Zu Fragen über nichtvertauschbare Grenzprozesse.

Von

J. KARAMATA und H. WENDELIN.

In einer früheren Mitteilung des zweitgenannten Autors[1]) sind Beispiele für Funktionen von n Veränderlichen angegeben, die bei der Anwendung der $n!$ möglichen Vertauschungen gewisser, sich auf je eine Veränderliche beziehenden Grenzprozesse $n!$ beliebig vorgelegte Werte annehmen. Man kann nun die dort gegebene Darstellung, insoferne die Grenzprozesse bloss aus gewöhnlichen Limitationen und Ableitungen bestehen, auf eine einheitliche Form bringen. Zur Präzisierung der gestellten Aufgabe schicke ich erst eine Erklärung voraus:

Teilt man die Menge der Indizes $1, 2, \ldots, n$ in zwei Teilmengen $\mathfrak{L}$ und $\mathfrak{D}$[2]), ($\mathfrak{L}+\mathfrak{D} = \{1, 2, \ldots, n\}$, $\mathfrak{L} \cdot \mathfrak{D} = 0$[3])), so werde der Operator $O_{\nu_1 \ldots \nu_n}$ folgendermassen definiert:

$$O_{\nu_1 \cdots \nu_n} f(x_1 \ldots\ldots x_n) \equiv O_{\nu_1} (O_{\nu_2}(\ldots (O_{\nu_n} f)\ldots))$$

$$\text{wobei} \begin{cases} O_i \equiv \lim\limits_{x_i \to 0} & \text{für } i \subset \mathfrak{L}, \\ O_i \equiv \dfrac{\partial}{\partial x_i}\Big|_{x_i=0}{}^{4)} & \text{für } i \subset \mathfrak{D}. \end{cases}$$

---

1) Jahresbericht der deutschen Mathematiker-Vereinigung, Bd. 43, Heft 1—4, s. 58, dff. H. Wendelin: „Über nichtvertauschbare Grenzprozesse".

2) Eine der beiden Mengen kann auch leer sein.

3) $\{\alpha, \beta, \ldots, \varrho\}$ bedeute die Menge der Elemente $\alpha, \beta, \ldots, \varrho$; $\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{B}$ bedeute den Durchschnitt von $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{A}+\mathfrak{B}$ die Vereinigungsmenge von $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$.

4) Siehe die nachstehende Seite.

Damit lässt sich nun die gestellte Aufgabe präzise formulieren:

A) . . Es seien $n!$ beliebige reelle Zahlen $A_{\nu_1 \cdots \nu_n}$, ($(\nu_1 \ldots \nu_n)$ sämtliche Anordnungen von $1, 2, \ldots, n$) und $\mathfrak{L}$ und $\mathfrak{D}$ fest vorgegeben. Es soll dann eine Funktion $\Phi(x_1, \ldots, x_n)$ derart angegeben werden, dass

$$O_{\nu_1 \cdots \nu_n} \Phi(x_1, \ldots, x_n) = A_{\nu_1, \ldots, \nu_n}$$

für sämtliche $n!$ Anordnungen $(\nu_1 \ldots \nu_n)$ von $1, 2, \ldots, n$ wird.

Die Lösung von A) ist offenbar äquivalent mit jener der folgenden Aufgabe:

A′) . . Zu jedem Operator $O_{\mu_1 \cdots \mu_n}$ der vorigen $n!$ Operatoren ist eine Hilfsfunktion $\varphi_{\mu_1 \cdots \mu_n}(x_1, \ldots, x_n)$ derart anzugeben, dass

$$O_{\nu_1 \cdots \nu_n} \varphi_{\mu_1 \cdots \mu_n} = \begin{cases} 1 \text{ für } (\nu_1 \ldots \nu_n) = (\mu_1 \ldots \mu_n) \\ 0 \;\;\text{„}\;\; (\nu_1 \ldots \nu_n) \neq (\mu_1 \ldots \mu_n) \end{cases}$$

wird,

denn in

$$\Phi(x_1, \ldots, x_n) \equiv \Sigma\, \varphi_{\mu_1 \cdots \mu_n} \cdot A_{\mu_1 \cdots \mu_n}$$

(zu summieren über alle Anordnungen $(\mu_1 \ldots \mu_n)$ von $1, 2, \ldots, n$) liegt dann die in A) gesuchte Φ-Funktion vor, und umgekehrt, wenn A) lösbar ist, so gilt dies umsomehr von A').

In der oben erwähnten Mitteilung wurden zuerst die Hilfsfunktionen für den Fall $\mathfrak{D} = 0$, sodann für den Fall $\mathfrak{L} = 0$ aufgestellt: auf diese beiden aufbauend die für $\mathfrak{L} \neq 0$ und $\mathfrak{D} \neq 0$ konstruiert. Die dort für den Fall $\mathfrak{D} = 0$ rekursiv angegebene Formel weist die einfache Gestalt auf:

---

[4]) Dabei bedeute

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_{x_i = 0} f \equiv \lim_{h \to 0} \frac{f(\ldots x_i = h \ldots) - f(\ldots x_i = 0 \ldots)}{h}.$$

$$(\mathrm{I}) \quad . \quad . \quad \left\{ \begin{array}{l} \varphi_{\mu_1 \cdots \mu_n} \equiv \varphi_{\mu_1 \mu_2} \cdot \varphi_{\mu_2 \mu_3} \cdot \ldots \cdot \varphi_{\mu_{n-1} \mu_{n-1}} \text{ mit} \\ O_{\gamma\delta} \; \varphi_{\alpha\beta} \equiv \begin{cases} 1 \text{ für } (\gamma, \delta) = (\alpha, \beta) \\ 0 \;\; „ \;\; (\gamma, \delta) \neq (\alpha, \beta) \end{cases} \text{und } \{\gamma, \delta\} = \{\alpha, \beta\}. \\ \varphi_{\alpha\beta} \equiv \dfrac{x_\alpha^2}{x_\alpha^2 + x_\beta^2}. \end{array} \right.$$

In folgender Weise lassen sich nun unter Hinzufügung eines geeigneten Faktors bei der Darstellung (I) alle drei Fälle in einer einzigen Formel zusammenfassen:

$$(\mathrm{II}) \quad . \quad . \quad \left\{ \begin{array}{l} \varphi_{\mu_1 \cdots \mu_n} \equiv F_{\delta_1 \cdots \delta_d} \cdot \varphi_{\mu_1 \mu_2} \cdot \varphi_{\mu_2 \mu_3} \cdot \ldots \cdot \varphi_{\mu_{n-1} \mu_n}, \\ \text{wobei} \\ F_{\delta_1 \cdots \delta_d} \equiv \begin{cases} \prod\limits_{\sigma=1}^{d} x_{\delta_\sigma} \text{ für } \mathfrak{D} = \{\delta_1, \ldots, \delta_d\}, \\ 1 \qquad „ \;\; \mathfrak{D} = 0, \end{cases} \end{array} \right.$$

und wo die $\varphi_{\alpha\beta}$ dieselben Funktionen wie in (I) bedeuten.

Die Richtigkeit dieses Ansatzes erkennt man sofort, wenn man die ganz einfache Verifikation für die verschiedenen Möglichkeiten im Falle $n = 3$ vornimmt.