infty} \varphi(\lambda^{\nu}) \quad \textit{und} \quad \sum_{\nu=0}^{\infty} \{1-\varphi(\lambda^{-\nu})\}, \quad \textit{für ein } \lambda > 1,$$

*konvergieren, und* $s(t)$ *von beschränkter Schwankung in jedem endlichen Intervalle; sei ferner*

$$\Phi(\sigma) = \int_0^{\infty} \varphi(\sigma t) d\{s(t)\} \qquad \textit{konvergent für} \quad \sigma > 0.$$

*Aus*

$$(1.2) \qquad \Phi(\sigma) = O(1), \qquad \sigma \to 0,$$

*und*

$$(1.3) \qquad \underset{t \leq t' \leq \lambda t}{Min} \{s(t') - s(t)\} > -m(\lambda) \textit{ für jedes } t > 0 \textit{ und ein } \lambda > 1.$$

*folgt dann*

$$(1.4) \qquad s(t) = O(1), \qquad t \to \infty,$$

Wird in diesem Satze die Konvergenzbedingung (1. 3) durch die schärfere

$$(1.\,5)\quad \operatorname*{Max}_{t\leq t'\leq \lambda t} |\, s(t') - s(t)\,| < m(\lambda) \text{ für jedes } t > 0 \text{ und ein } \lambda > 1.$$

ersetzt, so kann der Beweis dieses Satzes viel einfacher, sogar in paar Zeilen erledigt werden.

Wenn nähmlich $\sigma T = a$ gesetzt wird, so ist

$$|\,\Phi(\sigma) - s(T)\,| < \left| \int_0^T \{1 - \varphi(\sigma t)\}\, d\,\{s(t)\} \right| + \left| \int_T^\infty \varphi(\sigma t)\, d\,\{s(t)\} \right| <$$

$$< \sum_{\nu=0}^{\infty} \left| \int_{T\lambda^{-\nu-1}}^{T\lambda^{-\nu}} \{1 - \varphi(\sigma t)\}\, d\,\{s(t)\} \right| + \sum_{\nu=0}^{\infty} \left| \int_{T\lambda^{\nu}}^{T\lambda^{\nu+1}} \varphi(\sigma t)\, d\,\{s(t)\} \right| <$$

$$< \sum_{\nu=0}^{\infty} \{1 - \varphi(a\lambda^{-\nu})\} \operatorname*{Max}_{T\lambda^{-\nu-1}\leq t\leq T\lambda^{-\nu}} |\, s(T\lambda^{-\nu}) - s(t)\,| +$$

$$+ \sum_{\nu=0}^{\infty} \varphi\,(a\lambda^{\nu}) \operatorname*{Max}_{T\lambda^{\nu}\leq t\leq T\lambda^{\nu+1}} |\, s(t) - s(T\lambda^{\nu})\,|,$$

dass heisst, wegen (1. 5),

$$|\,\Phi(\sigma) - s(T)\,| < m(\lambda) \left[ \sum_{\nu=0}^{\infty} \{1 - \varphi(a\lambda^{-\nu})\} + \sum_{\nu=0}^{\infty} \varphi\,(a\lambda^{\nu}) \right]. \text{ [1]}$$

Also ist, wegen (1. 1),

$$\Phi(\sigma) - s(T) = O(1), \text{ bei } \sigma T = a \text{ und } T \to \infty,$$

woraus, wegen (1. 2), die Behauptung (1. 4) folgt.

In **2**. möchte ich aber, durch eine etwas abweichende Beweisanordnung zeigen, dass im Falle wo die Konvergenzbedingung (1. 3) durch die schärfere Konvergenzbedingung (1. 5)

---

[1] Die Konvergenz dieser Reihe, und zwar für jedes $a > 0$, folgt aus der Monotonie der Funktion $\varphi(t)$ und den Voraussetzungen (1. 1). Denn, wird $\lambda^{-q} \leqslant a \leqslant \lambda^{p}$ gesetzt, so ist

$$1 - \varphi(a\lambda^{n}) \leqslant 1 - \varphi\,(\lambda^{n+p}) \text{ und } \varphi(a\lambda^{n}) \leqslant \varphi(\lambda^{n-q}),$$

ersetzt wird, die zweite Nebenbedingung (1. 1) überflüssig ist.

In **3.** werde ich noch zeigen dass dieser $O$-Inversionssatz einen übrigens elementaren $o$-Inversionssatz als Speziallfall enthält.

**2.** Der genannte $O$-Inversionssatz lautet:

**Satz B.** *Sei* $\varphi(0)$ *endlich,* $\varphi(t)$ *eine, für* $t \geqslant 0$ *nicht zunehmende stetige Funktion und konvergiere das Integral*

$$\int\limits_{c} \frac{\varphi(t)}{t}\, dt\,, \qquad c > 0; \tag{2. 1}$$

*sei weiter* $s(t)$ *von beschränkter Schwankung für* $t > 0$, *und konvergiere das Integral*

$$\Phi(\sigma) = \int\limits_0^\infty \varphi(\sigma t)\, d\{s(t)\} \qquad \textit{für } \sigma > 0.$$

*Aus*

$$\Phi(\sigma) = O(1)\,, \qquad \sigma \to 0\,, \tag{2. 2}$$

*und*

$$\operatorname*{Max}_{t \leq t' \leq \lambda t} |s(t') - s(t)| < m(\lambda) \textit{ für jedes } t > 0 \textit{ und ein } \lambda > 1, \tag{2. 3}$$

*folgt dann*

$$s(t) = O(1)\,, \quad t \to \infty. \tag{2. 4}$$

*Oder präzisiert: wenn*

$$M(a) = m(\lambda) \sum_{\nu=0}^{\infty} \varphi(a\lambda^\nu)\,, \text{[2]} \tag{2. 5}$$

---

2) Wegen der Monotonie der Funktion $\varphi(t)$ folgt die Konvengenz der Reihe

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \varphi(a\lambda^\nu) \quad \text{für jedes} \quad a > 0 \quad \text{und} \quad \lambda > 1\,,$$

aus der Konvergenz des Integrals (2. 1), denn wird $c = a/\lambda$ gesetzt so ist

$$\int\limits_{a/\lambda}^{\infty} \frac{\varphi(t)}{t}\, dt = \sum_{\nu=0}^{\infty} \int\limits_{a\lambda^{\nu-1}}^{a\lambda^\nu} \frac{\varphi(t)}{t}\, dt > \sum_{\nu=0}^{\infty} \varphi(a\lambda^\nu) \int\limits_{a\lambda^{\nu-1}}^{a\lambda^\nu} \frac{dt}{t} = \log \lambda \sum_{\nu=0}^{\infty} \varphi(a\lambda^\nu).$$

*und*

$$M = \underset{\sigma=0}{Max}\,|\Phi(\sigma)|\ , \tag{2.6}$$

*gesetz wird, so ist*

$$|\,s(t)\,| < \frac{M + M(a)}{2\varphi(a) - \varphi(0)}\ , \tag{2.7}$$

$$\textit{für}\quad t > 0\quad \textit{und}\quad 0 < a < \Phi\{\tfrac{1}{2}\,\varphi\,(0)\}\,,$$

*wo* $\Phi$ *die inverse Funktion von* $\varphi$ *bedeutet.*

**Beweis.** Wie in vorangehendem Beweis folgt aus (2.1) und (2.3) dass

$$\left|\int_T^{\infty} \varphi(\sigma t)\,d\{s(t)\}\right| < m(\lambda)\sum_{\nu=0}^{\infty}\varphi\,(a\lambda^{\nu}) = M(a)\,, \tag{2.8}$$

ist, wenn dabei $\sigma T = a$ gesetzt wird. Sei weiter

$$\underline{S}(T) = \underset{0\leq t\leq T}{\mathrm{Max}}\,\{-s(t)\}\ \text{ und }\ \overline{S}\,(T) = \underset{0\leq t\leq T}{\mathrm{Max}}\,\{s(t)\}$$

gesetzt, so folgt aus der Gleichung

$$\Phi(\sigma) = \varphi(\sigma T)\,s(T) - \int_0^T s(t)\,d\{\varphi(\sigma t)\} + \int_T^{\infty}\varphi(\sigma t)\ d\{s(t)\}\ ,$$

(wo ohne Beschränkung der Allgemeinheit $s(0) = 0$ gesetzt ist) da $\varphi(t)$ nicht zunimmt, und unter Berücksichtigung von (2.6) erstens

$$M > \varphi(a)\,s(T) - \{\varphi(0) - \varphi(a)\}\,\underline{S}(T) - M(a),$$

zweitens

$$-\,M < \varphi(a)\,s(T) + \{\varphi(0) - \varphi(a)\}\,\overline{S}(T) + M(a).$$

Also ist, einerseits

$$(2.9)\qquad -\underline{S}(T) \leqslant s(T) < \frac{\varphi(0)-\varphi(a)}{\varphi(a)}\,\underline{S}(T) + \frac{M+M(a)}{\varphi(a)}\,,$$

und anderseits

$$(2.10)\qquad -\frac{M+M(a)}{\varphi(a)} - \frac{\varphi(0)-\varphi(a)}{\varphi(a)}\,\overline{S}(T) < s(T) \leqslant \overline{S}(T)\,.$$

Da aber $\overline{S}(t)$ die kleinste nicht abnehmende Funktion ist welche grösser als $s(t)$ ist, so folgt aus (2. 9) dass

$$\overline{S}(T) \leqslant \frac{\varphi(0)-\varphi(a)}{\varphi(a)}\,\underline{S}(T) + \frac{M+M(a)}{\varphi(a)}$$

ist, und aus demselben Grunde, wegen (2. 10) dass

$$\underline{S}(T) \leqslant \frac{\varphi(0)-\varphi(a)}{\varphi(a)}\,\overline{S}(T) + \frac{M+M(a)}{\varphi(a)}$$

ist. Wird nun die zweite dieser Ungleichungen mit $\dfrac{\varphi(0)-\varphi(a)}{\varphi(a)}$ multipliziert und zur ersten addiert, so folgt

$$\overline{S}(T)\left[1-\left(\frac{\varphi(0)-\varphi(a)}{\varphi(a)}\right)^2\right] < \frac{M+M(a)}{\varphi(a)}\left(1+\frac{\varphi(0)-\varphi(a)}{\varphi(a)}\right),$$

und daraus wird,

$$\overline{S}(T) < \frac{M+M(a)}{2\varphi(a)-\varphi(0)}\,,$$

weil $a$ so gewählt werden kann dass

$$1-\frac{\varphi(0)-\varphi(a)}{\varphi(a)} > 0$$

sei.

Dies in (2. 10) eingesetzt liefert

$$(2.11)\qquad |s(T)| < \frac{M+M(a)}{2\varphi(a)-\varphi(0)}$$

für jedes $T > 0$ und $\quad 0 < a < \Phi\left\{\frac{1}{2}\,\varphi(0)\right\}$, woraus also die Behauptungen (2. 4) und (2. 7) folgen

**3.** Der $O$-Inversionssatz $B$ enthält nun als Spezialfall einen $o$-Inversionssatz, welcher von elementarer Natur ist und dem speziellen Tauberschen[3]) Satz entspricht.

Da nämlich (2. 8) nur von einem $T \geqslant T_0$ ab zu gelten braucht, und 2. 6) nur von einem $\sigma \leqslant \sigma_0$, wo $\sigma_0 T_0 = a$ ist, so kan mann in (2. 11) die Zahl (2. 6) durch

$$\operatorname*{Max}_{0<\sigma\leq\sigma_0} |\Phi(\sigma)| = M(\sigma_0),$$

und (2. 5) durch

$$M(a, T_0) = m(\lambda, T_0) \sum_{\nu=1}^{\infty} \varphi(a\lambda^{\nu})$$

erzetzen, wobei

$$m(\lambda, T_0) = \operatorname*{Max}_{T_0\leq t\leq t'\leq\lambda t} |s(t') - s(t)|$$

ist.

Das Ergebnis (2. 7) lautet dann

$$(3.1) \qquad |s(T)| < \frac{M(\sigma_0) + M(a, T_0)}{2\varphi(a) - \varphi(0)}, \qquad \text{für } T > T_0,$$

so dass, wenn stat (2. 2)

$$(3.2) \qquad \Phi(\sigma) = o(1), \quad \sigma \to 0,$$

und stat (2. 3)

$$(3.3) \quad \operatorname*{Max}_{t\leq t'\leq\lambda t} |s(t') - s(t)| = o(1) \text{ bei } t \to \infty \text{ und ein } \lambda > 1,$$

---

3) A. Tauber. Ein Satz aus der Theorie der unendlichen Reihen. Monatsht. f. Math. u. Phys. **8**, S. 273-277. (1897). Bezüglich der Sätze dieser Art vergleiche auch:

E. Landau, Über die Konvergenz einiger Klassen von unendlichen Reihen am Rande des Konvergenzgebietes. Monatsh. f. Math. u. Phys. **18**, S. 8-28, (1907).

R. Schmidt, Über divergente Folgen und lineare Mittelbildungen, Math. Zeit, **22**, S. 145, Theorem VIII, (1925).

J. Karamata, Neuer Beweis und Verallgemeinerung der Tauberschen Sätze welche die Laplacesche und Stieltjessche Transformation betreffen. Jour. f. d. reine u. angew. Math. **164**, S. 36, Satz D, (1931).

vorausgesetzt wird, aus (3. 1)

$$(3.4) \qquad s(T) = o(1), \quad T \to \infty,$$

gefolgert werden kann, da

$$M(\sigma_0) \text{ mit } \sigma_0 \text{ und } M(a, T_0) \text{ mit } 1/T_0$$

beliebig klein gemacht werden können.

Es entsteht also der $o$-Inversionssatz:

*Unter der Voraussetzung (2. 1) folgt (3. 4) aus (3. 2) und (3. 3).*

Bezüglich der Konvergenzbedingung (3. 3) sei hier noch bemerkt, dass man ihr die anschaulich allgemeinere Form

$$(3.5) \quad s(\lambda t) - s(t) = o(1), \quad t \to \infty, \text{ für alle } 1 \leqslant \lambda < \lambda_0$$

geben kann.

Ist nämlich (3. 5) erfüllt und

$$s(t) = \log v(t)$$

gesetzt, so wird

$$v(\lambda t)/v(t)t \to 1, \quad t \to \infty, \quad \text{für alle} \quad 1 \leqslant \lambda < \lambda_0.$$

In der Arbeit „Sur un mode de croissance régulière". (Bull. de la Soc. Math. de France, T. **61**. S. 58—59, Théorème III, 1933) bewies ich aber dass in diesem Falle die Funktion $v(t)$ die kanonische Gestalt

$$v(t) = C(t)\, e^{\int_0^t \frac{\varepsilon(\tau)}{\tau} d\tau},$$

mit

$$\lim_{t=\infty} C(t) > 0 \qquad \text{und} \qquad \varepsilon(\tau) = o(1), \qquad \varepsilon \to \infty,$$

haben muss. Also hat $s(t)$ die kanonische Form

$$(3.6) \qquad s(t) = c(t) + \int_0^t \frac{\varepsilon(\tau)}{\tau} d\tau,$$

wo

$\lim_{t=\infty} c(t)$ endlich ist und $\varepsilon(\tau)=o(1)$, $\tau \to \infty$.

Daraus folgt aber leicht dass die Konvergenzbedingung (3. 3), sogar für jedes $\lambda$, erfüllt ist, so dass der $o$-Inversionssatz wie folgt formuliert werden kann:

**Satz C.** *Sei* $\varphi(0)$ *endlich,* $\varphi(t)$ *nicht zunehmend für* $t > 0$, *existiere das Integral*

$$\int_c^\infty \frac{\varphi(t)}{t}\,dt \qquad \text{für } c > 0,$$

*und das Integral*

$$\Phi(\sigma) = \int_0^\infty \varphi(\sigma t)\, d\{s(t)\} \quad \text{für} \quad \sigma > 0;$$

*aus*

$$\Phi(\sigma) = o(1), \qquad \sigma \to 0,$$

*und*

$$s(\lambda t) - s(t) = o(1), \quad t \to \infty, \quad \text{für jedes } 1 \leqslant \lambda < \lambda_0$$

*folgt*

$$s(t) = o(1), \quad t \to \infty.$$

Die Konvergenzbedingung (3. 5) enthält die der Tauberschen entsprechende Konvergenzbedingung (sie ist ihr sogar äquivalent)

$$\int_0^x t\,d\{s(t)\} = x\varepsilon(x) = o(x), \qquad x \to \infty, \tag{3, 7}$$

da aus dieser $s(x)$ in der Form

$$s(x) = \varepsilon(x) + \int_0^x \frac{\varepsilon(t)}{t}\,dt,$$

geschrieben werden kann, so dass $s(x)$ von der Form (3. 6) ist.

Die $o$-Inversionssätze mit den Konvergenzbedingungen der Form (3. 7), (3. 5) oder (3. 3) sind von elementarer Natur; die entsprechenden von Hardy, Littlewood und N. Wiener gegebenen tiefliegenden Sätze entstehen erst wenn die Konvergenzbedingungen von der Form (2. 3) oder (1. 3) mit $m(\lambda) \to 0$ $(\lambda \to 1)$ in Anspruch genommen werden.

Beograd, 5-XII-1934.