Sur la méthode des approximations successives d'équations différentielles.

Par

TADYA PEYOVITCH.

1. Soit donné un système d'équations de la *forme* dite, d'après E. Cotton[1]), *pseudolinéaire*

$$(1) \qquad \frac{dz_i}{dt} + \sum_{k=1}^{n} a_{ik}(t)\, z_k = f_i(t, z_1, z_2, \ldots, z_n),$$

où $a_{ik}(t)$ sont des fonctions finies et continues dans l'intervalle (t_0, t_0+h), prenant le valeurs finies et déterminées pour $t=t_0$, et les fonctions $f_i(t, z_1, z_2, \ldots, z_n)$ finies, continues, satisfaisant aux conditions de Lipschitz pour

$$|\, t - t_0 \,| < h, \qquad |\, z_i - z_0 \,| < a.$$

Les fonctions et les variables sont supposées réelles[2])

Dans cette note nous allons démontrer l'existence des intégrales d'équations (1) par une méthode qui consiste à transformer les équations (1) en équations intégrales et appliquer à celles-ci le procédé classique d'approximations successives de M. Picard. Puis, nous appliquerons la même méthode, mais simplifiée, au système d'équations linéaires.

---

[1]) Pour les solutions de ces équations, voir les travaux remarquables de M. Emile Cotton (Mémorial des S iences Mathématiques, fasc. 28, 1928) et le travail intéressant de M. O. Perron (Mathematische Zeitschrift, B. 32, 1930).

[2]) Dans le cas des variables complexes, les fonctions ci-dessus sont holomorphes à l'intérieur du domaine onsideré. L'intégration se fait suivant la ligne droite qui joint le deux points t_0, t.

Ecrivons les équations (1) sous la forme

$$\text{(2)}\qquad \frac{dz_i}{dt}+\sum_{k=1}^{n}a_{ik}(t_0)z_k=f_i(t,z_1,z_2,\ldots,z_n)+\sum_{k=1}^{n}\delta_{ik}(t)z_k\,,$$

où l'on a posé

$$\delta_{ik}(t)=a_{ik}(t_0)-a_{ik}(t),\quad \delta_{ik}(t_0)=0.$$

Les équations (2), aprés la substitution linéaire

$$\text{(3)}\qquad x_i=\sum_{k=1}^{n}b_{ik}z_k\,,$$

se divisent en un certain nombre de groupes d'équations de la forme

$$\text{(4)}\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt}&=r_px_1+\varphi_1(t,x_1,x_2,\ldots,x_n)+\sum_{k=1}^{n}c_{1k}(t)x_k\,,\\ \frac{dx_2}{dt}&=r_px_2+x_1+\varphi_2(t,x_1,x_2,\ldots,x_n)+\sum_{k=1}^{n}c_{2k}(t)x_k\,,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ \frac{dx_p}{dt}&=r_px_p+x_{p-1}+\varphi_p(t,x_1,x_2,\ldots,x_n)+\sum_{k=1}^{n}c_{pk}(t)x_k, \end{aligned}\right.$$

r_p étant une racine d'ordre p de l'équation caractéristique

$$\text{(5)}\qquad \begin{vmatrix} a_{11}(t_0)+r & a_{12}(t_0)\ldots\ldots & a_{1n}(t_0)\\ a_{21}(t_0) & a_{22}(t_0)+r\ldots & a_{2n}(t_0)\\ \ldots & \ldots & \ldots\\ a_{n1}(t_0) & a_{n2}(t_0)\ldots\ldots & a_{nn}(t_0)+r \end{vmatrix}=0,$$

correspondant au système d'équations

$$\text{(6)}\qquad \frac{dz_i^0}{dt}+\sum_{k=1}^{n}a_{ik}(t_0)z_k^0=0\,.$$

$\varphi_i(t,x_1,x_2,\ldots,x_n)$ satisfont aux conditions analogues à celles des fonctions $f_i(t,z_1,z_2,\ldots,z_n)$; $c_{ik}(t)$ sont de fonctions finies, continues dans l'intervalle (t_0,t_0+h), satisfaisant aux conditions

$$c_{ik}(t_0)=0$$

Puisque à chaque solution des équations (4) correspond, d'après (3), une solution des équations (1), il suffit de considérer les équations (4).

2. Considérons donc les équations de la forme (4). Les équations intégrales correspondant sont

$$x_1 = C_1 e^{r_p t} + e^{r_p t} \int_{t_0}^{t} e^{-r_p t} \left\{ \varphi_1[t, x_1(t), \ldots, x_n(t)] + \sum_{k=1}^{n} c_{1k}(t) x_k(t) \right\} dt\,,$$

$$x_2 = C_2 e^{r_p t} + e^{r_p t} \int_{t_0}^{t} e^{-r_p t} \left\{ x_1(t) + \varphi_2[t, x_1(t), \ldots, x_n(t)] + \sum_{k=1}^{n} c_{2k}(t) x_k(t) \right\} dt,$$

. . . .

ou

$$\left\{\begin{aligned}
x_1 &= x_1^0 + e^{r_p t} \int_{t_0}^{t} e^{r_p t} \Big\{ \varphi_1[t, x_1(t), \ldots, x_n(t)] + \\
&\qquad + \sum_{k=1}^{n} c_{1k}(t) x_k(t) \Big\} dt, \\
x_2 &= x_2^0 + e^{r_p t} \int_{t_0}^{t} e^{r_p t} \Big\{ \varphi_2[t, x_1(t), \ldots, x_n(t)] + \\
&\qquad + \sum_{k=1}^{n} c_{2k}(t) x_k(t) \Big\} dt \\
&\quad + e^{r_p t} \int_{t_0}^{t} dt_1 \int_{t_0}^{t_1} e^{-r_p t_2} \Big\{ \varphi_1[t_2\ x_1(t_2), \ldots, x_n(t_2)] + \\
&\qquad + \sum_{l=}^{n} c_{1k}(t_2) x_k(t_2) \Big\} dt_2, \\
& \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}\right.$$

x_i^0 étant les solutions bornées des équations

$$(7)\qquad \begin{aligned} &\frac{dx_1^0}{dt}=r_p x_1^0,\\ &\frac{dx_2^0}{dt}=r_p x_2^0+x_1^0,\\ &\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\\ &\frac{dx_p^0}{dt}=r_p x_p^0+x_{p-1}^0 \end{aligned}$$

dans l'intervalle (t_0, t_0+h).

Supposons:

1° que les fonctions $c_{ik}(t)$ soient finies, continues dans l'intervalle (t_0, t_0+h), satisfaisant aux conditions

$$c_{ik}(t_0)=0, \qquad |c_i(t)| \leq \frac{A}{2n},$$

où A est une constante positive, n désignant le nombre de fonctions inconnues;

2° que les fonctions $\varphi_i(t, x_1, x_2, \ldots, x_n)$, pour $|t-t_0|<h$ $|x_i-x_i^0|<b$, soient finies, continues, satisfaisant aux conditions

$$|\varphi_i(t, x_1'', x_2'', \ldots, x_n'')-\varphi_i(t, x_1', x_2', \ldots x_n')| \leq \frac{A}{2n}\sum_{i=1}^{n}|x_i''-x_i'|,$$

h et b étant des constantes positives;

3° que l'on ait

$$\varepsilon < \frac{b}{M+Ab}$$

où

$$e^{\rho_p t}\int_{t_0}^{t} e^{-\rho_p t}dt=\varepsilon_1(t)\leq\varepsilon(t)\leq\varepsilon^1),$$

$$e^{\rho_p t}\int_{t_0}^{t} e^{-\rho_p t}dt+e^{\rho_p t_2}\int_{t_0}^{t}dt_1\int_{t_0}^{t_1}e^{-\rho_p t_2}dt_2=\varepsilon_2(t)\leq\varepsilon(t)\leq\varepsilon,$$

$$\cdot\ ;$$

---

1) $\left|e^{r_p t}\right|\int_{t_0}^{t}\left|e^{-r_p t}\right|dt= e^{\rho_p t}\int_{t_0}^{t}e^{-\rho_p t}dt=\varepsilon_1(t), \varepsilon_1(t_0)=0,$

ρ_p étant la partie reelle de r_p.

$$\varepsilon = \max.\, \varepsilon(t) \text{ pour } t_0 \leq t \leq t_0 + h,\ \varepsilon(t_0) = 0 \ [1]),$$

M étant une constante positive, satisfaisant à la condition

$$|\varphi_i(t, x_1, x_2, \ldots, x_n) + \sum_{k=1}^{n} c_{ik}(t)\, x_k | \leq M$$

pour $| t - t_0 | < h,\ | x_i - x_i^0 | < b$.

Nous appelerons les conditions 1°, 2°, 3°: conditions (P).

En partant du systeme x_i^0 de solutions des équations (7), on peut obtenir les suites des fonctions

$$x_i^1,\ x_i^2, \ldots,\ x_i^m,$$

comme solutions successives d'équations intégrales

$$(8)\quad \left\{ \begin{aligned} x_i^m = x_1^0 + e^{r_p t} \int_{t_0}^{t} e^{-r_p t} \Big\{ & \varphi_1 [t, x_1^{m-1}(t), \ldots, x_n^{m-1}(t)] + \\ & + \sum_{k=1}^{n} c_{1k}(t)\, x_k^{m-1} \Big\}\, dt, \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned} \right.$$

d'où

$$x_1^m - x_1^{m-1} = e^{r_p t} \int_{t_0}^{t} e^{-r_p t} \Big\{ \varphi_1 (t, x_1^{m-1}, \ldots, x_n^{m-1}) -$$

$$- \varphi_1 (t, x_1^{m-2}, \ldots, x_n^{m-2}) + \sum_{k=1}^{n} c_{1k}(t)\, (x_k^{m-1} - x_k^{m-2}) \Big\}\, dt,$$

[1]) $\varepsilon(t)$ étant une fonction positive satisfaisant, dans l'intervalle $(t_0,\ t_0 + h)$ suffisamment petit, aux conditions $\varepsilon(t_0) = 0$, $\varepsilon_i(t) \leq \varepsilon(t) \leq \varepsilon$. ε étant une constante positive satisfaisant à la relation $\varepsilon < \dfrac{b}{M + Ab}$.

$$x_2^m - x_2^{m-1} = e^{r_p t}\int_{t_0}^{t} e^{-r_p t}\Big\{\varphi_2(t, x_1^{m-1}, \ldots, x_n^{m-1}) -$$

$$- \varphi_2(t, x_1^{m-2}, \ldots, x_n^{m-2}) + \sum_{k=1}^{n} c_{2k}(t)(x_k^{m-1} - x_k^{m-2})\Big\} dt +$$

$$+ e^{r_p t}\int_{t_0}^{t} dt_1 \int_{t_0}^{t_1} e^{-r_p t_2}\Big\{\varphi_1(t_2, x_1^{m-1}, \ldots, x_n^{m-1}) -$$

$$- \varphi_1(t_2, x_1^{m-2}, \ldots, x_n^{m-2}) + \sum_{k=1}^{n} c_{1k}(t_2)(x_k^{m-1} - x_k^{m-2})\Big\} dt_2,$$

. . . . . , ... , ...

Les équations ci-dessus, en vertu des conditions (P), donnent

$$(9)\quad \begin{cases} |x_1^m - x_1^{m-1}| \le \dfrac{A}{n} e^{\rho_p t}\displaystyle\int_{t_0}^{t} e^{-\rho_p t}\sum_{k=1}^{n} |x_k^{m-1} - x_k^{m-2}|\, dt, \\[2ex] |x_2^m - x_2^{m-1}| \le \dfrac{A}{n}\Big\{e^{\rho_p t}\displaystyle\int_{t_0}^{t} e^{-\rho_p t}\sum_{k=1}^{n} |x_k^{m-1} - x_k^{m-2}|\, dt + \\[2ex] \qquad + e^{\rho_p t}\displaystyle\int_{t_0}^{t} dt_1 \int_{t_0}^{t_1} e^{-\rho_p t_2}\sum_{k=1}^{n} |x_k^{m-1} - x_k^{m-2}|\, dt_2\Big\}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

Pour $m=1$, les équations (8), d'après les conditions $[(P), 3^0]$, donnent

$$|x_1^1 - x_1^0| \le M e^{\rho_p t}\int_{t_0}^{t} e^{-\rho_p t} dt = M\varepsilon_1(t) \le M\varepsilon(t) \le M\varepsilon,$$

$$|x_2^1 - x_2^0| \le M\Big\{e^{\rho_p t}\int_{t_0}^{t} e^{-\rho_p t} dt + e^{\rho_p t}\int_{t_0}^{t} dt_1 \int_{t_0}^{t_1} e^{-\rho_p t_2} dt_2\Big\} =$$

$$= M\varepsilon_2(t) \le M\varepsilon(t) \le M\varepsilon,$$

. . . .

c'est-à-dire

$$(10) \qquad |x_i^1 - x_i^0| \leq M\varepsilon(t) \leq M\varepsilon$$

$$\varepsilon = \max \varepsilon(t) \text{ pour } t_0 \leq t \leq t_0 + h, \quad \varepsilon(t_0) = 0 .$$

Pour $m = 2$, les équations (9), d'après [(P), 3°] et (10), donnent

$$|x_1^2 - x_1^1| \leq AM\varepsilon\varepsilon_1(t) \leq AM\varepsilon\varepsilon(t) \leq AM\varepsilon^2,$$
$$|x_2^2 - x_2^1| \leq AM\varepsilon\varepsilon_2(t) \leq AM\varepsilon\varepsilon(t) \leq AM\varepsilon^2,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ,$$

c'est-à-dire

$$|x_i^2 - x_i^1| \leq AM\varepsilon^2.$$

En procédant ainsi, on obtient

$$(11) \qquad |x_i^m - x_i^{m-1}| \leq A^{m-1} M\varepsilon^{m-1} \varepsilon(t) \leq A^{m-1} M\varepsilon^m$$

avec

$$\varepsilon = \max . \varepsilon(t) \text{ pour } t_0 \leq t \leq t_0 + h, \quad \varepsilon(t_0) = 0.$$

Il est évident que la série

$$(12) \qquad x_i = x_i^0 + \sum_{m}^{\infty} (x_i^m - x_i^{m-1})$$

converge uniformément dans l'intérvalle suffisamment petit $(t_0, t_0 + h)$, car ses termes sont égaux ou inférieurs à ceux des série

$$(13) \quad |x_i - x_i^0| \leq M\varepsilon(1 + A\varepsilon + A^2\varepsilon^2 + \cdots + A^m\varepsilon^m + \cdots) .$$

Les solutions x_i, données par la série (12), satisfont, d'après (11), aux relations

$$x_i(t_0) = x_i^0(t_0) .$$

La série (13) est convergente, car on a, d'après les conditions $[(P), 3^0]$,

$$\varepsilon < \frac{b}{M+Ab}$$

et, à fortiori,

$$A\varepsilon < 1, \quad \varepsilon < \frac{1}{A} .$$

De même on a, d'après (13) et (P),

$$|x_i - x_i^0| \leq \frac{M\varepsilon}{1-A\varepsilon} < b$$

et, à fortiori,

$$M\varepsilon < b, \quad \varepsilon < \frac{b}{M} .$$

Il s'ensuit que toutes les solutions x_i sont dans le domaine

$$|t-t_0| < h , \quad |x_i - x_i^0| < b$$

Par conséquent, on a le théorème suivant:

I. *Les équations* (4) *admettent, sous les conditions* (P), *pour*

$$|t-t_0| < h , \quad |x_i - x_i^0| < b$$

et h *suffisamment petit, un système* x_i *de solutions satisfaisant la relation*

$$x_i(t_0) = x_i^0(t_0) ,$$

où x_i^0 *sont les solutions des équations* (7). *Le système* x_i *dépend de* n *constantes arbitraires, et lui correspond un système* z_i *de solutions des équations* (1).

3. Il faut remarquer que la démonstration se simplifie pour le cas d'une équation. Considérons, en effet, une équation

$$\frac{dx}{dt} + a(t)x = f(t,x) ,$$

$a(t)$ étant une fonction finie, continue dans l'intervalle (t_0, t_0+h), prenant la valeur finie et déterminée pour $t=t_0$. Ecrivons la sous la forme

$$\frac{dx}{dt} + a(t_0)x = f(t, x) + c(t)x ,$$

avec

$$c(t) = a(t_0) - a(t), \qquad c(t_0) = 0.$$

L'équation intégrale correspondante est

$$x = Ce^{rt} + e^{rt} \int_{t_0}^{t} e^{-rt} \Big\{ f[t, x(t)] + c(t)x(t) \Big\} dt, \quad (r = -a(t_0)),$$

ou

$$x = x^0 + e^{rt} \int_{t_0}^{t} e^{-rt} \Big\{ f[t, x(t)] + c(t)x(t) \Big\} dt,$$

x^0 étant la solution de l'équation

$$\frac{dx^0}{dt} + a(t_0)x^0 = 0 .$$

Les conditions (P) deviennent ici:

1° que $c(t)$ soit une fonction finie, continue dans l'intervalle (t_0, t_0+h), satisfaisant aux conditions,

$$c(t_0) = 0, \qquad | c(t) | \leq \frac{A}{2} ;$$

2° que la fonction $f(t,x)$, pour $| t-t_0 | < h$, $| x-x^0 | < b$, soit finie, continue, satisfaisant à la condition

$$|f(t,x'') - f(t,x')| \leq \frac{A}{2} | x''-x' | ;$$

3°

$$\varepsilon < \frac{b}{M+Ab}$$

où

$$e^{\rho t}\int_{t_0}^{t} e^{-\rho t}dt = \varepsilon_1(t) \leq \varepsilon(t) \leq \varepsilon \text{ [1]}$$

$$\varepsilon = \max . \varepsilon(t) \text{ pour } t_0 \leq t \leq t_0+h, \quad \varepsilon(t_0) = 0;$$

$$| f(t, x)+c(t)x | \leq M$$

pour $| t-t_0 | < h$, $| x-x^0 | < b$.

Les solutions successives sont données par l'équation intégrale

$$x^m = x^0 + e^{rt}\int_{t_0}^{t} e^{-rt}\left\{ f[t, x^{m-1}(t)] + c(t)x^{m-1}(t)\right\} dt .$$

Exemple. — Soit donnée l'équation

$$(a) \qquad \frac{dx}{dt} + x = tx ;$$

l'équation intégrale est

$$x = Ce^{-t} + e^{-t}\int_{0}^{t} e^{t}\, tx dt .$$

En partant de la solution $x^0 = Ce^{-t}$, on obtient les solutions successives

[1] ρ étant la partie réelle de r; $\varepsilon(t)$ étant une fonction positive satisfaisant, dans l'intervalle (t_0, t_0+h) suffisamment petit, aux conditions $\varepsilon_1(t) \leq \varepsilon(t)$, $\varepsilon(t_0)=0$.

$$x^1 = Ce^{-t} + ce^{-t}\frac{t^2}{2} = Ce^{-t}\left(1 + \frac{t^2}{2}\right),$$

$$x^2 = Ce^{-t}\left(1 + \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{2\,.\,4}\right),$$

$$x^3 = Ce^{-t}\left(1 + \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{2\,.\,4} + \frac{t^6}{2.4.6}\right),$$

$$\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot,$$

$$x^m = Ce^{-t}\left(1 + \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{2\,.\,4} + \frac{t^6}{2.4.6} + \cdots + \frac{t^{2m}}{2\,.\,4\,.\,6\ldots 2m}\right).$$

Par conséquent, on aura la solution de l'équation (a)

$$x = Ce^{-t}\left(1 + \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{2\,.\,4} + \frac{t^6}{2.4.6} + \cdots + \right.$$
$$\left. + \frac{t^{2m}}{2\,.\,4\,.\,6\ldots 2m} + \cdots\right) = Ce^{\left(\frac{t^2}{2} - t\right)}.$$

4. Considérons maintenant un système d'équations linéaires

$$\frac{dx_i}{dt} + \sum_{k=1}^{n} a_{ik}(t)x_k = f_i(t) \tag{14}$$

où $a_{ik}(t)$ sont des fonctions finies, continues dans l'intervalle (t_0, t_0+h), prenant les valeurs finies et déterminées pour $t=t_0$; $f_i(t)$ sont des fonctions finies et continues dans l'intervalle (t_0, t_0+h).

Ecrivons les équations (14) sous la forme

$$\frac{dx_i}{dt} + \sum_{k=1}^{n} a_{ik}(t_0)x_k = f_i(t) + \sum_{k=1}^{n} \delta_{ik}(t)x_k$$

avec

$$\delta_{ik}(t) = a_{ik}(t_0) - a_{ik}(t), \quad \delta_{ik}(t_0) = 0.$$

Soit x_i^0 un système de solutions bornées des équations

$$(15) \qquad \frac{dx_i^0}{dt} + \sum_{k=1}^{n} a_{ik}(t_0)x_k^0 = f_i(t)$$

c'est-à-dire

$$|x_i^0| \leq M, \quad \text{pour} \ t_0 \leq t \leq t_0 + h,$$

M étant une constante positive et fixe. En partant du système x_i^0 de solutions des équations (15), on obtient une suite de fonctions

$$x_i^1, x_i^2, \ldots, x_i^m, \ldots.$$

comme les solutions successives d'équations

$$\frac{dx_i^m}{dt} + \sum_{k=1}^{n} a_{ik}(t_0)\, x_k^m = f_i(t) + \sum_{k=1}^{n} \delta_{ik}(t) x_k^{m-1}.$$

Les équations ci-dessus, après la substitution linéaire

$$(16) \qquad y_i^m = \sum_{k=1}^{n} b_{ik}\, x_k^m,$$

se divisent en un certain nombre de groupes d'équations de la forme

$$(17) \quad \begin{cases} \dfrac{dy_1^m}{dt} = r_p\, y_1^m + \varphi_1(t) + \varphi_1^m(t) \\ \dfrac{dy_2^m}{dt} = r_p\, y_2^m + y_1^m + \varphi_2(t) + \varphi_2^m(t), \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot, \\ \dfrac{dy_p^m}{dt} = r_p\, y_p^m + y_{p-1}^m + \varphi_p(t) + \varphi_p^m(t), \end{cases}$$

où l'on a posé

$$\varphi_i(t) = \sum_{k=1}^{n} b_{ik}\, f_k(t),$$

$$(18)\qquad \varphi_i(t) = b_{i1}\sum_{k=1}^{n}\delta_{1k}(t)x_k^{m-1} + \cdots + b_{in}\sum_{k=1}^{n}\delta_{nk}(t)x_k^{m-1} ,$$

r_p étant la racine d'ordre p de l'équation caracteristique (5). Les équations integrales correspondant aux équations (17) sont

$$y_1^m = C_1 e^{r_p t} + e^{r_p t}\int_{t_0}^{t} e^{-r_p t}\left[\varphi_1(t) + \varphi_1^m(t)\right] dt ,$$

$$y_2^m = C_2 e^{r_p t} + e^{r_p t}\int_{t_0}^{t} e^{-r_p t}\left[y_1^m(t) + \varphi_2(t) + \varphi_2^m(t)\right] dt ,$$

. . . .

où

$$(19)\quad \left\{\begin{array}{l} y_1^m = y_1^0 + e^{r_p t}\displaystyle\int_{t_0}^{t} e^{-r_p t}\varphi_1^m(t)\, dt, \\ y_2^m = y_2^0 + e^{r_p t}\displaystyle\int_{t_0}^{t} e^{-r_p t}\varphi_2^m(t) + e^{r_p t}\int_{t_0}^{t} dt_1 \int_{t_0}^{t_1} e^{-r_p t_2}\varphi_1^m(t_2) dt_2 , \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right.$$

y_i^0 étant le système de solutions des équations

$$\frac{dy_1^0}{dt} = r_p y_1^0 + \varphi_1(t) ,$$

$$\frac{dy_2^0}{di} = r_p y_2^0 + y_1^0 + \varphi_2(t),$$

. . . .

Formons les différences successives

$$(20)\quad \begin{cases} y_1^m - y_1^{m-1} = e^{r_p t}\displaystyle\int_{t_0}^{t} e^{-r_p t}\left[\varphi_1^m(t) - \varphi_1^{m-1}(t)\right] dt, \\ y_2^m - y_2^{m-1} = e^{r_p t}\displaystyle\int_{t_0}^{t} e^{-r_p t}\left[\varphi_2^m(t) - \varphi_2^{m-1}(t)\right] dt \\ \qquad + e^{r_p t}\displaystyle\int_{t_0}^{t} dt_1 \int_{t_0}^{t_1} e^{-r_p t_2}\left[\varphi_1^m(t_2) - \varphi_1^{m-1}(t_2)\right] dt_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{cases}$$

où l'on a, d'après (18),

$$(21)\quad \varphi_i^m(t) - \varphi_i^{m-1}(t) = b_{i1}\sum_{k=1}^{n} \delta_{1k}(t)\,(x_k^{m-1} - x_k^{m-2}) + \cdots + $$
$$+ b_{in}\sum_{k=1}^{n} \delta_{nk}(t)\,(x_k^{m-1} - x_k^{m-2}).$$

Considérons maintenant les différences successives $y_i^m - y_i^{m-1}$, c'est-à-dire $x_i^m - x_i^{m-1}$.

Puisque on a $|x_i^0| \leq M$, les équations (18) donnent, pour $m=1$,

$$|\varphi_i(t)| \leq M\delta_i(t)$$

avec

$$\delta_i(t) = |b_{i1}| \sum_{k=1}^{n} |\delta_{1k}(t)| + \cdots + |b_{in}| \sum_{k=1}^{n} |\delta_{nk}(t)|, \quad \delta_i(t_0) = 0.$$

Il s'ensuit, pour les équations (19) et $m=1$,

$$|y_1^1 - y_2^0| \leq Me^{\rho_p t}\int_{t_0}^{t} e^{-\rho_p t}\delta_1(t)dt = M\varepsilon_1(t),$$

$$|y_2^1-y_2^0| \leq M\left[e^{\rho_p t}\int_{t_0}^{t} e^{-\rho_p t}\delta_2(t)\,dt + \right.$$

$$\left. + e^{\rho_p t}\int_{t_0}^{t} dt_1 \int_{t_0}^{t_1} e^{-\rho_p t}\delta_1(t_2)\,dt_2\right] = M\varepsilon_2(t),$$

. . . .

avec $\varepsilon_i(t_0)=0$, d'où l'on a, d'aprés (16),

$$(22) \qquad |x_i^1-x_i^0| \leq M\varepsilon(t) < M\varepsilon$$

$$\varepsilon(t_0)=0, \quad \varepsilon=\max.\,\varepsilon(t), \text{ pour } t_0 \leq t \leq t_0+h.$$

Grâce aux inégalités (22), les équations (21), pour $m=2$, donnent

$$|\varphi_i^2(t) - \varphi_i^1(t)| \leq M\varepsilon\delta_i(t)$$

d'où l'on a, pour les équations (20),

$$|y_1^2-y_1^1| \leq M\varepsilon\varepsilon_1(t),$$
$$|y_2^2-y_2^1| \leq M\varepsilon\varepsilon_2(t),$$

. . . .

et par suite, d'après (16),

$$|x_i^2-x_i^1| \leq M\varepsilon\varepsilon(t) \leq M\varepsilon^2.$$

En continuant ainsi, on obtient

$$(23) \qquad |x_i^m-x_i^{m-1}| \leq M\varepsilon^{m-1}\varepsilon(t) \leq M\varepsilon^m,$$

$$\varepsilon(t_0)=0, \quad \varepsilon=\max.\,\varepsilon(t) \text{ pour } t_0 \leq t \leq t_0+h.$$

Si l'on choisi l'intervalle (t_0, t_0+h) suffisamment petit pour que l'on ait

$$\varepsilon=\max.\,(t) < 1,$$

ce qui est possible à cause de $\varepsilon(t_0)=0$, les séries

$$x_i = x_i^0 + \sum_{m=1}^{\infty} (x_i^m - x_i^{m-1})$$

convergent uniformément dans l'intervalle (t_0, t_0+h) et représentent les solutions des équations (14) satisfaisant, d'après (23) aux relations

$$x_i(t_0) = x_i^0(t_0) \tag{24}$$

Par conséquent, on a le théorème suivant:

II. *Sous l'hypothèse, que les fonctions $a_{ik}(t)$ et $f_i(t)$ sont finies et continues dans l'intervalle (t_0, t_0+h) suffisamment petit et qu' en outre, les fonctions $a_{ik}(t)$ prennent les valeurs finies et déterminées pour $t=t_0$, les équations* (14) *admettent un système x_i de solutions satisfaisant à la condition* (24). *Ce système x_i dépend de n constantes arbitraires.*