Über lineare Operatoren mit besonderer Berücksichtigung der Fragen über Nichtvertauschbarkeit.

Von
HERMANN WENDELIN.

Einleitung.

Die Untersuchungen, welche sich mit Fragen über Vertauschbarkeit von Grenzprozessen befassen, werden häufig durch gewisse Beispiele ergänzt, wobei in der Literatur meines Wissens nach nur Funktionen von zwei Veränderlichen herangezogen werden. So pflegt man für reine Limitationsprozesse[1]) die Funktion

$$f(x_1, x_2) = \frac{x_1^2 - x_2^2}{x_1^2 + x_2^2},$$

für reine Ableitungsprozesse die Funktion

$$g(x_1, x_2) \equiv x_1 \; x_2 \cdot \frac{x_1^2 - x_2^2}{x_1^2 + x_2^2}$$

und für reine Integrationen die Funktion

$$u(x_1, x_2) \equiv \frac{x_1^2 - x_2^2}{(x_1^2 + x_2^2)^2}$$

anzuführen. Für diese Funktionen gelten die Beziehungen:

$$\lim_{x_1 \to 0} \left[\lim_{x_2 \to 0} f(x_1, x_2)\right] = 1, \quad \text{dagegen} \quad \lim_{x_2 \to 0} \left[\lim_{x_1 \to 0} f(x_1, x_2)\right] = -1,$$

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\left[\frac{\partial}{\partial x_2} g(x_1, x_2)\right]_{x_1=0 \;\; x_2=0} = 1, \quad \text{"} \quad \frac{\partial}{\partial x_2}\left[\frac{\partial}{\partial x_1} g(x_1, x_2)\right]_{x_2=0 \;\; x_1=0} = -1,$$

1) „rein" soll heissen, dass die Prozesse von einerlei Art sind.

$$\int_{x_1=0}^{1}\left[\int_{x_2=0}^{1} u(x_1,x_2)dx_2\right]dx_1=\frac{\pi}{4}, \text{dagegen} \int_{x_2=0}^{1}\left[\int_{x_1=0}^{1} u(x_1,x_2)\,dx_1\right]dx_2=-\frac{\pi}{4}.$$

Im Anschluss an diese Tatsachen liegt es nahe zu fragen, ob sich auch für n-fache ($n>2$) derartige reine Grenzprozesse elementare Funktionen von n Veränderlichen finden lassen, derart, dass sich bei den $n!$ möglichen Vertauschungen der einzelnen Grenzprozesse $n!$ verschiedene, speziell vielleicht $n!$ beliebig vorgeschriebene, Werte ergeben; und Entsprechendes im Falle von gemischten Grenzvorgängen.

Ich habe seinerzeit[2]) im Hinblick auf die vorigen spezielleren Grenzprozesse eine Reihe von Funktionen angegeben, welche den obigen Forderungen genügten[3]). Das Wesentliche war dabei die Auffindung gewisser Hilfsfunktionen, was ich zum besseren Verständnis für das Folgende an einem Beispiel[4]), das sich auf reine Limitationen bezieht, kurz auseinandersetzen will:

Gesucht werde zu $n!$ beliebig vorgelegten Werten $A_{\nu_1 \ldots \nu_n}$, $(\nu_1 \ldots \nu_n)$ sämtliche Anordnungen von $1, 2, \ldots, n$, eine Funktion $\Phi_{12\ldots n}$ von $x_1, x_2, \ldots, x_n$, derart, dass

$$\lim_{x_{\nu_1}\to 0}\left(\lim_{x_{\nu_2}\to 0}\left(\ldots\left(\lim_{x_{\nu_n}\to 0}\Phi_{12\ldots n}\right)\ldots\right)\right)=A_{\nu_1\ldots\nu_n}\quad \left\{\begin{array}{l}\text{für sämtliche Anord-}\\ \text{nungen } (\nu_1\ldots\nu_n) \text{ von}\\ 1, 2, \ldots, n \text{ ist.}\end{array}\right.$$

Wenn es gelingt, $n!$ Funktionen $\varphi_{\nu_1\ldots\nu_n}$ von $x_1, \ldots, x_n$ derart zu finden, dass

$$\lim_{x_{\mu_1}\to 0}\left(\lim_{x_{\mu_2}\to 0}\left(\ldots\left(\lim_{x_{\mu_n}\to 0}\varphi_{\nu_1\ldots\nu_n}\right)\ldots\right)\right)=$$

$$=\left\{\begin{array}{ll}1 \text{ für } & (\mu_1\ldots\mu_n)=(\nu_1\ldots\nu_n)\\ 0 \quad \text{„} & (\mu_1\ldots\mu_n)\neq(\nu_1\ldots\nu_n)\end{array}\right\} \text{ gilt,}$$

wobei immer $\{\mu_1\ldots\mu_n\}=\{\nu_1\ldots\nu_n\}$[5]) ist, so besitzt man offenbar

[2]) Jahresbericht der D. M. V. XLIII, 1932, S. 54—57.

[3]) Der allgemeinen Einbeziehung der Integrationen stellten sich dabei gewisse Schwierigkeiten entgegen, die den Anlass zu den folgenden Untersuchungen gaben.

[4]) Es gilt mutatis mutandis auch für die übrigen Fälle.

[5]) $\{\alpha, \beta, \ldots, \sigma\}$ bedeute die Menge der Elemente $\alpha, \beta, \ldots, \sigma$,

in der folgendermassen definierten Funktion $\Phi_{12 \ldots n}$ bereits eine Funktion mit der gewünschten Eigenschaft:

$$\Phi_{12 \ldots n} \equiv \sum A_{\nu_1 \ldots \nu_n} \cdot \varphi_{\nu_1 \ldots \nu_n},$$

wobei die Summation über sämtliche Anordnungen $(\nu_1 \ldots \nu_n)$ zu erstrecken ist.

Die Funktionen $\varphi_{\nu_1 \ldots \nu_n}$ nenne ich Hilfsfunktionen, speziell hier Hilfsfunktionen für die Limitation. Damit ist ein lineares Aufbauprinzip für die Funktion $\Phi_{12 \ldots n}$ aus spezielleren gegeben.

Offenbar war es die Kenntnis einer Reihe von Eigenschaften der speziellen Grenzprozesse der Limitation, Ableitung und Integration, welche die Konstruktion jener Funktionen ermöglichte [6]. Die allgemeine Einbeziehung der Integration stösst nun auf Schwierigkeiten, welche den vornehmlichen Anlass zu den folgenden, allgemeineren Untersuchungen gaben. Den Ausgangspunkt bilden dabei Mengen linearer Operatoren.

Unter einem eindeutigen Operator soll hier eine Zuordnungsvorschrift verstanden werden, vermöge welcher jeder Funktion einer gewissen Funktionenmenge F — worauf der Operator „definiert" (oder „anwendbar") ist — eine bestimmte Funktion einer gewissen Funktionenmenge $\bar{F}$ zugeordnet wird. Solche Zuordnungsvorschriften können im besonderen durch bekannte Rechenverfahren (rationale Operationen, Grenzvorgänge etc.) gegeben sein. Es hängt in diesen Fällen das Resultat nicht nur von der Art des Operators, sondern auch vom Bau der Funktion ab, auf die der Operator angewendet wird. Und es ergeben sich da zwei Gruppen von Fragen, die zwar nicht ganz unabhängig voneinander zu lösen sind, jedoch ein gewisses selbständiges Interesse besitzen. Die e i n e n gehen von den Eigenschaften der Funktionen bezüglich eines vorgelegten Operators aus, wobei auch die Frage nach den Funktionenklassen, auf welche die Operatoren jeweils anwendbar sind, eine Rolle spielt; die a n d e r e n erheben gerade die Eigenschaften der Operatoren zum Gegen-

[6] Neuerdings hat Herr J. Karamata (Beograd) ein besonders einheitliches Konstruktionsprinzip für den Fall von Grenzprozessen, die sich aus Limitationen und Ableitungen zusammensetzen, angegeben. Siehe die in diesen Bande nachstehende gemeinsame Note: „Zu Fragen über nichtvertauschbare Grenzprozesse".

stande der Betrachtung. Solche Eigenschaften lassen sich nun ganz abstrakt (d. h. hier: ohne Rücksicht einer Deutung eines Operators als speziellen Rechenverfahrens) zur Definition verschiedener Operatormengen verwenden. Unter A) soll zunächst eine Operatormenge definiert werden (wobei zu den definierenden Eigenschaften auch eine Aussage über die Existenz gewisser Funktionen hinzugenommen wird) die einerseits so umfassend ist, dass sie die speziellen Grenzprozesse der Limitation, Ableitung und Integration enthält, anderseits doch wieder so eng, dass mit ihr bereits gewisse Fragen bezüglich der Konstruierbarkeit von Φ-Funktionen behandelt werden können [7]. Nachdem zuerst gezeigt wird, dass die Operatoren der so definierten Menge ganz wesentliche, gemeinsame Eigenschaften der vorigen Grenzprozesse aufweisen und nachdem die Definition der aus den Operatoren dieser Menge zusammengesetzten Operatoren gegeben ist, wendet sich die Untersuchung unter B) den Fragen nach der Konstruierbarkeit von Φ-Funktionen zu. Es wird sich da ergeben, dass ohne Hinzufügung weiterer Annahmen ein Konstruktionsprinzip im Allgemeinen für diese nicht angebbar ist, was daraus folgen wird, dass bereits eine geringere Forderung nicht erfüllt werden kann. Wohl aber wird sich, wenn man auf die vollkommene Willkür der anzunehmenden Werte verzichtet und bloss deren durchgängige Verschiedenheit fordert, unter recht einfachen Bedingungen ein Konstruktionsverfahren entsprechender Funktionen (ich nenne sie Ψ - Funktionen) finden lassen. In speziellen Fällen wird auch die weiteste Forderung zu erfüllen sein, worauf an geeigneter Stelle hingewiesen wird. Durch die in C) vorgenommene Einengung der unter A) definierten Operatormenge gelingt schliesslich auch die Angabe eines Konstruktionsprinzipes für Φ-Funktionen.

---

[7] Eine präzise Definition der Φ - Funktionen für diesen Fall allgemeinerer Operatormengen kann erst später gegeben werden. Vgl. Z_4)!

Á)

Eine Operatormenge O, bestehend aus sogenannten „einfachen" (und eindeutigen) Operatoren $\overset{\alpha}{O}_{\nu}, \overset{\beta}{O}_{\mu}, \ldots$ ($\nu, \mu, \ldots$ natürliche Zahlen) soll durch folgende Eigenschaften festgelegt werden: Ist $\overset{\alpha}{O}_{\nu}$ irgend ein Operator aus O und n eine (beliebige) natürliche Zahl, so gelte:

E$_1$) . . Ist $\overset{\alpha}{O}_{\nu}$ auf $f(x_1, \ldots, x_n)$ anwendbar, so ist $\overset{\alpha}{O}_{\nu} f(x_1, \ldots, x_n)$ eine Funktion, die nicht von x_ν abhängt[8]), sondern höchstens noch von den übrigen Veränderlichen der Funktion $f(x_1, \ldots, x_n)$.

E$_2$) . . Ist $\overset{\alpha}{O}_{\nu}$ auf $f_\rho(x_1, \ldots, x_n)$, $\varrho = 1, 2, \ldots, r$, anwendbar, so auch auf $\sum_{\rho=1}^{r} f_\rho$ und es gilt

$$\overset{\alpha}{O}_{\nu} \sum_{\rho=1}^{r} f_\rho = \sum_{\rho=1}^{r} \overset{\alpha}{O}_{\nu} f_\rho \, .$$

E$_3$) . . Ist $\overset{\alpha}{O}_{\nu}$ auf $f(x_1, \ldots, x_n)$ anwendbar, so auch immer auf $g(x_{\alpha_1}, \ldots, x_{\alpha_s}) \cdot f$, falls ν nicht unter $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$, ($\{\alpha_1, \ldots, \alpha_s\}$ eine Menge natürlicher Zahlen), vorkommt und es gilt $\overset{\alpha}{O}_{\nu}(g \cdot f) = g \cdot \overset{\alpha}{O}_{\nu} f$.

E$_4$) . . Zu jedem Operator $\overset{\alpha}{O}_{\nu}$ soll eine Funktion $\overset{(\alpha)}{e}_{\nu}(x_\nu)$ von x_ν allein (kurz $\overset{(\alpha)}{e}_{\nu}$) existieren, derart dass $\overset{\alpha}{O}_{\nu} \overset{(\alpha)}{e}_{\nu} = 1$ ist.

---

8) Es wird in E$_1$) nicht verlangt, dass $f(x_1, \ldots, x_n)$ wirklich von x_ν abhängt.

E$_5$) . . Sei $\overset{\alpha}{O}_\nu f(x_1, \ldots, x_\nu, \ldots, x_n) \equiv g(x_1, \ldots, x_{\nu-1}, x_{\nu+1}, \ldots, x_n)$; setzt man dann für $x_1, \ldots, x_n$, resp. $x_{\sigma_1}, \ldots, x_{\sigma_n}$, wobei $\{\sigma_1, \ldots, \sigma_n\}$ aus irgendwelchen n verschiedenen Zahlen bestehe, so gelte:

$$\overset{\alpha}{O}_{\sigma_\nu} f(x_{\sigma_1}, \ldots, x_{\sigma_\nu}, \ldots, x_{\sigma_n}) \equiv$$
$$\equiv g(x_{\sigma_1}, \ldots, x_{\sigma_{\nu-1}}, x_{\sigma_{\nu+1}}, \ldots, x_{\sigma_n}).$$ [9])

Die vorigen Eigenschaften sind insbesondere den Grenzprozessen der Limitation, Ableitung und Integration eigentümlich. Man könnte die Forderung, dass $\overset{\alpha}{O}_\nu f(x_1, \ldots, x_n)$ unabhängig von x_ν sein soll, durch eine weitere ersetzen, doch ist die unter E$_1$) gegebene Formulierung den hier in's Auge gefassten Zwecken angemessen, sie knüpft eng an die Tatsache an, dass die einfachen Grenzübergänge jeweils immer nur an bestimmten Stellen der Veränderlichen vorgenommen werden.

Es ist von Interesse, ehe man in der Behandlung des eigentlichen Problems fortfährt, sich einige Folgerungen aus E_1) bis E_5) abzuleiten. Der Kürze wegen führe ich bloss die Resultate an und unterdrücke die meist ganz einfachen Beweise.

F_1) . . Für jeden Operator $\overset{\alpha}{O}_\nu$ gilt: $\overset{\alpha}{O}_\nu 0 = 0$.

F_2) . . E_4) ist gleichwertig mit der Forderung, dass zu jedem Operator $\overset{\alpha}{O}_\nu$ wenigstens eine Funktion $\overset{(\alpha)}{f}_\nu(x_\nu)$ existiere, so dass $\overset{\alpha}{O}_\nu \overset{(\alpha)}{f}_\nu \neq 0$ ist.

---

9) Dies besagt zugleich, dass dann $\overset{\alpha}{O}_{\sigma_\nu}$ auch für $f(x_{\sigma_1}, \ldots, x_{\sigma_\nu}, \ldots, x_{\sigma_n})$ definiert sein soll. (Eine triviale Forderung, die hier nur ausdrücklich ausgesprochen wird).

$F_3)$ . . Ist $\overset{\alpha}{O}_{\nu} f(x_{\nu}) = a$ und $\overset{\alpha}{O}_{\mu} f(x_{\mu}) = b$, so gilt: $a = b$.

$F_4)$ . . Ist $f(x_1, \ldots, x_{\rho_1}, \ldots, x_{\rho_r}, \ldots, x_n)$ symmetrisch in $x_{\rho_1}, \ldots, x_{\rho_r}$, $(r \leqq n)$ und ist $\overset{\alpha}{O}_{\rho_\nu} f \equiv g(x_1, \ldots, x_{\rho_1} \ldots, x_{\rho_{\nu-1}}, x_{\rho_{\nu+1}}, \ldots, x_{\rho_r}, \ldots, x_n)$, so ist auch g symmetrisch in $x_{\rho_1}, \ldots, x_{\rho_{\nu-1}}, x_{\rho_{\nu+1}}, \ldots, x_{\rho_r}$.

$F_5)$ . . Sei $f(x_1, \ldots, x_{\rho_1}, \ldots, x_{\rho_\nu}, \ldots, x_n)$ symmetrisch in $x_{\rho_1} \ldots, x_{\rho_r}$ $(r \leqq n)$, sei ferner $\{\varrho_\nu, \varrho_\mu\} \prec \prec \{\varrho_1, \ldots, \varrho_r\}$, $\nu < \mu$ und

1) . . . $\overset{\alpha}{O}_{\rho_\nu} f \equiv g(x_1, \ldots, x_{\rho_1}, \ldots, x_{\rho_{\nu-1}}, \ldots \ldots, x_{\rho_{\nu+1}}, \ldots, x_{\rho_r} \ldots, x_n)$,

2) . . . $\overset{\alpha}{O}_{\rho_\mu} f \equiv h(x_1, \ldots, x_{\rho_1}, \ldots, x_{\rho_{\mu-1}}, \ldots \ldots, x_{\rho_{\mu+1}}, \ldots, x_{\rho_r}, \ldots, x_n)$;

setzt man dann für die Veränderlichen in g der Reihe nach $\xi_1, \ldots, \xi_{n-1}$ und für die Veränderlichen in h der Reihe nach $\xi_1, \ldots, \xi_{n-1}$, so gilt

$$h(\xi_1, \ldots, \xi_{n-1}) \equiv g(\xi_1, \ldots, \xi_{n-1}).$$

$F_6)$ . . Sind die Funktionen $a, b, c, d, \ldots$ von x_ν, $\nu \prec \mathfrak{M}$ ($\mathfrak{M}$ irgend eine endliche oder unendliche Menge natürlicher Zahlen) unabhängig, ungleich Null und bleiben

1) . . . $\overset{\alpha}{O}_{\nu} a$, $\overset{\alpha}{O}_{\nu} b$, $\overset{\alpha}{O}_{\nu} c$, $\overset{\alpha}{O}_{\nu} d, \ldots$; $\overset{\alpha}{O}_{\nu}(a \cdot b)$, $\overset{\alpha}{O}_{\nu}(a \cdot c)$, $\overset{\alpha}{O}_{\nu}(a \cdot d) \ldots$ endlich, so gilt

$A) \ldots \overset{\alpha}{O}_{\nu} y = \overset{(\alpha)}{k} \cdot y$ $\left\{ \begin{array}{l} \text{für } y = a, b, c, d, \ldots; \\ \nu \prec \mathfrak{M}, \text{ wobei } k^{(\alpha)} \text{ eben-} \\ \text{falls von } x_\nu, \nu \prec \mathfrak{M} \text{ unab-} \\ \text{hängig ist.} \end{array} \right.$

Insbesondere gilt dann:

F_6) . . . Sind a, b, c, d,... von keiner Veränderlichen abhängig, ungleich Null und die unter 1) angeführten Symbole für irgend einen Operator $\overset{\alpha}{O}_\nu$ aus O endlich, so gilt A) für sämtliche Operatoren $\overset{\alpha}{O}_\nu$, (α fest), aus O.

Die vorigen Folgerungen zeigen die enge Verwandschaft der Operatoren aus O mit jenen linearen Operatoren, die durch gewisse Rechenprozesse definiert sind, wobei diese sich jeweils auf eine bestimmte Veränderliche an einer bestimmten Stelle dieser beziehen. Bezüglich $\overset{\alpha}{O}_\nu$ kommt also der Veränderlichen x_ν auch bei den Operatoren aus O eine gewisse ausgezeichnete Stellung zu und zur Vereinfachung der Redeweise kann kurz gesagt werden „$\overset{\alpha}{O}_\nu$ beziehe sich auf die Veränderliche x_ν “. Die oberen Indizes α, β,... sind dann charakteristisch für die verschiedenen Zuordnungsvorschriften. Dass O auch die speziellen Grenzprozesse der Limitation, Ableitung und Integration mitumfasst, wurde bereits erwähnt. O ist aber umfassender, denn z. B. die folgendermassen definierten Operatoren:

$$B_1) \dots \overset{\alpha}{O}_\nu f(x_1, \dots, x_\nu, \dots, x_n) \equiv \lim_{x_\nu \to 0} f(x_1, \dots, \sqrt{x_\nu}, \dots, x_n),$$

$$B_2) \dots \overset{\beta}{O}_\nu f(x_1, \dots, x_\nu, \dots, x_n) \equiv \lim_{x_\nu \to 0} [x_\nu \cdot f(x_1, \dots, x_\nu, \dots, x_n)],$$

$$B_3) \dots \overset{\gamma}{O}_\nu f(x_1, \dots, x_\nu, \dots, x_n) \equiv [f(_1, \dots, x_\nu, \dots, x_n)]_{x_\nu = 0}$$

gehören O an, wie man leicht nachprüft.

Für die mehrmalige sukzessive Anwendung von Operatoren aus O auf eine Funktion soll im folgenden eine abkürzende Bezeichnung durch das Symbol des „zusammengesetzten“ Operators eingeführt werden. Ein für allemal sollen sich dabei aber die den zusammengesetzten Operatoren zugrundegelegten „einfachen“ Operatoren auf lauter *verschiedene* Veränderliche beziehen.

$Z_1)$ . . Der aus $\overset{\alpha_1}{O_1}, \overset{\alpha_2}{O_2}, \ldots, \overset{\alpha_s}{O_s}$ in dieser Reihenfolge „zusammengesetzte“ (sogenannte „s-fache“) Operator $\overset{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_s}{O_{1\,2\,\ldots\,s}}$ werde folgendermassen definiert:

$$\overset{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_s}{O_{1\,2\,\ldots\,s}} f = \overset{\alpha_1}{O_1}\left(\overset{\alpha_2}{O_2}\left(\ldots\left(\overset{\alpha_s}{O_s} f\right)\ldots\right)\right).$$

Dabei braucht aber nicht $\alpha_i \neq \alpha_k$ für $i \neq k$ zu sein.[10])

Die Menge der s-fachen ($s = 2, 3, \ldots$) Operatoren werde mit O_z bezeichnet. Den Operatoren aus O_z kommen E_1) bis E_5) analoge Eigenschaften E_1') bis E_5') zu. Sei $\overset{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_s}{O_{1\,2\,\ldots\,s}}$ ein Operator aus O_z, so gilt nämlich (nun als Folge von E_1) bis E_5) und Z_1)):

$E'_1)$ . . $O_{1\ldots s}\ f(x_1, \ldots, x_s, \ldots, x_n)$ ist eine Funktion, die nicht von $x_1, \ldots, x_s$ abhängt, sondern höchstens noch von den übrigen Veränderlichen der Funktion $f(x_1, \ldots, x_n)$.

$E'_2)$ . . Ist $O_{1\ldots s}$ auf $f_\rho(x_1, \ldots, x_n)$, $(\rho = 1, 2, \ldots, r)$ anwendbar, so auch auf $\sum_{\rho=1}^{r} f_\rho$ und es gilt

$$O_{1\ldots s} \sum_{\rho=1}^{r} f_\rho(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{\rho=1}^{r} O_{1\ldots s} f_\rho.$$

$E'_3)$ . . Ist $O_{1\ldots s}$ auf $f(x_1, \ldots, x_n)$ anwendbar, so auch immer auf $g(x_{\alpha_1}, \ldots, x_{\alpha_t}) \cdot f$, falls $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_t\} \cdot \{1, 2, \ldots, s\} = 0$ ist, und es gilt

$$O_{1\ldots s}\, g(x_{\alpha_1}, \ldots, x_{\alpha_t}) \cdot f(x_1, \ldots, x_n) = g(x_{\alpha_1}, \ldots, x_{\alpha_t}) \cdot O_{1\ldots s} f(x_1, \ldots, x_n).$$

$E'_4)$ . . Zu jedem Operator $\overset{\alpha_1 \ldots \alpha_s}{O_{1\ldots s}}$ existiert eine Funktion $\overset{\alpha_1 \ldots \alpha_s}{e_{1\ldots s}}(x_1, \ldots, x_s)$ (kurz $\overset{\alpha_1 \ldots \alpha_s}{e_{1\ldots s}}$) derart,

---

10) Wo kein Missverständnis zu befürchten ist, sollen zur Vereinfachung die oberen Indizes öfters weggelassen werden. Es ist dabei zu beachten, dass ja die unteren Indizes mit den oberen streng gekoppelt sind.

E'_4) . . dass $O_{1 \ldots s}^{\alpha_1 \ldots \alpha_s} e_{1 \ldots s}^{\alpha_1 \ldots \alpha_s} = 1$ ist. Für $e_{1 \ldots s}^{\alpha_1 \ldots \alpha_s}$ kann man setzen $e_{1 \ldots s}^{\alpha_1 \ldots \alpha_s} \equiv e_1^{\alpha_1} \cdot e_2^{\alpha_2} \ldots e_s^{\alpha_s}$.

E'_5) . . Sei $O_{1 \ldots s} f(x_1, \ldots, x_s, \ldots, x_n) = g(x_{s+1}, \ldots, x_n)$; setzt man dann für $x_1, \ldots, x_n$ resp. $x_{\sigma_1}, \ldots, x_{\sigma_n}$, wobei $\{\sigma_1, \ldots, \sigma_n\}$ aus irgendwelchen n natürlichen Zahlen bestehe, so gilt $O_{\sigma_1 \ldots \sigma_s} f(x_{\sigma_1}, \ldots, x_{\sigma_s}, \ldots, x_{\sigma_n}) = g(x_{\sigma_{s+1}}, \ldots, x_{\sigma_n})$.

Die ganz einfachen Beweise dazu mögen hier unterbleiben. Aus E_1') bis E'_5) könnte man wieder F_1) bis F_6) analoge Folgerungen ableiten. — Ich führe noch einige für das folgende wichtige Bezeichnungen ein.

Z_2) . . Die Gesamtheit der Operatoren $O_{\nu_1 \ldots \nu_s}^{\alpha_{\nu_1} \ldots \alpha_{\nu_s}}$ $(\nu_1, \ldots, \nu_s)$ sämtliche Anordnungen von $1, 2, \ldots, s$ durchlaufend, heisse „s-fache Operatormannigfaltigkeit von $O_{1 \ldots s}^{\alpha_1 \ldots \alpha_s}$" (kurz O. Mf. von $O_{1 \ldots s}^{\alpha_1 \ldots \alpha_s}$). Sie kann offenbar durch irgendeinen Operator daraus repräsentiert werden.

Z_3) . . Sei eine s-fache O. Mf. durch $O_{1 \ldots s}^{\alpha_1 \ldots \alpha_s}$ repräsentiert. Ist dann $(\varrho_1, \ldots, \varrho_r)$, $(r \geqq 2)$, eine Teilanordnung von $(1, 2, \ldots, s)$, wobei $\varrho_1 < \varrho_2 < \ldots < \varrho_r$ sei, so heisse die r-fache O. Mf., die durch $O_{\rho_1 \ldots \rho_r}^{\alpha_{\rho_1} \ldots \alpha_{\rho_r}}$ repräsentiert wird, eine r-fache Untermannigfaltigkeit (U. Mf.) der obigen O. Mf.

Z_4) . . Kann man zu den $s!$ Operatoren der O. Mf. von $O_{1 \ldots s}^{\alpha_1 \ldots \alpha_s}$ und zu $s!$ beliebig vorgegebenen Werten $A_{\nu_1 \ldots \nu_s}$, $(\nu_1 \ldots \nu_s)$ sämtliche Anordnungen) von $1, 2, \ldots, s$, stets eine Funktion $\Phi(x_1, \ldots, x_s$ derart angeben, dass für alle Anordnungen $(\nu_1, \ldots \nu_s)$

$Z_4)$ . .

$$O^{\alpha_{\nu_1}\cdots\alpha_{\nu_s}}_{\nu_1\cdots\nu_s}\,\Phi = A_{\nu_1\dots\nu_s}$$

gilt, so soll dafür kurz gesagt werden „die O. Mf. von $O^{\alpha_1\dots\alpha_s}_{1\dots s}$ besitze Φ-Funktionen".

Kann man dagegen zur obigen O. Mf. wenigstens eine Funktion $\Psi(x_1,\dots,x_s)$ angeben[11], so werde dieser Sachverhalt durch den Satz „die O. Mf. von $O^{\alpha_{\nu_1}\cdots\alpha_{\nu_s}}_{\nu_1\dots\nu_s}$ besitze Ψ-Funktionen" ausgedrückt.

Die entsprechenden Φ-bzw. Ψ-Funktionen sollen „zu $O^{\alpha_1\dots\alpha_s}_{1\dots s}$ gehörige" Φ-bzw. Ψ-Funktionen genannt werden.

B)

Unsere Fragestellungen lassen sich nun einfach formulieren. Wir fragen zunächst:

$P_1)$ . .

a) Lassen sich auf Grund der Kenntnis der Eigenschaften E'_1) bis E'_5) zu einer beliebig vorgegebenen n-fachen O. Mf. stets Φ-Funktionen konstruieren?

bzw. falls *a*) verneint werden müsste:

b) Kann man zu jeder n-fachen O. Mf. wenigstens stets eine Ψ-Funktion konstruieren?

Es zeigt sich, dass P_1) *b*) — also umsomehr P_1 *a*) — abschlägig zu beantworten ist. Denn bereits die folgende Frage muss verneint werden:

P_1) *c*). . Lässt sich P_1) *b*) vielleicht für den Fall $n = 2$ bejahen?

Beweis.

Sei $O^{\alpha_1\,\alpha_2}_{1\;\;2}$ als Repräsentant der 2-fachen O. Mf. vorgelegt,

11) Das Wort Ψ-Funktion wird hier in analogem Sinne wie auf Seite 16 egbraucht.

so käme, wie man sich. sofort überzeugt, für Ψ höchstens der Ansatz $\Psi = C\,.\,\overset{(\alpha_1)}{\underset{1}{e}}\,.\,\overset{(\alpha_2)}{\underset{2}{e}}$ in Betracht, wo C von x_1 und x_2 unabhängig ist. Es ist dann aber $O_{1\;2}^{\alpha_1\,\alpha_2}\,\Psi \neq O_{2\;1}^{\alpha_2\,\alpha_1}\,\Psi$. Der Beweis ist unabhängig davon, ob $\alpha_1 = \alpha_2$ oder $\alpha_1 \neq \alpha_2$ angenommen wird, q. e. d.

Dass dann aber auch $P_1)\,b)$ für $n > 2$ zu verneinen ist, folgt unmittelbar aus dem zweiten Teil des folgenden Hilfssatzes:

H. S. 1] Besitzt die O. Mf. von $O_{1\,\dots\,s}^{\alpha_1\,\dots\,\alpha_s}$ Funktionen Φ, so besitzt auch jede U. Mf. dieser O. Mf. Φ-Funktionen.

Besitzt die O. Mf. von $O_{1\,\dots\,s}^{\alpha_1\,\dots\,\alpha_s}$ Funktionen Ψ, so besitzt auch jede U. Mf. dieser O. Mf. Ψ-Funktionen.

Beweis.

Sei eine U. Mf. von $O_{1\,\dots\,s}^{\alpha_1\,\dots\,\alpha_s}$ durch $O_{\rho_1\,\dots\,\rho_r}^{\alpha_{\rho_1}\,\dots\,\alpha_{\rho_r}}$ repräsentiert, $\varrho_1 < \varrho_2 < \dots < \varrho_r$, $2 \leqq r < s$. Sei ferner $A_{\nu_1 \dots \nu_r}$, $(\nu_1 \dots \nu_r)$ sämtliche Anordnungen von $\varrho_1, \varrho_2 \dots \varrho_r$, ein beliebig vorgelegtes Wertesystem. Ich zeige dann, dass unter der in H. S. 1] gemachten Voraussetzung sich eine Φ-Funktion $\Phi_{\rho_1 \dots \rho_r}$ derart angeben lässt, dass für sämtliche Operatoren der O. Mf. von $O_{\rho_1\,\dots\,\rho_r}^{\alpha_{\rho_1}\,\dots\,\alpha_{\rho_r}}$ gilt:

$$(1) \quad . \quad . \qquad O_{\nu_1\,\dots\,\nu_r}^{\alpha_{\nu_1}\,\dots\,\alpha_{\nu_r}}\,\Phi_{\rho_1 \dots \rho_r} = A_{\nu_1 \dots \nu_r}\,.$$

Sei $\{\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_{s-r}\} = \{1, 2, \dots, s\} - \{\varrho_1, \varrho_2, \dots, \varrho_r\}$, $\tau_1 < \tau_2 < \dots < \tau_{s-r}$. Ich wähle als Wertesystem $A_{\nu_1 \dots \nu_s}$, zu welchem ich eine zur O. Mf. von $O_{1\,\dots\,s}^{\alpha_1\,\dots\,\alpha_s}$ gehörige Φ-Funktion $\Phi_{1 \dots s}$ konstruieren will, folgendes:

$$(2) \quad . \quad . \quad \left\{ \begin{array}{l} A_{\nu_1 \dots \nu_r \tau_1 \dots \tau_{s-r}} = A_{\nu_1 \dots \nu_r} \text{ für sämtliche} \\ r! \text{ Anordnungen } (\nu_1 \dots \nu_r) \text{ von } \varrho_1, \varrho_2, \dots, \varrho_r \text{ und} \\ \text{alle übrigen } A_{\nu_1 \dots \nu_s} \text{ beliebig.} \end{array} \right.$$

Es ist

$$(3) \quad . \quad . \quad \left\{ \begin{array}{l} O^{\alpha_{\nu_1} \ldots \alpha_{\nu_r} \alpha_{\tau_1} \ldots \alpha_{\tau_{s-r}}}_{\nu_1 \ldots \nu_r \tau_1 \ldots \tau_{s-r}} \Phi_{1 \ldots s} = A_{\nu_1 \ldots \nu_r} \text{ für} \\ \text{sämtliche } r! \text{ Anordnungen } (\nu_1 \ldots \nu_r) \text{ von } \varrho_1, \varrho_2, \ldots \\ \ldots, \varrho_r . \end{array} \right.$$ [12]

Eine Funktion $\Phi_{\rho_1 \ldots \rho_r}$ ist dann offenbar durch die Wahl

$$(4) \quad . \quad . \quad \Phi_{\rho_1 \ldots \rho_r} \equiv O^{\alpha_{\tau_1} \ldots \alpha_{\tau_{s-r}}}_{\tau_1 \ldots \tau_{s-r}} \Phi_{1 \ldots s}$$

gegeben. — Ebenso erkennt man die Gültigkeit des zweiten Teiles dieses Hilfssatzes.

Dagegen lässt sich unter Hinzufügung einer weiteren einfachen Voraussetzung über die Existenz gewisser Funktionen Φ zu den r-fachen U. Mannigfaltigkeiten der O. Mf. von $O^{\alpha_1 \ldots \alpha_n}_{1 \ldots n}$ ein Konstruktionsprinzip von Ψ-Funktionen zur O. Mf. von $O^{\alpha_1 \ldots \alpha_n}_{1 \ldots n}$ angeben.

Ich schicke eine Zeichenerklärung voraus:

$Z_5)$ . . Ist der Durchschnitt $\{\sigma_1, \ldots, \sigma_k\} \cdot \{\alpha, \ldots, \varrho\}$ leer, so bedeute $(\alpha \ldots \varrho)_{\sigma_1 \ldots \sigma_k}$ die Anordnung der in $\{\alpha, \ldots, \varrho\}$ vorkommenden Elemente aus $\{\sigma_1 \ldots \ldots, \sigma_k\}$, so wie sie durch die Anordnung von $(\alpha \ldots \ldots \varrho)$ mitbestimmt wird.[13] (So ist z. B. $(32145)_{136} \equiv (31)$).

und stelle zunächst folgende Tatsache fest:

$T)$ . . Ist $g(x_1, \ldots, x_m)$ eine Funktion, auf welche sämtliche Operatoren der O. Mf. von $O^{\alpha_1 \ldots \alpha_m}_{1 \ldots m}$ anwendbar sind, so gilt für das Produkt der beiden Funktionen $g(x_1, \ldots, x_m)$ und $e^{\alpha_{m+1} \ldots \alpha_s}_{m+1 \ldots s}$ $(s > m)$:

---

[12]) $(\tau_1 \ldots \tau_{s-r})$ wird dabei festgehalten.

[13]) Die Bedeutung dieses Symbols ist demna h unabhängig von der Reihenfolge der angehängten Indizes $\sigma_1, \ldots, \sigma_k$; so ist z. B. $(\alpha \ldots \rho)_{\nu_1 \ldots \nu_k} = (\alpha \ldots \rho)_{1 \ldots k}$, wenn $\{\nu_1 \ldots \nu_k\} = \{1, 2, \ldots k\}$ ist.

$$T) \quad \left\{ \begin{array}{l} O^{\alpha\nu_1 \cdots \alpha\nu_s}_{\nu_1 \cdots \nu_s}\left[e^{\alpha_{m+1} \cdots \alpha_s}_{m+1 \cdots s} \cdot g(x_1 \ldots, x_m) \right] = \\ \qquad = O^{(\alpha_1 \ldots \alpha\nu_s)}_{(\nu_1 \ldots \nu_s)} {}^{\alpha_1 \cdots \alpha_m}_{1 \ldots m} g(x_1, \ldots, x_m) \\ \text{und zwar für sämtliche Operatoren der O. Mf. von} \\ O^{\alpha_1 \cdots \alpha_s}_{1 \ldots s}. \end{array} \right.$$

Der Einfluss der Operatoren $O^{\alpha_{m+1}}_{m+1}, \ldots, O^{\alpha_s}_{s}$ auf $g(x_1, \ldots$ $\ldots, x_m)$ wird hier gewissermassen abgeschirmt. Da allgemein Funktionen, welche die Eigenschaft dieses Produktes besitzen, im Folgenden eine grosse Rolle spielen werden, definiere ich noch:

$Z_6)$ . . Ist $g(x_1, \ldots, x_m)$ eine Funktion, auf welche die Operatoren der O. Mf. von $O^{\alpha_1 \cdots \alpha_m}_{1 \ldots m}$ anwendbar sind, so heisse eine Funktion $S(x_1, \ldots, x_s)$, $(s > m)$, eine S-Funktion von $g(x_1, \ldots, x_m)$ bezüglich dieser O. Mf., wenn für sämtliche $s!$ Operatoren dieser O. Mf. gilt:

$$O^{\alpha\nu_1 \ldots \alpha\nu_s}_{\nu_1 \ldots \nu_s} S(x_1, \ldots, x_s) = \\ = O^{(\alpha\nu_1 \cdots \alpha\nu_s)\alpha_1 \ldots \alpha_m}_{(\nu_1 \ldots \nu_s)_1 \ldots m} g(x_1, \ldots, x_m)$$ [14])

Nun lässt sich unser Hauptsatz einfach formulieren:

Satz 1] . Sei eine O. Mf. durch $O^{\alpha_1 \cdots \alpha_n}_{1 \ldots n}$ gegeben. Wenn dann für irgend ein festes r, $(2 \leq r < n)$, alle r-fachen U. Mannigfaltigkeiten dieser O. Mf. Φ-Funktionen besitzen, so besitzt diese O. Mf. auch stets

---

[14]) Ist z. B. $g(x_1, x_2) \equiv x_1 + x_2$, $O^{\alpha_1 \alpha_2}_{1\ 2} \equiv \lim\limits_{x_1 \to 0} \lim\limits_{x_2 \to 0}$ und $O^{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3}_{1\ 2\ 3} \equiv \lim\limits_{x_1 \to 0} \lim\limits_{x_2 \to 0} \frac{\delta}{\delta x_3}{}_{x_3 = 0}$, so ist $S(x_1, x_2, x_3) \equiv x_3(x_1 + x_2)$ eine S-Funktion von g bezügl. der O. Mf. von $O^{\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3}_{1\ 2\ 3}$.

Satz 1] . Ψ-Funktionen. Es lassen sich dann nämlich zu den $\binom{n}{r}$ r-fachen U. Mannigfaltigkeiten, repräsentiert durch die Operatoren $O_{a_1 \dots a_r}^{\alpha_{a_1} \dots \alpha_{a_r}}$, wobei $a_1 < a_2 < \dots < a_r$ angenommen werde, $\binom{n}{r}$ Φ-Funktionen $\overline{\Phi}_{a_1 \dots a_r}$ derart bestimmen, dass eine Ψ-Funktion $\overline{\Psi}$ durch den Ansatz

$$1) \dots \quad \overline{\Psi}(x_1, \dots, x_n) \equiv \sum \overline{S}_{a_1 \dots a_r}(x_1, \dots, x_n)$$

gegeben ist, wobei über alle $\binom{n}{r}$ Kombinationen $\{a_1, \dots, a_r\}$ aus $\{1, 2, \dots, n\}$ zu summieren ist. Die $\overline{S}_{a_1 \dots a_r}(x_1, \dots, x_n)$ bedeuten die S-Funktionen der $\overline{\Phi}_{a_1 \dots a_r}$ bezüglich der O. Mannigfaltigkeiten von $O_{1 \dots n}^{\alpha_1 \dots \alpha_n}$.[15]

Beweis von Satz 1].

Vorbereitende Bemerkungen.

Für eine übersichtliche Gestaltung des Beweises empfehlen sich zunächst nachstehende, vereinfachende Bezeichnungen.

Z_7) . . Es sollen die $n!$ bzw. $r!$ Anordnungen von resp. $1, 2, \dots, n$ bzw. $1, 2, \dots, r$ und die $\binom{n}{r}$ Kombinationen $\{a_1, a_2, \dots, a_r\}$ aus $1, 2, \dots, n$ (wobei stets $a_1 < a_2 < \dots < a_r$ angenommen werde)

---

15) In vielen Fällen ermöglicht die Beachtung folgender Tatsache eine fü die Anwendung obigen Satzes wesentliche Vereinfachung:

Sind $O_{a_1 \dots a_r}^{\alpha_{a_1} \dots \alpha_{a_r}}$, $O_{b_1 \dots b_1}^{\alpha_{b_1} \dots \alpha_{b_r}}$, $O_{c_1 \dots c_r}^{\alpha_{c_1} \dots \alpha_{c_r}}$ verschiedene U.Mannigfaltigkeiten der O. Mf. von $O_{1 \dots n}^{\alpha_1 \dots \alpha_n}$, wobei $a_1 < a_2 < \dots < a_r$, $< b_1 < b_2 < \dots < b_r$, $c_1 < c_2 < \dots < c_r$, ... und sind $(\alpha_{b_1} \dots \alpha_{b_r})$, $(\alpha_{c_1} \dots \alpha_{c_r})$, .. verschiedene Anordnungen von $(\alpha_{a_1} \dots \alpha_{a_r})$, so ist mit der Existenz von Φ-Funktionen zur O. Mf. von $O_{a_1 \dots a_r}^{\alpha_{a_1} \dots \alpha_{a_r}}$ zufolge E') auch die Existenz von Φ-Funktionen zu den übrigen dieser U. Mannigfaltigkeiten gewährleistet.

$Z_7)$ . . abkürzend mit resp. $N_1, N_2, \dots, N_{n!}$, bzw. $R_1, R_2, \dots, R_{r!}$ und $K_1, K_2, \dots, K_{\binom{n}{r}}$ bezeichnet werden. Die Numerierung geschehe dabei so, dass man sich die einzelnen Anordnungen (auch die Kombinationen als Anordnungen aufgefasst) als gewöhnliche Zahlen gelesen der Grösse nach geordnet und nun numeriert denkt.

$Z_8)$ . . Ist $\{a_1, \dots, a_r\} = K_i$ und $(\varrho_1 \dots \varrho_r) = R_j$, so bedeute $A_{K_i, R_j} = (a_{\varrho_1} \dots a_{\varrho_r})$.

Im Folgenden sollen zur Vereinfachung bei den Operatoren die oberen Indizes zunächst fortgelassen werden.[16])

Da für festgehaltenes K_i jeder der Operatoren $O_{A_{K_i R_j}}$ ($j = 1, 2, \dots, r!$) als Repräsentant derselben O. Mf. angesehen werden kann (die eine U. Mf. von O_{N_1} ist), genügt zur Festlegung dieser U. Mf. der Index i. Ich setze daher fest:

$Z_9)$ . . Die O. Mf. von $O_{A_{K_i, R_j}}$ werde mit U_{K_i} bezeichnet[17]).

$Z_{10})$ . . Die zu den U. Mannigfaltigkeiten U_{K_i} gehörigen Φ-Funktionen, bzw. deren S-Funktionen bezüglich der O. Mf. von O_{N_1}, seien mit Φ_{K_i} bzw. S_{K_i} bezeichnet[18]).

Schliesslich bedeute

$Z_{11})$ . . $\xi^i_j = O_{A_{K_i, R_j}} \Phi_{K_i}$[19]) für $i = 1, 2, \dots, \binom{n}{r}$ und $j = 1, 2, \dots, r!$

---

[16]) Es bedeutet dann unter Beachtung von $Z_7)$ z. B. $O_{N_1} = O^{\alpha_1 \dots \alpha_n}_{1 \dots n}$, $O_{N_\nu} = O^{\alpha_{\nu_1} \dots \alpha_{\nu_n}}_{\nu_1 \dots \nu_n}$ und $O_{A_{K_i, R_j}} = O^{\alpha_{a_{\rho_1}} \dots \alpha_{a_{\rho_r}}}_{a_{\rho_1} \dots a_{\rho_r}}$, w nn $N_\nu = (\nu_1 \dots \dots \nu_n)$, $K_i = (a_1 \dots a_r)$ und $R_j = (\rho_1 \dots \rho_r)$ ist.

[17]) Ich ziehe hier, wie auch in $Z_8)$ und an einigen weiteren Stellen vor, K_i statt i, R_j statt j zu schreiben, da hiedurch die Herkunft der Indizes be ser vergegenwärtigt wird.

[18]) Die genauere Bestimmung dieser „zu U_{K_i} gehörigen" Φ-Funktionen wird später erfolgen.

[19]) Diese Werte ξ^i_j sind natürlich abhängig von der Wahl der Funktionen Φ_{K_i} vgl. Fussnote 18)!

Offenbar gilt

(1) . . $\{ O_{N_\nu} S_{K_i} = \xi^i_j$ wenn $(N_\nu)_{K_i} = A_{K_i,\,R_j}$ ist,
denn nach Definition der S-Funktion ist ja $O_{N_\nu} S_{K_i} = O_{(N_\nu)_{K_i}} \Phi_{K_i}$[20]), also wegen $(N_\nu)_{K_i} = A_{K_i,\,R_j}$ nach Z_{11}): $O_{(N_\nu)_{K_i}} \Phi_{K_i} = O_{A_{K_i,R_j}} \Phi_{K_i} = \xi^i_j$.

Ich setze die Funktion Ψ in der Form an

(2) . .
$$\Psi = \sum_{i=1}^{\binom{n}{r}} S_{K_i},$$

wobei ich mir die nähere Bestimmung der Funktion Φ_{K_i} (die S_{K_i} sind dann S-Funktionen dieser) noch vorbehalte. Es ist darnach

(3) . .
$$O_{N_\nu} \Psi = \sum_{i=1}^{\binom{n}{r}} O_{N_\nu} S_{K_i} = \sum_{i=1}^{\binom{n}{r}} O_{(N_\nu)_{K_i}} \Phi_{K_i} = \sum_{i=1}^{\binom{n}{r}} \xi^i_{j\,(N_\nu,\,K_i)} = L\nu\,(\xi^i_j),$$

wenn man die Linearformen in den ξ^i_j mit $L\nu\ (\xi^i_j)$ bezeichnet. Dabei ist j offenbar eine Funktion von N_ν und K_i. Man erhält so für $\nu = 1, 2, \ldots, n!$ aus (3) das Gleichungssystem in den Grössen ξ^i_j, die ich vorerst als Unbestimmte ansehe:

(4) . .
$$\begin{cases} O_{N_1} \Psi = L(\xi^i_j) \\ O_{N_2} \Psi = L(\xi^i_j) \\ \vdots \qquad \vdots \\ O_{N_{n!}} \Psi = L(\xi^i_j) \end{cases}$$

Bezüglich des Baues dieser Linearformen sind zunächst zwei Eigentümlichkeiten hervorstechend:

a)... Bei festgehaltenem Index i tritt in jeder Linearform $L\nu$ nur für einen einzigen Index j eine Unbestimmte ξ^i_j und zwar mit dem Koeffizienten 1 auf, alle anderen Unbestimmten haben Koeffizienten, die gleich Null sind. (Folgt unmittelbar aus (3), wenn man bedenkt, dass nach (1) $j = j(\nu, i)$ eine eindeutige Funktion von ν und i ist).

b).... Jede der $r!\binom{n}{r}$ Unbestimmten ξ^i_j tritt wenigstens einmal wirklich auf und zwar mit dem Koeffizienten 1. (Denn

---

20) Vgl. Z_5) und die Fussnote 13).

es gibt sicher eine Anordnung N_ν, für welche gilt $(N_\nu)_{K_i} = A_{K_i, R_j}$. Nach (1) tritt dann aber in der ersten Summe der Gleichung (3) ξ^i_j mit dem Koeffizienten 1 auf.)

Der Kern des Beweises wird nun im Nachweis der Ungleichung

$$(5) \quad . \ . \quad \{L_\nu(\xi^i_j) \neq L_\mu(\xi^i_j) \text{ für } \nu, \mu \prec \{1, 2, \ldots, n!\} \text{ und } \nu \neq \mu\}$$

bestehen.

Für $\mu \neq \nu$ kann aber $L_\mu \equiv L_\nu$ dann und nur dann gelten, wenn die $r! \binom{n}{r}$ Anordnungsgleichungen

$$(6) \quad . \ . \quad (N_\mu)_{K_i} = (N_\nu)_{K_i} \text{ für } i = 1, 2, \ldots, \binom{n}{r}$$

erfüllt sind — was sich aus der zweiten Summe unter (3) ergibt — d. h. also, wenn sämtliche $\binom{n}{r}$ Teilanordnungen von r Elementen aus N_μ mit den entsprechenden Teilanordnungen aus N_ν paarweise übereinstimmen. Ist jedoch $N_\mu \equiv (\mu_1 \ldots \mu_n)$ und $N_\nu \equiv (\nu_1 \ldots \nu_n)$, so gibt es wegen $N_\mu \neq N_\nu$ einen kleinsten Index σ und einen Index τ aus $\{1, 2, \ldots, n\}$ so, dass $\mu_\sigma \neq \nu_\sigma = \mu_\tau$ ist, wobei $\tau > \sigma$ sein muss. N_μ bezw. N_ν hat hiermit die Gestalt

$$N_\mu \equiv (\mu_1 \ldots \mu_{\sigma-1} \mu_\sigma \ldots \mu_\tau \ldots \mu_n),$$
$$N_\nu \equiv (\mu_1 \ldots \mu_{\sigma-1} \mu_\tau \mu_{\sigma+1} \ldots \mu_\sigma \ldots \mu_n).$$

Bezeichnet jetzt K_t eine Kombination, die μ_σ und μ_τ enthält, so gilt für diese offenbar

$$(N_\mu)_{K_t} \neq (N_\nu)_{K_t}.$$

Also können nicht alle Gleichungen (6) erfüllt sein und die $n!$ Linearformen sind somit alle voneinander verschieden. Damit ist der Kern des Beweises erledigt und das Weitere ergibt sich nun fast von selbst.

Nach einem bekannten Satz der Algebra lassen sich jetzt für die $r! \binom{n}{r}$ Unbestimmten ξ^i_j solche Werte wählen:

$$\bar{\xi}^1_1, \bar{\xi}^1_2, \ldots, \bar{\xi}^1_{r!};\ \bar{\xi}^2_1, \bar{\xi}^2_2, \ldots, \bar{\xi}^2_{r!}; \ldots \bar{\xi}^{\binom{n}{r}}_1, \bar{\xi}^{\binom{n}{r}}_2, \ldots \bar{\xi}^{\binom{n}{r}}_{r!},$$

dass die Ungleichungen

$$(7) \quad . \quad . \quad L_\mu(\overline{\xi}_j^i) \neq L_\nu(\overline{\xi}_j^i) \text{ für } \nu, \mu \prec \{1, 2, \ldots, n!\} \text{ und } \mu \neq \nu$$

bestehen. Anderseits vermögen wir unter der in Satz 1] gemachten Voraussetzung zu den O. Mannigfaltigkeiten U_{K_i} $\left(i = 1, 2, \ldots \ldots, \binom{n}{r}\right)$ spezielle Φ-Funktionen $\overline{\Phi}_{K_i}$ anzugeben, für welche gilt:

$$O_{A_{K_i, R_j}} \overline{\Phi}_{K_i} = \overline{\xi}_j^i \text{ für } i = 1, 2, \ldots, \binom{n}{r} \text{ und } j = 1, 2, \ldots, r!$$

Sind dann $\overline{S}_{K_i}$ die zu diesen $\overline{\Phi}_{K_i}$ bzgl. der O. Mf. von O_{N_1} gehörigen S-Funktionen, so gilt

$O_{(N_\nu)_{K_i}} \overline{S}_{K_i} = \overline{\xi}_j^i$, wobei $(N_\nu)_{K_i} = A_{K_i, R_j}$ ist, für $\nu = 1, 2, \ldots, n!$ und $i = 1, 2, \ldots, \binom{n}{r}$.

Nach (4) folgt dann aber, wenn man in (2) für die S_{K_i} obige $\overline{S}_{K_i}$ setzt und die so gegebene Summe mit $\overline{\Psi}$ bezeichnet:

$$O_{N_\nu} \overline{\Psi} = L_\nu(\overline{\xi}_j^i) \text{ für } \nu = 1, 2, \ldots, n!,$$

womit wegen (7) alles bewiesen ist.

Anmerkung zu Satz 1]:

Für $r \geqq 3$ (also $n \geqslant 4$) reicht in 1) bereits ein Ansatz mit weniger Summanden aus und man überlegt sich leicht, das hiehergehörige Vereinfachungen in engem Zusammenhang mit der Frage nach der eindeutigen Bestimmung einer Anordnung von n Elementen aus gewissen Teilanordnungen dieser stehen[21]).

[21]) Z. B. reicht für $r = n - 1$ bereits folgender Ansatz aus: $\overline{\Psi} \equiv S_{12 \ldots n-1} + S_{23 \ldots n} + \overline{S}_{12 \ldots \overline{n-2}\, n}$, ja man kann hierin sogar $\overline{S}_{12 \ldots \overline{n-2}\, n}$ durch $\overline{S}_{1n}$ ersetzen. (Die Existenz dieser Funktion ist nach H, S. 1] mit der von $\overline{S}_{12 \ldots n-2 n}$ gewährleistet). Offenbar ist nämlich jede Anordnung der Elemente $1, 2, \ldots, n$ durch (miteinander verträgliche) Anordnungen der Elemente $1, 2, \ldots, n-1$; $2, 3, \ldots, n$ und $1, n$ eindeutig bestimmt. Der Beweis dafür, dass bereits obigel Ansatz genügt, verläuft wie der zu Satz 1] gebrachte.

Aus Satz 1] lässt sich nun, wie man ohneweiters einsieht, sofort ein im wesentlichen gleichwertiger ableiten, bei dem jedoch die Bedeutung des Satzes 1] schärfer hervortritt. Führt man nämlich die Bezeichnung ein:

Z_{12}) . . Seien s einfache Operatoren durch die oberen Indizes $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$ charakterisiert, so heisse jede irgendwie aus Operatoren mit oberen Indizes aus $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_s\}$ gebildete O. Mf.: „O. Mf., gebildet aus $O^{\alpha_1 \cdots \alpha_s}$".

so gilt:

Satz 1′] . Besitzen sämtliche „r-fachen" ($r \geqq 2$ und fest) O. Mannigfaltigkeiten, aus $O^{\alpha_1 \cdots \alpha_s}$ gebildet, Φ-Funktionen, so besitzt jede O. Mf. aus $O^{\alpha_1 \cdots \alpha_s}$ Ψ-Funktionen. Diese lassen sich dann mithilfe jener gemäss 1) in Satz 1] linear aufbauen.[22])

Anmerkung.

Fügt man zu den Hilfsfunktionen, die in der unter Fussnote 2) zitierten Arbeit angegeben wurden, noch die folgenden hinzu

$\varphi^{\mathrm{I}}_{12} \equiv A\,[B\Theta_{12} + C\Theta_{21}]$, wobei gesetzt ist

$$\Theta_{12} \equiv \frac{x_1^2 - 2x_2^2}{(x_1^2 + 2x_2^2)^2}, \quad A = \frac{\sqrt{2}}{B^2 - C^2},$$

$B = \operatorname{arc\,tg} \dfrac{1}{\sqrt{2}}$, $C = \operatorname{arc\,tg} \sqrt{2}$, so hat man insbesondere alle 2-fachen Hilfsfunktionen φ und daher auch alle jenen Φ-Funktionen gegeben, die zum Aufbau von Ψ-Funktionen zu beliebigen aus den Operatoren der Limitation, Ableitung und Integration zusammengesetzten O. Mannigfaltigkeiten hinreichen.

Es liegt nun nahe zu fragen, ob der unter 1) Satz 1] gemachte Ansatz nicht auch zur Konstruktion von Φ-Funktionen herangezogen werden kann. In dieser Hinsicht gilt jedoch der Satz:

---

22) Ist eine spezielle O. Mf. vorgelegt, zu welcher eine Ψ-Funktion konstruiert werden soll, so genügen, wie man sich leicht überzeugt, oftmals bereits geringere Voraussetzungen. (Vgl. auch Anmerkung 15) und 21)!).

Satz 2] . . Der in Satz 1] gemachte Ansatz eignet sich im allgemeinen nicht auch zum Aufbau von Φ Funktionen.

Beweis.

Sei $n=r+t$, wobei $t \geqq 2$ ist. Irgend eine n-fache O. Mf., gebildet aus $O^{\alpha_1 \ldots \alpha_s}$, sei dann durch $O^{\overline{\alpha}_1 \ldots \overline{\alpha}_n}_{1 \ldots n}$ (kurz O_{N_1}) repräsentiert, $(\alpha_i \prec \{\alpha_1, \ldots, \alpha_s\}$ für $i = 1, 2, \ldots, n)$. Gesucht wird eine Φ-Funktion zur O. Mf. von O_{N_1} und dem beliebig vorgegebenen Wertesystem $A_\nu(\nu = 1, \ldots, n!)$, die sich aus den S-Funktionen von Φ-Funktionen zu „r-fachen O. Mannigfaltigkeiten gebildet aus $O^{\alpha_1 \ldots \alpha_s}$ in der Form $\Phi \equiv \sum_{i=1}^{\binom{n}{r}} \overline{S}_{K_i}$ aufbaut. Für die Funktion Φ müsste dann gelten

(1) . . . $$O_{N_1}\Phi = A_\nu \quad \text{für } \nu = 1, \ldots, n!$$

d. h. aber, es müsste unter Beachtung von (4) des Beweises zu Satz 1] das Gleichungssystem

(2) . . . $$L_\nu(\xi_j^i) = A_\nu \quad (\nu = 1, 2, \ldots, n!)$$

für jede Wahl der A_ν stets Lösungen besitzen. Dass dies aber nicht der Fall zu sein braucht, folgt daraus, dass der Rang der linksstehenden Koeffizientenmatrix der ξ_j^i kleiner ist als die Anzahl der Gleichungen: diese beträgt nämlich $(r+t)!$, die der Unbestimmten $r!\binom{r+t}{r}$ und wegen $t \geqq 2$ gilt $r!\binom{r+t}{r} = (r+t).(r+t-1)\,.\ldots(t+1) < (r+t)!$ Hiemit ist Satz 2] bewiesen.[23])

Dagegen gilt der in manchen Fällen nützliche Satz, dessen Beweis auf der Hand liegt:

---

23) Für die Wahl $t=1$, also $n=r+1$, bestünde das Gleichungssystem (2) aus $n!$ Gleichungen und ebensovielen Unbestimmten. In diesem Falle wäre denkbar, dass der Rang gleich der Anzahl der Gleichungen sei. Ohne hier näher auf die Untersuchung der (übrigens sehr interessant gebauten) Koeffizientenmatrix einzugehen, lässt sich doch immerhin bereits an dieser Stelle folgendes sagen: „Sicher kann der maximale Rang $n!$ bei der Wahl $r = n - 1$ nie für zwei aufeinander folgende natürliche Zahlen n_1 und $n_2 = n_1 + 1$ erreicht werden".

Satz 3] . . $\left\{\begin{array}{l}\text{Kann man zur O. Mf. von } O_{N_1}\ n! \text{ Funktionen } X_1, \ldots, X_{n!} \text{ derart finden, dass die Determinante}\end{array}\right.$

$$\begin{vmatrix} O_{N_1} X_1 & O_{N_1} X_2 \ldots O_{N_1} X_{n!} \\ \vdots & \\ O_{N_{n!}} X_1 & O_{N_{n!}} X_2 \ldots O_{N_{n!}} X_{n!} \end{vmatrix} \neq 0$$

ausfällt, so besitzt die O. Mf. von O_{N_1} stets Φ-Funktionen. Sind dann A_ν $(\nu = 1, \ldots, n!)$ $n!$ willkürlich vorgegebene Werte, so liegt in $\Phi = \sum_{\sigma=1}^{n!} \lambda_\sigma X_\sigma$ eine dazugehörige Φ-Funktion vor, wobei die λ_σ aus dem Gleichungssystem $\sum_{\sigma=1}^{n!} \lambda_\sigma O_{N_\sigma} X_\sigma = A_\nu$ $(\nu = 1, 2, \ldots, n!)$ zu bestimmen sind.

C)

a) Die Operatormenge $\overline{O}$.

Eine erste Einengung von O auf eine Operatormenge $\overline{O}$ geschehe durch Hinzufügung der beiden Forderungen

E_6) . . . Ist $\overset{\alpha}{O_\nu}$ auf f und g anwendbar [24]), so auch auf $(f \cdot g)$ und es gelte $\overset{\alpha}{O_\nu}(f \cdot g) = \left(\overset{\alpha}{O_\nu} f\right) \cdot \left(\overset{\alpha}{O_\nu} g\right)$.

E_7) . . . Ist $k(x_{\alpha_1}, x_{\alpha_2}, \ldots, x_{\alpha_s}) \neq 0$, so existiert $\overset{\alpha}{O_\nu} k(x_{\alpha_1}, x_{\alpha_2}, \ldots, x_{\alpha_s})$, ist endlich und $\neq 0$, falls ν nicht unter $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$ auftritt.

$\overline{O}$ ist jedenfalls nicht leer, denn z. B. sind darin die gewöhnlichen Limitationsprozesse enthalten; $\overline{O}$ enthält aber mehr z. B. auch die unter B_1) und B_3) auf Seite 20 angegebenen Operatoren.

Ich führe zunächst zwei wichtige Folgerungen an, die für

---

[24]) Hiebei sei $\overset{\alpha}{O_\nu}$ irgend ein Operator aus $\overline{O}$.

die Operatoren aus $\bar{O}$ (nebst F_1) bis F_6)) gelten und lasse die ganz einfachen Beweise weg:

$$\bar{F}_1) \quad . \quad . \quad \Big\{\ \overset{\alpha}{O}_{\nu}\, 1 = 1,$$

$$\bar{F}_2) \quad . \quad . \quad \begin{cases} \overset{\alpha}{O}_{\nu}\, k\,(x_{\alpha_1},\, x_{\alpha_2}, \ldots, x_{\alpha_s}) = k\,(x_{\alpha_1},\, x_{\alpha_2}, \ldots x_{\alpha_s}), \\ \text{falls } \nu \text{ nicht unter } \alpha_1, \ldots, \alpha_s \text{ vorkommt.} \end{cases}$$

Für die mittelst Operatoren aus $\bar{O}$ gebildeten „zusammengesetzten Operatoren" gelten dann (neben E'_1) bis E'_5)) E_6) und E_7) analoge Eigenschaften, wie man unmittelbar erkennt. Wir begnügen uns mit der Konstruktion von φ-Funktionen[25]), die wir hier ähnlich wie eingangs definieren:

Z_{13}) . . Eine Funktion heisse eine zum Operator $O^{\alpha_{\nu_1} \ldots \alpha_{\nu_n}}_{\nu_1 \ldots \nu_n}$ gehörige φ-Funktion, und werde mit $\varphi^{\alpha_{\nu_1} \ldots \alpha_{\nu_n}}_{\nu_1 \ldots \nu_n}$ bezeichnet, wenn gilt:

$$O^{\alpha_{\mu_1} \ldots \alpha_{\mu_1}}_{\mu_1 \ldots \mu_n}\, \varphi^{\alpha_{\nu_1} \ldots \alpha_{\nu_n}}_{\nu_1 \ldots \nu_n} = \begin{cases} 1 \text{ für } (\mu_1 \ldots \mu_n) = (\nu_1 \ldots \nu_n), \\ 0 \text{ für } (\mu_1 \ldots \mu_n) \neq (\nu_1 \ldots \nu_n), \\ \text{wobei } \{\mu_1 \ldots \mu_n\} = \{\nu_1 \ldots \nu_n\} \text{ ist.} \end{cases}$$

Die $n!$ Funktionen $\varphi^{\alpha_{\mu_1} \ldots \alpha_{\mu_n}}_{\mu_1 \ldots \mu_n}$, (($\mu_1 \ldots \mu_n$), sämtliche Anordnungen von $\nu_1 \ldots \nu_n$ durchlaufend) heissen dann die zur O. Mf. von $O^{\alpha_{\nu_1} \ldots \alpha_{\nu_n}}_{\nu_1 \ldots \nu_n}$ gehörigen φ-Funktionen.

Es gilt dann der Satz:

Satz 4] . Besitzt jede 2-fache U. Mf. von $O_{1 \ldots n}$ ($O_i \prec \prec \bar{O}$ für $i = 1, 2, \ldots, n$), φ-Funktionen, so besitzt

25) Nach dem eingangs auseinandergesetzten Prinzip ist damit auch stets die Darstellung der Φ-Funktionen gegeben. Vgl. Seite 14 dff.

Satz 4]. . auch $O_{1\ldots n}$ stets φ-Funktionen. Eine zu $O_{\nu_1\ldots\nu_n}$ gehörige φ-Funktion, $\big((\nu_1\ldots\nu_n)$ eine beliebige Anordnung von $1, 2, \ldots, n\big)$ kann dann in der Gestalt

$$\varphi_{\nu_1\cdots\nu_n} \equiv \prod_{i=1}^{n-1} \varphi_{\nu_i\,\nu_{i+1}}$$

angegeben werden. Hiebei bedeuten die $\varphi_{\nu_i\,\nu_{i+1}}$ die φ-Funktionen zu den 2-fachen Operatoren $O_{\nu_i\nu_{i+1}}$.[26])

Beweis von Satz 4]:

Sei $O_{\mu_1\cdots\mu_n}$ ein Operator aus der O. Mf. von $O_{1\,\ldots\ldots\,n}$. Dann sind zwei Fälle zu unterscheiden:

α) . . . . $(\mu_1\ldots\mu_n)=(\nu_1\ldots\nu_n)$.

Nach E_6) ist dann

$$(1)\quad \ldots\quad O_{\mu_1\cdots\mu_n}\,\varphi_{\nu_1\cdots\nu_n} = \prod_{i=1}^{n-1} O_{\mu_1\cdots\mu_n}\,\varphi_{\nu_i\,\nu_{i+1}} =$$

$$= \prod_{i=1}^{n-1} O_{(\mu_1\ldots\mu_n)_{\nu_i\,\nu_{i+1}}}\,\varphi_{\nu_i\,\nu_{i+1}} = \prod_{i=1}^{n-1} O_{\nu_i\,\nu_{i+1}}\,\varphi_{\nu_i\,\nu_{i+1}} = 1.$$

β) . . . . $(\mu_1\ldots\mu_n)\neq(\nu_1\ldots\nu_n)$.

$(\mu_1\ldots\mu_n)$ habe etwa die Gestalt $(\mu_1\ldots\mu_n)\equiv(\nu_1\ldots\nu_{k-1}\,\mu_k\ldots\ldots\mu_n)$, wobei $\mu_k \neq \nu_k$ ist und $k<n$ sein muss. Sei $\mu_k = \nu_{\sigma+1}$ hiebei ist $\sigma+1 \geqq k+1$ — so besitzt $(\mu_1\ldots\mu_n)$ folgendes Aussehen $(\mu_1\ldots\mu_n)\equiv(\nu_1\ldots\nu_{k-1}\,\nu_{\sigma+1}\ldots\nu_\sigma\ldots)$.

Damit wird wegen

---

26) Es ist aber zu beachten, das wenn $(\mu_1\ldots\mu_n)$ irgendeine andere Anordnung von $(\nu_1\ldots\nu_n)$ ist, $\varphi_{\mu_1\ldots\mu_n}$ im allgemeinen nicht etwa einfach durch die Vertauschung der Veränderlichen $x_{\nu_1}, x_{\nu_2}, \ldots, x_{\nu_n}$ in resp. $x_{\mu_1}, x_{\mu_2}, \ldots, x_{\mu_n}$ aus $\varphi_{\nu_1}\ldots\nu_n$ hervorgeht. Diese ergibt nur dann immer Richtiges, wenn die oberen Indizes von $O_{1\ \ldots\ n}^{\alpha_1\ldots\alpha_n}$ alle gleich sind, wenn also die zusammensetzenden Operatoren alle von derselben Art sind.

(2) . . . $O_{(\mu_1 \ldots \mu_n)\,\nu_\sigma \nu_{\sigma+1}} \varphi_{\nu_\sigma \nu_{\sigma+1}} = O_{\nu_{\sigma+1}\,\nu_\sigma} \varphi_{\nu_\sigma\,\nu_{\sigma+1}} = 0$

auch $O_{\mu_1 \ldots \mu_n} \varphi_{\nu_1 \ldots \nu_n} = 0$. Daraus folgt die Richtigkeit des Satzes 4]. — Unter Beachtung von H. S. 1] und Satz 4] ergibt sich so das bemerkenswerte Resultat:

Satz 4'] . . . Für die „aus $\overline{O}^{\alpha_1 \ldots \alpha_s}$ gebildeten O. Mannigfaltigkeiten“[27]) gilt: Dann und nur dann besitzen alle O. Mannigfaltigkeiten Φ - Funktionen, wenn alle 2-fachen solche besitzen.

---

b) **Die Operatormenge $\overline{\overline{O}}$.**

$\overline{\overline{O}}$ sei dadurch definiert, dass zu E_1) bis E_7) noch hinzutrete:

E_8) . . . Ist $\overset{\alpha}{\underset{\nu}{O}}$ auf f anwendbar, so auch auf $\frac{1}{f}$, falls $\overset{\alpha}{\underset{\nu}{O}} f \neq 0$ ist.

E_9) . . . Zu jedem Operator aus $\overset{\alpha}{\underset{\nu}{O}}$ existiere eine Funktion $\overset{(\alpha)}{\underset{\nu}{X}} \neq 0$, die nur von x_ν abhängt, derart dass $\overset{\alpha}{\underset{\nu}{O}}\, \overset{(\alpha)}{\underset{\nu}{X}} = 0$ ist.

Auch $\overline{\overline{O}}$ ist nicht leer, denn z. B. sind wieder die gewöhnlichen Limitationsprozesse darin enthalten.

Eine wichtige Folgerung für die Operatoren aus $\overline{\overline{O}}$ ist, wie man leicht erkennt, diese:

$\overline{\overline{F}}$) . . . $\overset{\alpha}{\underset{\nu}{O}} \frac{1}{f} = \frac{1}{\overset{\alpha}{\underset{\nu}{O}} f}$, allgemein $\overset{\alpha}{\underset{\nu}{O}} \frac{g}{f} = \frac{\overset{\alpha}{\underset{\nu}{O}} g}{\overset{\alpha}{\underset{\nu}{O}} f}$, falls $\overset{\alpha}{\underset{\nu}{O}} f \neq 0$ ist.

---

[27]) Der Querstrich bedeute, dass nur Operatoren aus $\overline{O}$ zugelassen sind.

Es gilt dann, wie man ohneweiters einsieht, der Satz:

Satz 5] . . . Setzt sich $O_{\nu_1 \nu_2}^{\alpha_{\nu_1} \alpha_{\nu_2}}$ aus Operatoren von $\overline{\overline{O}}$ zusammen und definiert man $\dfrac{X_\nu^{(\alpha)}}{X_\nu^{(\alpha)}} \equiv 1$, so stellt die folgende Funktion $\varphi_{\nu_1 \nu_2}$

$$\varphi_{\nu_1 \nu_2} \equiv \frac{X_{\nu_1}^{(\alpha_{\nu_1})}}{X_{\nu_1}^{(\alpha_{\nu_1})} + X_{\nu_2}^{(\alpha_{\nu_2})}}$$

eine zu $O_{\nu_1 \nu_2}^{\alpha_{\nu_1} \alpha_{\nu_2}}$ gehörige φ-Funktion dar.

Aus Satz 4] und 5] ergibt sich schliesslich

Satz 5′] . . . Ist $O_{\nu_1 \dots \nu_n}^{\alpha_{\nu_1} \dots \alpha_{\nu}}$ irgend ein aus Operatoren von $\overline{\overline{O}}$ zusammengesetzter Operator, so besitzt er stets eine φ-Funktion. Eine solche liegt in der folgendermassen definierten Funktion

$$\varphi_{\nu_1 \dots \nu_n}^{\alpha_{\nu_1} \dots \alpha_{\nu_n}} \equiv \frac{X_{\nu_1}^{(\alpha_{\nu_1})}}{X_{\nu_1}^{(\alpha_{\nu_1})} + X_{\nu_2}^{(\alpha_{\nu_2})}} \cdot \frac{X_{\nu_2}^{(\alpha_{\nu_2})}}{X_{\nu_2}^{(\alpha_{\nu_2})} + X_{\nu_3}^{(\alpha_{\nu_3})}} \cdot \dots \cdot \frac{X_{\nu_{n-1}}^{(\alpha_{\nu_{n-1}})}}{X_{\nu_{n-1}}^{(\alpha_{\nu_{n-1}})} + X_{\nu_n}^{(\alpha_{\nu_n})}}$$

vor.

Wir erhalten somit das Ergebnis: „Für die aus Operatoren von $\overline{\overline{O}}$ aufgebauten O. Mannigfaltigkeiten lässt sich unter Beachtung von Fussnote 25) stets ein Konstruktionsprinzip von Φ-Funktionen angeben.“