

Schubspannungen in dünnwändigen Trägern.

Von

J. KLITCHIEFF.

Die berühmten Untersuchungen von *St. Venant* über die Torsion und Biegung zylindrischer Stäbe führen das Problem auf die Bestimmung der sogenannten „Torsions“, — bzw. „Biegungsfunktion“ für die gegebene Querschnittsform zurück.

Wir legen die z -Achse parallel der Erzeugenden des Zylinders durch die Schwerpunkte der Querschnitte, die x - und die y -Achse so, dass sie in die Trägheitshauptachsen eines Endquerschnitts fallen, den wir uns befestigt denken. Wird der Stab an seinem anderen Ende durch ein um die z -Achse drehendes Moment M auf *Torsion* beansprucht, dann lassen sich die Schubspannungskomponenten in bekannter Form darstellen:

$$X_z = \mu\tau \left(\frac{\partial\psi}{\partial y} - y \right), \quad Y_z = \mu\tau \left(-\frac{\partial\psi}{\partial x} + x \right),$$

wo μ den Schubmodul bezeichnet und die Konstante τ durch die Gleichung bestimmt wird:

$$M = \mu\tau \iint \left(x^2 + y^2 - x \frac{\partial\psi}{\partial x} - y \frac{\partial\psi}{\partial y} \right) dx dy.$$

Die *Torsionsfunktion* $\psi(x, y)$ muss im Querschnitt harmonisch bleiben und am Rande den Wert $\frac{1}{2}(x^2 + y^2)$ annehmen.

Wird der Stab, statt dessen, durch eine der x -Achse parallele

Kraft Q auf *Biegung* beansprucht, dann haben wir für die Komponenten der Schubspannung folgende Formeln:

$$X_z = \mu\tau_1 \left(\frac{\partial\psi}{\partial y} - y \right) - \frac{Q}{2(1+\sigma)J} \left\{ \frac{\partial\chi}{\partial x} + \frac{1}{2} \sigma x^2 + \left(1 - \frac{1}{2} \sigma \right) y^2 \right\},$$

$$Y_z = \mu\tau_1 \left(-\frac{\partial\psi}{\partial x} + x \right) - \frac{Q}{2(1+\sigma)J} \left\{ \frac{\partial\chi}{\partial y} + (2+\sigma)xy \right\}.$$

Hier bezeichnet σ das *Poissonsche* Querkürzungsverhältnis, J das Trägheitsmoment der Querschnittsfläche bezogen auf die y -Achse und $\chi(x, y)$ die *Biegungsfunktion*, die im Querschnitt harmonisch bleibt und deren Normalenableitung am Rande den Wert

$$\frac{\partial\chi}{\partial\nu} = - \left\{ \frac{1}{2} \sigma x^2 + \left(1 - \frac{1}{2} \sigma \right) y^2 \right\} \cos(x, \nu) - (2 + \sigma) xy \cos(y, \nu)$$

annimmt. Die Konstante τ_1 wird durch die Gleichung bestimm

$$\begin{aligned} \frac{Q}{2(1+\sigma)J} \iint \left\{ y \frac{\partial\chi}{\partial x} - x \frac{\partial\chi}{\partial y} + \left(1 - \frac{1}{2} \sigma \right) y^3 - \left(2 + \frac{1}{2} \sigma \right) x^2 y \right\} dx dy = \\ = \mu\tau_1 \iint \left(x^2 + y^2 - x \frac{\partial\psi}{\partial x} - y \frac{\partial\psi}{\partial y} \right) dx dy. \end{aligned}$$

Für die in Bezug auf die x -Achse symmetrischen Querschnitte wird $\tau_1 = 0$.

Die Funktionen ψ und χ wurden von *St. Venant* und von anderen Forschern für mehrere Querschnittsformen bestimmt, darunter für Kreis, Rechteck, Dreieck, Kreisring u.a.; diese sind so weit entfernt von den üblichen Querschnittsformen der modernen dünnwändigen Träger, dass selbst von einer groben Annäherung kaum die Rede sein kann. Der Mangel an solchen Lösungen hat die Technik gezwungen sich eine auf der hydrodynamischen Analogie aufgebaute Schätzungsmethode¹⁾ der Torsionsbeanspruchung zu verschaffen, dagegen hat man für die Biegungsbeanspruchung s. g. „technische“ Theorien entwickelt, u. zw. auf Grund willkürlicher Voraussetzungen²⁾, die weder mit den Grundglei-

¹⁾ Wie es z. B. A. u. L. *Föppl* und *J. Prescott* tun.

²⁾ Wie die bekannten Annahmen von *Jouravsky*, *Rankine* oder *Grashof*.

chungen der Elastizitätslehre, noch mit den Experimenten übereinstimmen.

Bei einer Untersuchung der Biegung rechteckiger Platten benutzt *A. E. H. Love*³⁾ für die konforme Abbildung eines von Geraden $x = \pm a$, $y = \pm b$ begrenzten rechteckigen Gebietes der $z (\equiv x + iy)$ Ebene auf den Einheitskreis der $\zeta (\equiv \varrho e^{i\vartheta})$ Ebene folgende Formel

$$z = -i(2a/K) \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1)^{-1} P_n(\cos 2\alpha) \zeta^{2n+1},$$

wo α den spitzen Winkel bezeichnet, dessen Sinus ($\sin \alpha \equiv k$) der Modul der *Jakobischen* elliptischen Funktion $\operatorname{sn} u$ ist, deren reelle und imaginäre Perioden $4K$ und $2iK'$ in der Beziehung stehen: $K'/K = b/a$, so dass α nur vom Verhältnis der Seitenlängen des Rechtecks abhängt; P_n bezeichnet die *Legendreschen* Koeffizienten. Diese Formel hat Anlass zu nachstehender Lösung gegeben, die, anscheinend, ein klares Bild des Spannungszustandes in dünnwandigen Trägern ergibt.

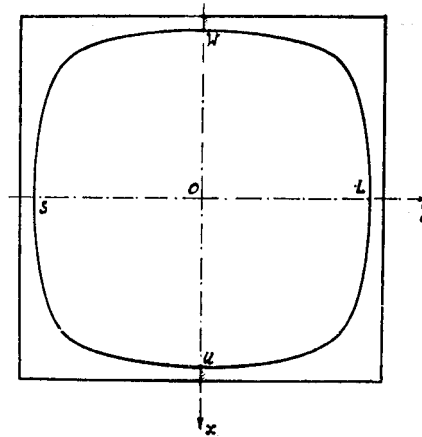


Fig. 1.

Nehmen wir $a = b$, dann wird $\alpha = 1/4\pi$, $K = 1,8541$ und alle Koeffizienten der Reihe mit ungeraden n verschwinden:

$$z = -i \frac{2a}{K} \left(\zeta - \frac{1}{10} \zeta^5 + \frac{1}{24} \zeta^9 - \frac{5}{208} \zeta^{13} + \frac{35}{2176} \zeta^{17} - \frac{3}{256} \zeta^{21} + \frac{231}{25600} \zeta^{25} - \dots \right).$$

Auf der Fig. 1 ist das Quadrat ($|\varrho| = 1$) und die Abbildung des

³⁾ *London, Math. Soc. Journ., Vol. 3 (1928).*

Kreises $|\varrho| = 0,9$ (Linie *WLUS*) aufgetragen. Wir betrachten diese zwei Linien als Begrenzung des Querschnitts eines kastenförmigen Trägers und suchen dafür die Funktionen ψ und χ zu bestimmen.

Bezeichnen wir mit z^* die konjugierte Zahl ($\equiv x-iy$) so kann der Randwert der Funktion in folgender Form dargestellt werden:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(x^2+y^2) = \frac{1}{2}z z^* = (2a/K)^2 \{ & \frac{1}{2}(\varrho^2 + 0,010 \varrho^{10} + 0,002 \varrho^{18} + \\ & + 0,001 \varrho^{26} + \dots) - (0,100 \varrho^6 + 0,004 \varrho^{14} + 0,001 \varrho^{22} + \dots) \cos 4\varphi + \\ & + (0,042 \varrho^{10} + 0,002 \varrho^{18} + 0,001 \varrho^{26} + \dots) \cos 8\varphi - \\ & - (0,024 \varrho^{14} + 0,002 \varrho^{22} + \dots) \cos 12\varphi + \\ & + (0,016 \varrho^{18} + 0,001 \varrho^{26} + \dots) \cos 16\varphi - \\ & - (0,012 \varrho^{22} + 0,001 \varrho^{30} + \dots) \cos 20\varphi + \\ & + (0,009 \varrho^{26} + 0,001 \varrho^{34} + \dots) \cos 24\varphi - \dots \}. \end{aligned}$$

Demzufolge muss die Funktion ψ folgende Form haben:

$$\begin{aligned} \psi = (2a/K)^2 \{ & A + B \lg \varrho + (C_4 \varrho^4 + D_4 \varrho^{-4}) \cos 4\varphi + \\ & + (C_8 \varrho^8 + D_8 \varrho^{-8}) \cos 8\varphi + \dots \}, \end{aligned}$$

wo jedes Glied harmonisch ist. Bei $|\varrho| = 1$ und bei $|\varrho| = 0,9$ muss die Funktion den oben angegebenen Wert, nämlich $\frac{1}{2}z \cdot z^*$ annehmen. Daraus bestimmen sich sofort die Koeffizienten A, B, C_4, D_4, \dots und die gesuchte Funktion wird

$$\begin{aligned} \psi = (2a/K)^2 \{ & 0,51 + 0,95 \lg \varrho - (0,12 \varrho^4 - 0,02 \varrho^{-4}) \cos 4\varphi + \\ & + 0,04 \varrho^8 \cos 8\varphi - 0,03 \varrho^{12} \cos 12\varphi + 0,02 \varrho^{16} \cos 16\varphi - \\ & - 0,01 \varrho^{20} \cos 20\varphi + \dots \}. \end{aligned}$$

Im Allgemeinen, für den durch Quadrat und die Abbildung des Kreises $|\varrho| = \lambda$ begrenzten Querschnitt hat man

$$A = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)^2}{2^n \cdot n! (4n+1)} \right]^2;$$

$$\begin{aligned}
 B &= -\frac{1}{2 \lg a} \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{2^n \cdot n! (4n+1)} \right]^2 (1 - \lambda^{8n+2}); \\
 C_{4k} &= \frac{(-)^k}{2^k (1 - \lambda^{8k})} \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{2^n \cdot n!} \right]^2 \times \\
 &\quad \times \frac{(2n+1)(2n+3) \dots (2n+2k-1)}{(n+1)(n+2) \dots (n+k)(4n+1)(4n+4k+1)} (1 - \lambda^{8n+8k+2}); \\
 D_{4k} &= \frac{(-)^{k+1} \lambda^{8k}}{2^k (1 - \lambda^{8k})} \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{2^n \cdot n!} \right]^2 \times \\
 &\quad \times \frac{(2n+1)(2n+3) \dots (2n+2k-1)}{(n+1)(n+2) \dots (n+k)(4n+1)(4n+4k+1)} (1 - \lambda^{8n+2})
 \end{aligned}$$

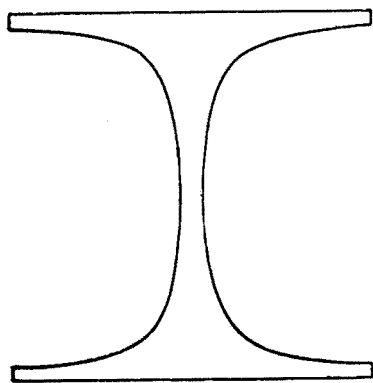


Fig. 2.

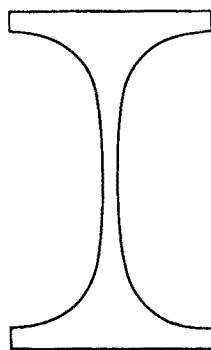


Fig. 3.

In ähnlicher Weise kann man auch die Biegungsfunktion χ finden. Dabei bemerkt man, dass im Falle der Biegungsbeanspruchung die Spannungskomponente Y_z für $y=0$ verschwindet d. h. dieselbe Funktion gilt auch für die durch die xoz Fläche abgetrennte Hälfte des Querschnitts WLU , wie auch für den aus zwei solchen Hälften zusammengesetzten Querschnitt, der sich einem breitflanschigen $\bar{\text{I}}$ -Eisen nähert (Fig. 2). Durch eine andere Auswahl des Verhältnisses a/b , z. B. bei $\alpha = 70^\circ$ (Fig. 3), kann man eine noch bessere Annäherung an das $\bar{\text{I}}$ -Eisen erreichen.

Belgrad, am. 31 März 1935.