Sur une propriété de fonctions d'une infinité de variables réelles.

Par

WACLAW SIERPIŃSKI.

Si à toute suite infinie de nombres réels $x_1, x_2, x_3, \ldots$ on fait correspondre un nombre réel y, on dit qu'on a défini une fonction réelle d'une suite infinie de variables réelles

$$y = f(x_1, x_2, x_3 \ldots).$$

Le but de cette Note est de démontrer le théorème suivant (dont nous tirerons ensuite quelques conséquences):

Théorème[1]) *Il existe une suite infinie (fixe) de fonctions d'une variable réelle de 1^{re} classe de Baire $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, $\varphi_3(x), \ldots$, telle qu'il existe pour toute fonction réelle $f(x_1, x_2, x_3, \ldots)$ d'une suite infinie de variables réelles une fonction $g(x)$ d'une seule variable réelle, telle qu'on a l'égalité*

$$f(x_1, x_2, x_3, \ldots) = g\big(\varphi_1(x_1) + \varphi_2(x_2) + \varphi_3(x_3) + \ldots\big)$$

pour toutes les suites infinies de nombres réels $x_1, x_2, x_3, \ldots$

D é m o n s t r a t i o n. L'ensemble de tous les nombres réels étant homéomorphe à l'ensemble de tous les nombres réels intérieurs à l'intervalle (0,1), il suffira évidemment de démontrer notre théorème pour les fonctions $f(x_1, x_2, x_3 \ldots)$, définies pour $0 < x_n < 1$ ($n = 1, 2, 3, \ldots$).

Posons, pour $k = 1, 2, 3, \ldots$ et pour $0 < x < 1$:

1) Cf. L. B i e b e r b a c h. *Journ f. r. u. a. Math.* 165, p. 92; A. L i n d e n b a u m. *Fundamenta Mathematicae* 20, p. 26—27; W. S i e r p i n s k i. *Prace Matematyczno-Fizyczne* 41, p. 173.

$$\varphi\ (x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{E\,2^n x - 2\,E\,2^{n-1} x}{2^{2^k(2n-1)}}\ , \tag{1}$$

où Et désigne l'entier le plus grand ne dépassant pas t.

Les fonctions (1) sont évidemment de classe $\leqslant 1$ (comme sommes des séries uniformément convergentes de fonctions de classe $\leqslant 1$) et elles sont discontinues pour $x = \frac{1}{2}$: ce sont donc des fonctions de classe 1.

D'après les inégalités évidentes

$$t - 1 < E\,t \leqslant t \quad \text{pour } t \text{ réels}$$

on trouve (pour $0 < x < 1$):

$$-1 < E\,2\,x - 2\,E\,2^{n-1} x < 2:$$

le nombre $E\,2^n x - 2\,E\,2^{n-1} x$ étant un entier, il en résulte qu'il es égal à 0 ou à 1: c'est donc un chiffre pour la base 2.

Donc, quelle que soit la suite infinie de nombres réels x_n ($n = 1, 2, 3, \ldots$), telle que $0 < x_n < 1$ pour $n = 1, 2, 3, \ldots$, l'expression

$$\sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k(x_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{E\,2^n x_k - 2\,E\,2^{n-1} x_k}{2^{2^k(2n-1)}}$$

est, comme on voit sans peine, un dévelloppement dyadique contenant une infinité de chiffres 0 (tous les chiffres de rang impair étant évidemment $= 0$).

Lemme. *Si pour deux suites infinies* x_k ($k = 1, 2, \ldots$) *et* y_k ($k = 1, 2, \ldots$) *de nombres réels* > 0 *et* < 1 *on a*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k(x_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k(y_k), \tag{2}$$

alors

$$x_k = y_k \quad \text{pour} \quad k = 1, 2, 3, \ldots, \tag{3}$$

Démonstration. Si l'on a l'égalité (2), les développements dyadiques des nombres $\sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k(x_k)$ et $\sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k(y_k)$ sont égaux, donc, en tant que contenant chacun une infinité de chiffres 0, identiques, et on a

$$(4) \qquad E\, 2^n x_k - 2\, E\, 2^{n-1} x_k = E\, 2^n y_k - 2\, E\, 2^{n-1} y_k$$

$$\text{pour } k=1, 2, \ldots;\ n=1, 2, \ldots$$

Admettons maintenant que la formule (3) n'est pas vraie. Il existe donc un nombre naturel k tel que $x_k \neq y_k$, p. e. $x_k > y_k$. Dans ce cas on a, pour un nombre naturel p, $x_k - y_k > \frac{1}{2^p}$, d'où $E\, 2^p x_k \geqslant E\, 2^p y_k + 1$. Il existe donc un nombre naturel q qui est le plus petit tel que $E 2^q x_k > E\, 2^q y_k$: on a donc $E\, 2^{q-1} x_k \leqslant E\, 2^{q-1} y_k$, donc d'après $x_k > y_k$: $E\, 2^{q-1} x_k = E\, 2^{q-1} y_k$. On a donc

$$E 2^q x_k - 2 E 2^{q-1} x_k > E 2^q y_k - 2 E 2^{q-1} y_k,$$

contrairement à (4) (pour $n=q$).

La formule (3) est donc vraie et notre lemme est démontré.

Soit maintenant $f(x_1, x_2, x_3, \ldots)$ une fonction réelle donnée quelconque d'une suite infinie de variables réelles >0 et <1. Définissons la fonction $g(x)$ d'une variable réelle x comme il suit.

Soit x un nombre réel donné. S'il existe une suite infinie de nombres réels x_k ($k = 1, 2, \ldots$), $0 < x_k < 1$, telle que

$$(5) \qquad x = \varphi_1(x_1) + \varphi_2(x_2) + \varphi_3(x_3) + \cdots,$$

cette suite est, d'après notre lemme, unique (pour le nombre x) et les nombres x_k ($k = 1, 2, \ldots$) ($0 < x_k < 1$) sont bien déterminés par le nombre x. Dans ce cas nous poserons

$$g(x) = f(x_1, x_2, x_3, \ldots)$$

S'il n'existe aucune suite infinie de nombres réels x_k ($k=1,2,\ldots$) telle que $0 < x_k < 1$ pour $k = 1, 2, 3, \ldots$ et qu'on a l'égalité (5), nous poserons $g(x) = 0$.

Le fonction (réelle) d'une variable rélle x est ainsi définie (par la fonction f) et, comme on voit sans peine, on a l'égalité

$$g\left(\varphi_1(x_1) + \varphi_2(x_2) + \varphi_3(x_3) + \cdots\right) = f(x_1, x_2, x_3, \ldots)$$

pour toute suite infinie $x_1, x_2, x_3, \ldots$ de nombres réels > 0 et < 1.

Notre théorème est ainsi démontré.

De notre théorème s'en suit qu' *il existe une fonction fixe d'une suite infinie de variables réelles, telle que toute fonction réelle d'une suite infinie de variables réelles est une fonction d'une seule variable réelle de cette fonction fixe.*

On tire aussi de notre théorème cette conséquence que *toute fonction réelle d'une suite infinie de variables réelles se laisse représenter par superposition de fonctions d'une seule variable réelle et d'une seule fonction très simple d'une suite infinie de variables réelles, notamment de la fonction*

$$s(x_1, x_2, x_3, \ldots) = x_1 + x_2 + x_3 + \cdots$$ [1])

Une fonction de n variables réelles peut être regardée comme un cas particulier d'une fonction d'une suite infinie de variables réelles, p. e. on peut poser

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n, 0, 0, \ldots).$$

Il résulted onc immédiatement de notre théorème ce

Corollaire.[2]) *Il existe une suite infinie (fixe) de fonctions d'une variable réelle $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \varphi_3(x), \ldots,$ telle qu'il existe pour toute fonction $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ de $n \geqslant 2$ variables réelles une fonction $g(x)$ d'une variable réelle, telle qu'on a l'égalité*

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = g\left(\varphi_1(x) + \varphi_2(x) + \ldots + \varphi_n(x)\right)$$

pour tout système $x_1, x_2, \ldots, x_n$ de n variables réelles.

---

1) Cf. L. Bieberbach, l. c.

2) Cf. A. Lindenbaum, *Fund. Math.* t. 20, p. 27.

Il résulte encore sans peine de notre théorème que *toute fonction réelle d'une infinité de variables* $f(x_1, x_2, x_3, \dots)$, *peut être représentée sous la forme*

$$(6) \qquad f(x_1, x_2, x_3, \dots) = g\left(\lim_{n=\infty} \psi_n(x_1, x_2, \dots, x_n)\right),$$

où $g(x)$ *est une fonction d'une seule variable réelle et* $\psi_n(x_1, x_2, \dots x_n)$ $(n = 1, 2, 3, \dots)$ *est une fonction de n variables réelles.*

Or, il est à remarquer qu' *il existe des fonctions réelles d'une suite infinie de variables réelles qui ne se laissent pas représenter sous la forme*

$$(7) \qquad \lim_{n=\infty} f_n(x_1, x_2, \dots, x),$$

où $f_n(x_1, x_2, \dots, x_n)$ $(n = 1, 2, 3, \dots)$ *est une fonction de n variables réelles.*

En effet, soit Φ la famille de toutes les fonctions réelles distinctes $f(x_1, x_2, x_3, \dots)$, définies pour les suites infinies $x_1, x_2, x_3, \dots$ formées de nombres 0 ou 1: la famille Φ est, comme on voit sans peine, de puissance $2^{2^{\aleph_0}}$.

Or, l'ensemble de toutes les fonctions réelles $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ définies pour toutes les suites à n termes $x_1, x_2, \dots, x_n$ formés de nombres 0 et 1 étant de puissance $2^{\aleph_0}$ (pour $n = 1, 2, 3, \dots$), on en conclut sans peine que l'ensemble de toutes les suites infinies

$$f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) \qquad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

où $f_n(x_1, x_2, \dots, x_n)$ est une fonction réelle de n variables égales à 0 ou à 1, est encore de puissance $2^{\aleph_0}$. Il existe donc des fonctions de la famille Φ qui ne peuvent pas être représentées sous la forme (7) (pour les suites infinies $x_1, x_2, x_3, \dots$ formées de nombres 0 et 1), et il en résulte tout de suite notre assertion.

Faisons ici encore la remarque un peu paradoxale suivante qui est due à M. A. Lindenbaum:

Aucune fonction $f(x_1, x_2, x_3, \dots)$ *d'une suite infinie de variables réelles qui pour toute suite convergente (vers une limite finie) de nombres réels* x_n $(n = 1, 2, 3, \dots)$ *prend la valeur* $f(x_1, x_2, x_3, \dots) = \lim_{n=\infty} x_n$, *ne peut pas être représentée sous la forme* (7).

En effet, admettons, par contre, que $f(x_1, x_2, \ldots)$ est une telle fonction On a donc $f(0, 0, \ldots) = 0$ et, d'après l'hypothèse que

$$f(x_1, x_2, x_3, \ldots) = \lim_{n=\infty} f_n(x_1, x_2, \ldots, x_n), \tag{8}$$

il existe un nombre naturel n_1, tel que

$$f_{n_1}(\overset{1}{\breve{0}}, \overset{2}{\breve{0}}, \ldots, \overset{n_1}{\breve{0}}) < \frac{1}{4}.$$

Pareillement il résulte de $f(0, 0, \ldots, 0, 1, 1, 1, \ldots) = 1$ et de (8) qu'il existe un nombre naturel $n_2 > n_1$, tel que

$$f_{n_2}(\overset{1}{\breve{0}}, \overset{2}{\breve{0}}, \ldots, \overset{n_1}{\breve{0}}, 1, 1, \ldots, \overset{n_2}{\breve{1}}) > \frac{3}{4}.$$

Ensuite on aurait pour un indice $n_3 > n_2$

$$f_{n_3}(\overset{1}{\breve{0}}, \ldots, \overset{n_1}{\breve{0}}, 1, \ldots, \overset{n_2}{\breve{1}}, 0, \ldots, \overset{n_3}{\breve{0}}) < \frac{1}{4}$$

et ainsi de suite.

La suite

$$f_{n_k}(\overset{1}{\breve{0}}, \ldots, \overset{n_1}{\breve{0}}, 1, \ldots, \overset{n_2}{\breve{1}}, 0, \ldots\ldots, \overset{n_k}{\breve{a}_k}), \quad (k = 1, 2, 3, \ldots)$$

$\left(\text{où } a_k = \frac{1}{2}\left[1 + (-1)^k\right]\right)$ ne serait pas donc convergente, tandis que, d'après la formule (8), elle converge vers

$$f(\overset{1}{\breve{0}}, \ldots, \overset{n_1}{\breve{0}}, 1, \ldots, \overset{n_2}{\breve{1}}, 0, \ldots, \overset{n_3}{\breve{0}}, \ldots).$$

L'assertion de M. L i n d e n b a u m est ainsi démontrée.

Il en résulte qu'on peut sans peine donner des exemples effectifs de fonctions d'une suite infinie de variables réelles, $f(x_1, x_2, x_3, \ldots)$, qui ne peuvent pas être représentées sous la forme (7).

Une autre remarque de M. L i n d e n b a u m est que, *dans* *la formule* (6), *la fonction* $g(t)$ *ne peut pas être toujours continue.* En effet, si c'était le cas, on aurait

$$g\left(\lim_{n=\infty} \psi_n(x_1, x_2, \ldots, x_n)\right) = \lim_{n=\infty} g\left(\psi_n(x_1, x_2, \ldots, x_n)\right)$$

et, en posant $f_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) = g(\psi_n(x_1, x_2, \ldots, x_n))$, on aurait toujours la formule (8), ce qui n'est pas le cas.