Sur la solution asymptotique d'une équation différentielle du premier ordre.

Par

T. PEYOVITCH.

1. Soit donnée une équation différentielle du premier ordre de la forme

$$\frac{dx}{dt}=a_0+kx+a_n x^n, \tag{1}$$

où a_0 est une fonction continue de la variable réelle $t \geqslant t_0 \geqslant 0$, tendant vers une limite finie et déterminée, $\lim\limits_{t=\infty} a=a_0$, k une constante, et a_n une fonction continue de la variable réelle $t \geqslant t_0 \geqslant 0$, tendant vers zéro, $\lim\limits_{t=\infty} a_n = 0$; n étant un nombre entier positif supérieur à 1.

Dans cet article nous allons montrer, par la méthode d'approximations successives, que l'équation (1) admet, pour $t \geqslant t_0 > 0$, t_0 étant assez grand, une solution satisfaisant à la relation

$$\lim_{t=\infty} x = \lim_{t=\infty} x_0 ;$$

x_0 étant la solution de l'équation

$$\frac{dx_0}{dt}=a_0+kx_0. \tag{2}$$

2. Considérons d'abord l'équation (2). Si l'on pose

$$a_0 = \bar{a}_0 + \varepsilon(t),$$

où $\varepsilon(t)$ est une fonction continue de la variable réelle $t \geqslant t_0 \geqslant 0$, tendant vers zéro pour $t = \infty$, l'équation (2) devient

$$\frac{dx_0}{dt} = \bar{a}_0 + \varepsilon(t) + k\,x_0,$$

dont l'intégrale générale est

$$(3) \qquad x_0 = Ce^{kt} - \frac{\bar{a}_0}{k} + \frac{\bar{a}_0}{k} e^{(t-t_0)} + e^{kt} \int_{t_0}^{t} e^{-kt} \varepsilon(t) dt.$$

Cherchons la valeur de l'intégrale ci-dessus pour $t = \infty$. Nous allons distinguer plusieurs cas.[1])

1°. *$k = \varrho + \theta i$ est un nombre complexe à partie réelle $\varrho > 0$* On aura, pour $C = 0$, $t_0 = \infty$,

$$x_0 = -\frac{\bar{a}_0}{k} + e^{kt} \int_{\infty}^{t} e^{-kt} \varepsilon(t)\, dt,$$

d'où l'on a

$$(4) \qquad \lim_{t=\infty} x_0 = -\frac{\bar{a}_0}{k},$$

c'est-à-dire il existe *une solution* de l'intégrale (3) satisfaisant à la relation (4).

2°. *$k = \varrho + \theta i$ est un nombre complexe à partie réelle $\varrho < 0$.* On aura

---

[1]) Voir le Mémoire de T. Peyovitch. *Sur les solutions asymptotiques des équations différentielles linéaires* (*Publications mathématiques de l'Université de Belgrade, t. I, 1932*).

$$(4) \qquad \lim_{t=\infty} x_0 = -\frac{\overline{a_0}}{k},$$

c'est-à-dire *l'intégrale générale* (3) satisfait à la relation (4).

3°. $k=\theta i$ *est un nombre imaginaire.*

On aura, pour

$$C + \frac{\overline{a_0}}{k} e^{-kt_0} = 0, \qquad t_0 = \infty,$$

$$x_0 = -\frac{\overline{a_0}}{k} + e^{kt} \int_{\infty}^{t} e^{-kt} \varepsilon(t)\, dt\,,$$

d'où l'on a

$$(4) \qquad \lim_{t=\infty} x_0 = -\frac{\overline{a_0}}{k}\,,$$

sous la condition que l'intégrale

$$(5) \qquad \int_{t_0}^{\infty} e^{-kt} \varepsilon(t)\, dt$$

soit convergente.

Il existe alors *une solution* de l'intégrale (3) satisfaisant à la relation (4), sous la condition que l'intégrale (5) converge.

4°. $k=0$. Dans ce cas il doit-être $\overline{a_0}=0$. On aura alors, pour $C=0$, $t_0=\infty$,

$$x_0 = \int_{\infty}^{t} \varepsilon(t)\, dt\,,$$

d'où

$$(4') \qquad \lim_{t=\infty} x_0 = 0,$$

à la condition que l'intégrale

$$(6) \qquad \int_{t_0}^{\infty} \varepsilon(t)\, dt$$

converge.

Il existe alors *une solution* de l'intégrale (3) satisfaisant à la relation (4') sous la condition que l'intégrale (6) soit convergente.

3. Reprenons maintenant l'équation (1), qui peut être écrite sous la forme de l'équation intégrale suivante

$$x = Ce^{kt} + e^{kt} \int_{t_0}^{t} e^{-kt} a_0(t)\, dt + e^{kt} \int_{t_0}^{t} e^{-kt} a_n(t)\, x^n(t)\, dt$$

ou

$$x = x_0 + e^{kt} \int_{t_0}^{t} e^{kt} a_n(t)\, x^n(t)\, dt,$$

x_0 étant la solution de l'équation (2).

Soit, pour $t \geqslant t_0 \geqslant 0$, x_0 une solution bornée de l'équation (2). En partant de la solution x_0, formons les suites des fonctions bornées

$$(6') \qquad x_1, x_2, \ldots, x_m, \ldots,$$

représentant les solutions successives de l'équation

$$(7) \qquad x_m = x_0 + e^{kt} \int_{t_0}^{t} e^{-kt} a_n(t)\, x_{m-1}^n(t)\, dt,$$

pour les valeurs $m = 1, 2, \ldots$, d'où l'on a

$$(8) \qquad x_m - x_{m-1} = e^{kt} \int_{t_0}^{t} e^{-kt} a_n(t) \left[x_{m-1}^n(t) - x_{m-2}^n(t) \right] dt.$$

Soit A un nombre positif et fixe verifiant les deux conditions suivantes:

1°

$$(9) \qquad |x_0^n| \leq A,$$

pour la variable réelle $t \geqslant t_0 \geqslant 0$, x_0 étant la solution bornée de l'équation (2);

2°

$$(10) \qquad |x_i^n - x_{i-1}^n| \leq A \, |x_i - x_{i-1}|,$$

x_i et x_{i-1} étant les valeurs finies quelconques de la suite (6'), pour la variable réelle $t \geqslant t_0 \geqslant 0$.

Les différences successives, données par l'équation (8), deviennent, d'après (10),

$$(11) \quad |x_m - x_{m-1}| \leq A \, |e^{kt}| \int_{t_0}^{t} |e^{-kt} a_n(t)| \, |x_{m-1} - x_{m-2}| \, dt,$$

où l'on a:

1°. $t_0 = \infty$, pour $k = \varrho + \theta i$ avec $\varrho > 0$;

2°. $t_0 = \infty$, pour $k = \theta i$ ou $k = 0$;

l'intégrale

$$(a) \qquad \int_{t_0}^{\infty} e^{-kt} a_n(t) \, dt$$

étant convegente dans le cas 2^0.

Considérons les solutions successives x_m ($m = 1, 2, \ldots$).

Pour $m = 1$, l'équation (7) donne, d'après (9),

$$(12) \quad |x_1 - x_2| \leq A\,|e^{kt}| \int_{t_0}^{t} |e^{-kt} a_n(t)|\,dt = A\varepsilon(t) \leq A\varepsilon$$

avec

$$\varepsilon = \max \varepsilon(t), \text{ pour } t \geqslant t_0 \geqslant 0; \quad \lim_{t=\infty} \varepsilon(t) = 0.$$

Pour $m = 2$, les inégalités (11), d'après (12), donnent

$$|x_2 - x_1| \leq A^2 \varepsilon\, \varepsilon(t) \leq A^2 \varepsilon^2.$$

En continuant ainsi, on aura, pour $t \geqslant t_0 \geqslant 0$,

$$(13) \qquad |x_m - x_{m-1}| \leq A^m \varepsilon^{m-1} \varepsilon(t) \leq A^m \varepsilon^m$$

avec

$$\varepsilon = \max \varepsilon(t), \text{ pour } t \geqslant t_0 \geqslant 0; \quad \lim_{t=\infty} \varepsilon(t) = 0.$$

Si l'on choisit t_0 assez grand pour que l'on ait

$$A\varepsilon < 1, \quad \varepsilon < \frac{1}{A},$$

la série

$$x = x_0 + \sum_{m=1}^{\infty} (x_m - x_{m-1})$$

converge uniformément, pour $t \geqslant t_0 > 0$, et représente la solution de l'équation (1), satisfaisant, d'après (13), à la relation

$$\lim_{t=\infty} x = \lim_{t=\infty} x_0. \tag{14}$$

Par conséquent, on aura le théorème suivant:

Soit, pour $t \geqslant t_0 \geqslant 0$, x_0 *une solution bornée de l'équation* (2)

Si l'on a $k = \varrho + \theta i$, $\varrho \neq 0$, *l'équation* (1) *admet une solution* x, *pour* $t \geqslant t > 0$, t_0 *étant assez grand, satisfaisant à la relation* (14). *Si l'on a* $\varrho < 0$, *cette solution* x *dépend d'une constante arbitraire.*

Si l'on a $k = \theta i$ *ou* $k = 0$, *l'équation* (1) *admet une solution* x, *pour* $t \geqslant t_0 > 0$, t_0 *étant assez grand, satisfaisant à la relation* (14), *sous l'hypothèse que l'intégrale* (*a*) *soit convegente.*

Remarque. — L'hypothèse introduite que k est une constante ne restreint point la généralité du théorème démontré, car l'équation

$$\frac{dx}{dt} = a_0 + a_1 x + a_n x^n,$$

où a_i sont des fonctions de t, peut être ramenée à l'équation (1), par la transformation

$$x = y\, u(x),$$

$u(x)$ étant une fonction convenablement choisie.

Pour $n = 2$, on obtient l'équation de *Riccati*; pour $n = 3$ on obtient l'équation du *troisième degré.*

Remarquons encore que l'équation la plus générale du troisième degré

$$\frac{dx}{dt}=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3,$$

où a_i sont des fonctions de t, peut être ramenée à l'équation (1), par la substitution

$$x=yu(x)+v(x),$$

où $u(x)$ et $v(x)$ sont des fonctions convenablement choisies.