Eine neue Form der Gruppenpostulate und eine Erweiterung des Gruppenbegriffes.

Von

ANTON VAKSELJ

1. Der Begriff der abstrakten Gruppe wird festgelegt durch vier Postulate, die in der Moore-Dicksonschen Formulierung[1]) ihre bis jetzt schärfste Fassung erhalten haben. Damit die Elemente $A, B, C\dots$ eine Gruppe bilden, verlangt das erste Postulat, dass die Komposition AB ausführbar und unter den $A, B, C, \dots$ enthalten sei, während das zweite die assoziative Eigenschaft der Komposition postuliert. Das dritte lautet wörtlich:

(III). In $\mathfrak{G}$ gibt es wenigstens ein Element J, so dass für jedes Element A in $\mathfrak{G}$ die Gleichung $AJ=A$ gilt. (J heisst rechtshändiges Einheitselement).

Und das vierte ebenso:

(IV). Existieren Elemente J, so soll für ein besonderes J und für jedes A die Gleichung $AX=J$ durch ein Element von $\mathfrak{G}$ lösbar sein.

Das dritte Postulat verlangt also nicht nur, dass jedes Element ein rechtsseitiges Einheitselement besitze, sondern auch, dass dieses Einheitselement für alle Elemente der Gruppe dasselbe sei. Lässt man die letzte Forderung fallen und verlangt nur noch, dass jedes Element ein rechts- oder linksseitiges Einheitselement besitze, so ergibt sich dann von selbst die Notwendigkeit, durch eine fünfte Forderung festzustellen, dass auf jeder Seite eines jeden Elementes der Gruppe höchstens ein Einheitselement vorhanden ist. Die neue Form des dritten Postulates lautet:

---

1) Vgl. Pascals Repertorium, II Aufl. 1910: I. 1. S. 173.

III. *In $\mathfrak{G}$ gibt es zu jedem Element A ein Element a, so dass eine der beiden Gleichungen $Aa=A$ oder $aA=A$ erfüllt ist.* (Dabei ist a das dem Elemente A zugeordnete rechts-beziehungsweise linksseitige Einheitselement.)

Das vierte Postulat wollen wir so enge wie möglich fassen. Es soll bloss aussagen, dass zu jedem Elemente auf der einen oder auf der anderen Seite ein inverses gehöre, also:

IV. *Für ein besonderes rechtsseitiges oder linksseitiges Einheitselement a von A soll eine der beiden Gleichungen $AX=a$ oder $XA=a$ durch ein Element X von $\mathfrak{G}$ lösbar sein.*

Vorübergehend wollen wir X mit A' bezeichnen und das zu A in bezug auf das Einheitselement a gehörige rechts- oder linksseitige inverse Element nennen.

Nach der obigen Bemerkung haben wir noch zu fordern:

V. *Jedes Element A besitzt in $\mathfrak{G}$ höchstens ein rechtsseitiges und höchstens ein linksseitiges Einheitselement.*

Die Postulate III., IV. und V. enthalten jetzt nur noch Forderungen, die sich auf einzelne Elemente beziehen, während frühere Formulierungen alle Elemente der Gruppe zugleich betreffen.

2. Die endgültige Definition der Gruppe wird gegeben durch folgende Sätze, die man mit Leichtigkeit aus den Postulaten beweist:

Satz 1. *Jedes Element besitzt ein linksseitiges Einheitselement a_l und ein rechtsseitiges a_r. Diese sind einander gleich:*

$$a_lA=Aa_r=A; \qquad a_l=a_r=a.$$

Das Element a heisst das Einheitselement von A.

Satz 2. *Jedes Element A besitzt ein linksseitiges inverses Element A_l und ein rechtsseitiges A_r. Diese sind einander gleich:*

$$A_lA=AA_r=a; \qquad A_l=A_r=A^{-1}.$$

Das Element A^{-1} heisst das inverse Element von A; ausser A^{-1} besitzt A kein inverses Element mehr.

S a t z 3. *Die Einheitselemente irgend zweier Elemente von $\mathfrak{G}$ sind einander gleich.*

In der Tat:

Aus den Postulaten III. und IV. folgt, dass jedes Element A mindestens ein Einheitselement a und in bezug auf dieses ein inverses Element A' besitze. Aus V. folgt aber weiter, dass $a\,a = a$ ist, den $a\,a$ ist ein weiteres Einheitselement von A. Nun müssen wir die beiden Fälle unterscheiden, dass a und A' auf derselben Seite von A stehen oder auf verschiedenen.

Nehmen wir im ersten Falle an, beide a und A' seien rechtsseitig:

$$Aa = A\,, \qquad AA' = a.$$

Statt A' darf man $A_1 = aA'a$ als rechtes inverses Element von A wählen, denn es ist:

$$AA_1 = A(aA'a) = (Aa)\,A'a = (AA')\,a = aa = a.$$

Das Element A_1 hat als beiderseitiges Einheitselement a:

$$(1) \qquad A_1a = aA_1 = A_1\,.$$

Setzen wir $A_1A = a'$, so ist a' das linksseitige Einheitselement von A_1:

$$a'A_1 = A_1AA_1 = A_1a = A_1$$

und endlich nach V. $a' = a$.

Aus

$$(2) \qquad AA_1 = A_1A = a$$

folgt jetzt leicht:

$$(3) \qquad AA_1A = aA = Aa = A$$

woraus für diesen Fall der erste Satz folgt. Zugleich ist in (2) der erste Teil des zweiten Satzes enthalten, wir zeigen noch, dass A_1 das einzige inverse Element von A ist. Gäbe es ein weiteres A_2 mit $AA_2 = a$, so würde aus (2) folgen:

$$aA_2 = A_1AA_2 = A_1a = A_1$$

und daraus nach rechtsseitiger Multiplikation mit A, dass $A_2A = a$ wäre. Die beiden letzterwähnten Gleichungen zeigen, dass für A nur a als Einheitselement in Betracht käme. Dann muss aber wegen

$$A_2AA_2 = A_2a = aA_2 = A_2$$

$A_2 = A_1$ sein.

Den zweiten Fall, in dem dass Einheitselement a von A etwa rechtsseitig sei, dann aber das inverse Element A' von A linksseitig, führen wir dadurch auf den ersten Fall zurück, dass wir die Existenz eines rechtsseitigen inversen Elementes A_1 beweisên. Wir nehmen also an:

$$Aa = A \qquad \text{und} \qquad A'A = a$$

und setzen

$$AA' = a', \tag{4}$$

so ist

$$a'a' = AA'\,AA' = A(A'A)\,A' = AaA' = AA' = a'.$$

Wir bilden das Element $a'a$ mit dem rechtsseitigen Einheitselement a und dem linksseitigen a'. Das Element $a'a$ besitzt weiter das inverse Element x, das zur Einheit a gehören soll. Dann ist nach IV. entweder

$$(a'a)x = a \qquad \text{oder} \qquad x(a'a) = a. \tag{5}$$

Im ersten Falle ist a' auch linksseitiges Einheitselement von a und folglich $a' = a$. Im Falle der zweiten der Gleichungen (5) schreiben wir $(xa')a = a$, so dass $xa' = a$ ist. Dieses Element besitzt als rechtsseitige Einheitselemente a' und a, also ist wiederum $a' = a$. Die Gleichung (4) lautet jetzt $AA' = a$, womit der zweite Fall auf den ersten zurückgeführt ist.

3. Der Beweis des dritten Satzes folgt nunmehr leicht. Besitzen die verschiedenen Elemente A und B beziehungsweise die Einheitselemente a und b, so bekommen wir aus

$$aA = A \qquad \text{und} \qquad Bb = B$$

sofort

$$a(AB) = (AB) \qquad \text{und} \qquad (AB)b = (AB),$$

also nach dem ersten Satze und V. auch $b = a$.

4. Aus den obigen Ausführungen ergibt sich genügend die grosse Bedeutung des Postulates V. Lässt man V. ganz oder teilweise fallen, während die übrigen Postulate ungeändert bleiben, so definiert man einen mathematischen Begriff, der die Gruppen als Spezialfall enthält. Die nächstliegende Erweiterung von V. ist aber folgendes Postulat:

V*. *Jedes Element A besitzt in $\mathfrak{G}$ höchstens eine vorgegebene Anzahl rechtsseitiger oder linksseitiger Einheitselemente.*

Für diese Gruppenerweiterung beweisen wir nun folgenden fundamentalen Satz:

Satz 4. *Die gruppenartigen Gebilde, welche den Postulaten I, II, III, IV und V* genügen, besitzen gewöhnliche Gruppen als Untergruppen.*

Dieser Satz folgt aber ohne weiteres aus der folgenden Eigenschaft der Elemente von $\mathfrak{G}$:

Satz 5. *Jedem Elemente A aus $\mathfrak{G}$ kann man ein „assoziiertes" $A_1 = a_1 A = A a_r$, mit $a_1^2 = a_1$, $a_r^2 = a_r$, zuordnen, welches eine gewöhnliche zyklische Gruppe mit dem Einheitselemente a erzeugt. Ihre Ordnung ist grösser als 1, wenn A nicht den folgenden Gleichungen genügt: $a_1 A a_1 = a_1$, $a_r A a_r = a_r$. Besitzt A das Einheitselement und das inverse Element auf derselben Seite, so* *ist einfacher* $a_l = a_r = a$ *und die abgeleitete zyklische Gruppe besteht nur aus dem Einheitselemente, wenn* $aA = Aa = a$ *ist.*

5. Beim Beweise des letzten Satzes müssen wir wiederum die beiden Fälle unterscheiden, ob das Einheitselement a_1 und das inverse Element A' auf derselben Seite von A stehen oder auf verschiedenen. Im ersten Falle ist:

$$Aa_1 = A, \qquad AA' = a_1. \tag{6}$$

Nun ist eine beliebige Potenz a_1^n ein weiteres Einheitselement von A, für welches ein inverses Element von A existiert In der Tat ist

$$Aa_1^n = A, \qquad A\,(A'\,a^{n-1}) = a^n\,.$$

Da es nach V* nur eine endliche Anzahl rechtsseitiger Einheitselemente gibt, genügt a_1 einer Relation der Form:

$$a_1^{m+k} = a_1^k\,,$$

wo m und k zwei natürliche Zahlen bedeuten. Allgemein gilt:

$$a_1^{rm+k+\lambda} = a_1^{k+\lambda}\,.$$

Bestimmen wir r derart, dass $\lambda = rm - k$ positiv ausfällt und setzen diesen Wert von λ in die letzte Gleichung, so erhalten wir:

$$a_1^{2rm} = a_1^{rm}\,.$$

Das Einheitselement $\alpha = a_1^{rm}$ genügt also der Gleichung $\alpha^2 = \alpha$ und wir wollen das schon von a_1 in (6) verlangen.

Das Element $A'_1 = a_1 A' a_1$, besitzt a_1 als beiderseitiges Einheitselement und ist ebenfalls ein inverses Element von A:

$$AA'_1 = a_1.$$

Führen wir nun $a_2 = A'_1 A$ ein, so kommen dem Elemente a_2 folgende leicht zu beweisende Eigenschaften zu:

$$a_2^2 = a_2\,, \tag{7}$$

$$a_1 a_2 = a_2 a_1 = a_2, \tag{8}$$

$$A a_2 = a_1 A. \tag{9}$$

Das Element $A'_2 = a_2 A'_1 a_2$ besitzt die beiderseitigen Einheitselemente a_1, a_2 und genügt der Gleichung $AA'_2 = a_2$, denn es ist:

$$AA'_2 = (Aa_2)\, A'_1\, a_2 = a_1\, (AA'_1)\, a_2 = a_1^2 a_2 = a_2.$$

Wiederholen wir für $a_3 = A'_2 A$ die letzten Rechnungen und fahren wir ähnlich fort, so erhalten wir eine Folge in $\mathfrak{G}$ vorkommender Elemente $a_1, a_2, \ldots, a_k$, welche folgenden Beziehungen genügen:

$$a_i a_j = a_j a_i = a_j\,, \qquad i \leqslant j \leqslant k, \tag{10}$$

$$A a_j = a_{j-1} A. \tag{11}$$

Das Element $A'_k = a_k A'_{k-1} a_k$ besitzt nach (10) $a_1, \ldots, a_k$ als beiderseitige Einheitselemente und erfüllt die Gleichung:

$$AA'_k = a_k\,. \tag{12}$$

Um dies alles zu beweisen, wenden wir den Schluss von k auf $k+1$ an, da für $k=2$ dies schon in (7), (8), (9) geschehen ist. Setzen wir in der Tat $a_{k+1} = A'_k A$, so ist zunächst:

$$a_{k+1}^2 = A'_k A A'_k A = A'_k a_k A = A'_k A = a_{k+1}\,.$$

Aus (10) und (11) folgt weiter:

$$a_k a_{k+1} = a_k A'_k A = A'_k A = a_{k+1}$$

und

$$a_{k+1} a_k = A'_k A a_k = A'_k a_{k-1} A = A'_k A = a_{k+1},$$

womit die Beziehungen (10) allgemein für alle i und j mit $i \leqslant j \leqslant k+1$ bewiesen sind. Endlich gilt die Gleichung (11) auch für $j = k+1$:

$$A a_{k+1} = A A'_k A = a_k A.$$

Das Element $A'_{k+1} = a_{k+1} A'_k a_{k+1}$ besitzt $k+1$ Einheitselemente und genügt der Gleichung:

$$A A'_{k+1} = a_{k+1},$$

also der Gleichung (12), wo der Index den Wert $k+1$ annimmt.

Wählt man nun k hinreichend gross, so muss a_{k+1} nach V* einem Elemente a_s der Folge $a_1, \ldots, a_k$ gleich werden: $s \leqslant k$. Dann ist wegen (10):

$$a_{k+1} a_k = a_k a_{k+1} = a_{k+1}$$

oder wegen $a_{k+1} = a_s$:

$$a_s a_k = a_k a_s = a_s$$

und ebenso, da $s \leqslant k$;

$$a_s a_k = a_k a_s = a_k$$

und somit $a_{k+1} = a_k = a$. Es ist also:

$$AA'_k = a, \qquad A'_k A = a.$$

Aus (11) folgt für $j = k+1$ noch:

$$Aa = aA.$$

Das Element $A_1 = Aa = aA$ besitzt offenbar a als Einheitselement und $A_1^{-1} = A'_k$ als inverses Element:

$$aA_1 = A_1 a = A_1\,, \qquad a\,A_1^{-1} = A_1^{-1}\,a = A_1^{-1}\,,$$

$$A_1 A_1^{-1} = A_1^{-1} A_1 = a.$$

Damit ist aber der Satz 5. im ersten Falle vollkommen bewiesen.

6. Nun wollen wir noch den zweiten Fall erledigen. Es sei B ein beliebiges Element aus $\mathfrak{G}$, b ein rechtsseitiges Einheitselement und B' ein linksseitiges inverses Element:

$$Bb = B, \qquad B'B = b.$$

Es ist $b^2 = b$ und ebenso ersieht man ohne Mühe, dass b ein linksseitiges Einheitselement von B' sein kann. Setzen wir $b' = BB'$, so ist b' auf der entgegengesetzten Seite wie bei b Einheitselement von B beziehungsweise B':

$$b'B = B, \qquad B'b' = B'.$$

Wie oben zeigt man, dass $(b')^2 = b'$ ist. In unseren Betrachtungen können wir uns also auf den Fall beschränken, im welchen für das gegebene Element B die folgenden Gleichungen gelten:

$$Bb_1 = B, \qquad B'_1 B = b_1, \qquad b_1^2 = b_1.$$

Setzen wir $b'_1 = BB'_1$, mit $b'_1\, b'_1 = b'_1$, so sind für das Element

$b_1 b'_1$ zwei Fälle möglich. Gehört es dem ersten oben vollständig erledigten Falle an, so folgt schon aus den Ausführungen am Anfange des § 5., dass es ein Element x_1 und die Einheitselemente e_1, e'_1 gibt, für welche folgende Bedingungen erfüllt sind:

$$(b_1 b'_1) x_1 = e_1, \qquad e_1 e_1 = e_1;$$
$$x_1 (b_1 b'_1) = e'_1, \qquad e'_1 e'_1 = e'_1.$$

Gehört aber $(b_1 b'_1)$ dem zweiten erst hier betrachteten Falle an, so folgen die letzten Beziehungen aus dem am Anfange dieses Paragraphen Gesagten.

Die Elemente e_1 und e'_1 besitzen noch folgende weitere Eigenschaften:

$$b_1 e_1 = e_1, \qquad e'_1 b'_1 = e'_1.$$

Wir setzen nun $e_1 b_1 = b_2$, $b'_1 e'_1 = b''_2$ und bestätigen ohne Mühe die Richtigkeit der Gleichungen:

$$b_1 b_2 = b_2 b_1 = b_2, \qquad b_2 b_2 = b_2, \qquad b_2 e_1 = e_1;$$
$$b'_1 b''_2 = b''_2 b'_1 = b''_2, \quad b''_2 b''_2 = b''_2, \quad e'_1 b''_2 = e'_1.$$

Endlich führen wir noch das Element $B'_2 = e_1 B'_1$ ein Dann ist:

$$B'_2 B = e_1 B'_1 B = e_1 b_1 = b_2$$
$$b_2 B'_2 = b_2 e_1 B'_1 = e_1 B'_1 = B'_2.$$

Das Element B'_2 hat also auf der linken Seite die Einheitselemente b_1 und b_2.

Setzen wir jetzt $b'_2 = B B'_2$, so können wir auch für b'_2 folgende Eigenschaften beweisen:

$$b'_2 b'_2 = b'_2$$

und

$$b'_1 b'_2 = b'_2 b'_1 = b'_2.$$

Die letzten Gleichungen sind selbstverständlich, wenn man $b'_2 = B e_1 B'_1$ berücksichtigt. Nun ist

$$b'_2 B = B B'_2 B = B b_2$$

und

$$B'_2 b'_2 = B'_2 B B'_2 = b_2 B'_2 = B'_2.$$

Das Element B'_2 hat b'_1 und b'_2 als rechtsseitige Einheits elemente.

Wiederholen wir an b_2, b'_2 die obigen Ausführungen und leiten davon x_2, e_2, e'_2, b_3, b''_3, b'_3 ab und so weiter, so können wir folgende Folgen definieren:

$$\begin{array}{llll} b_1,\ b_2, \ldots, & b_k, \ldots; & e_1,\ e_2, \ldots, & e_k, \ldots; \\ b''_1,\ b''_2, \ldots, & b''_k, \ldots; & e'_1,\ e'_2, \ldots, & e'_k, \ldots; \\ b'_1,\ b'_2, \ldots, & b'_k, \ldots; & x_1,\ x_2, \ldots, & x_k, \ldots. \end{array}$$

Für diese Elemente gelten nun folgende Gleichungen:

$$(13) \qquad \begin{array}{ll} (b_k b'_k) x_k = e_k, & e_k e_k = e_k \\ x_k (b_k b'_k) = e'_k, & e'_k e'_k = e' \end{array}$$

$$(14) \qquad \begin{array}{ll} b_k e_k = e_k, & e'_k b'_k = e'_k \\ e_k b_k = b_{k+1}, & b'_k e'_k = b''_{k+1}. \end{array}$$

Mit Hilfe dieser Gleichungen kann man ohne Mühe die folgenden Beziehungen beweisen:

$$(15) \qquad \begin{array}{l} b_k b_{k+1} = b_{k+1} b_k = b_{k+1},\ b_{k+1} b_{k+1} = b_{k+1},\ b_{k+1} e_k = e_k \\ b' \ b''_{k+1} = b''_{k+1} b'_k = b''_{k+1},\ b''_{k+1} b''_{k+1} = b''_{k+1},\ e'_k b''_{k+1} = e'_k. \end{array}$$

Wenden wir den Schluss von k auf $k+1$ an und berücksichtigen wir die erste Reihe von (15), so erkennen wir, dass die folgenden Gleichungen für beliebiges k erfüllt sind:

$$(16)\qquad \begin{aligned} &b_i b_j = b_j b_i = b_j\,, && i \leqslant j \leqslant k\,; \\ &b_j e_k = e_k\,, && j \leqslant k+1\,. \end{aligned}$$

Führen wir nun das Element $B'_k = e_{k-1} B'_{k-1}$ ein, so können wir wie oben die allgemeine Gültigkeit der Gleichung $B'_k B = b_k$ beweisen. Die linksseitigen Einheitselemente von B'_k sind $b_1, \ldots, b_k$. Setzen wir jetzt $b'_k = BB'_k$, so ist $b'_k b'_k = b'_k$ und b'_k ist allgemein bei allen Werten von k ein rechtsseitiges Einheitselement von B'_k;

$$(17)\qquad B'_k b'_k = B'_k B B'_k = b_k B'_k = B'$$

Dann folgt aber weiter:

$$(18)\qquad b'_k b'_{k-1} = B(e_{k-1} B'_{k-1}) b'_{k-1} = B e_{k-1} B'_{k-1} = b'_k\,.$$

Ebenso gilt für alle Werte von k die folgende Beziehung:

$$(19)\qquad b'_k B = BB'_k B = Bb_k$$

und somit

$$(20)\qquad b'_{k-1} b'_k = b'_{k-1} B B'_k = Bb_{k-1} B'_k = BB'_k = b'_k.$$

Die Gleichungen (17) und (20) ergeben also allgemein für beliebiges k:

$$(21)\qquad \begin{aligned} &b'_i b'_j = b'_j b'_i = b'_j\,, && i \leqslant j \leqslant k \\ &e'_k b'_i = e'_k\,, && i \leqslant k\,. \end{aligned}$$

Das Element B'_k hat also $b'_1, b'_2, \ldots, b'_k$ als rechtsseitige Einheitselemente. Aus (21) und der zweiten Reihe von (15) folgt aber dann wiederum allgemein:

$$(22) \qquad b'_i b''_k = b''_k b'_i = b''_k, \quad i < k .$$

Das Element b''_{k+1} besitzt so als beiderseitige Einheitselemente $b'_1, \ldots, b'_k$ und b''_{k+1}.

Nun folgt aus der Gleichheit zweier aufeinanderfolgender Einheitselemente b_i: $b_{k+1} = b_k$ auch die Gleichheit der entsprechenden Elemente b'_i: $b'_{k+1} = b'_k$.

In der Tat folgt dann nach (14) $e_k b_k = b_k$ und somit

$$B'_{k+1} = e_k B'_k = e_k(b_k B'_k) = b_k B'_k = B'_k ,$$

also

$$b'_{k+1} = BB'_{k+1} = BB'_k = b'_k .$$

Die Elemente B'_{k+1} und b''_{k+1} besitzen als linksseitige Einheitselemente die $k+1$ Elemente $b_1, \ldots, b_{k+1}$ beziehungsweise $b'_1, \ldots, b'_k, b''_{k+1}$. Nehmen wir k hinreichend gross so muss nach dem Postulat V* nicht nur b_{k+1} ein Einheitselement der Folge $b_1, b_2, \ldots, b_k$, etwa b_r, sein, sondern auch b''_{k+1} ein Einheitselement der Folge $b'_1, b'_2, \ldots, b'_k$, zum Beispiel b'_s:

$$(23) \qquad \begin{aligned} b_{k+1} &= b_r, \qquad r \leqslant k, \\ b''_{k+1} &= b'_s, \qquad s \leqslant k. \end{aligned}$$

Es könnte wohl noch vorkommen, dass $b_{k+1} = b_k$ werde, ohne dass auch die zweite Gleichung erfüllt sei. In diesem Falle brauchen wir nur dieses Verfahren umzukehren. Wir nehmen dann $b'_{k+1} = b''_{k+1}$, definieren zuerst $B'_{k+1} = B'_k e'_k$ und daraus:

$$\overline{b}_{k+1} = B'_{k+1} B.$$

An der neuen Seite rechnen wir so lange weiter bis die zweite Gleichung von (23) erfüllt ist oder bis wir auf ein $\overline{b}_{k+i}$ stossen das von b_k verschieden ist.

Die erste Reihe von (15) gibt dann:

$$b_k b_r = b_r b_k = b_r,$$

während nach (16), da $r \leqslant k$, die Gleichungen:

$$b_k b_r = b_r b_k = b_k$$

bestehen. Also muss $b_{k+1} = b_k$ sein. Dann ist aber nach der obigen Bemerkung $b'_{k+1} = b'_k$.

Die Gleichungen (14) geben dann:

$$\begin{aligned} &(24) \qquad & e_k b_k &= b_k, \\ & & b'_k e'_k &= b'_s. \end{aligned}$$

Multiplizieren wir die letzte Gleichung rechts mit b'_k und berücksichtigen die zweite Zeile von (21), so gilt auch:

$$b'_k e'_k = b'_k.$$

Multiplizieren wir noch die aus (13) folgenden Gleichungen:

$$(b_k b'_k) x_k = e_k, \qquad x_k (b_k b'_k) = e'_k$$

rechts mit b_k beziehungsweise links mit b'_k, so erhalten wir:

$$b_k(b'_k x_k b) = b_k, \qquad (b'_k x_k b_k) b'_k = b'_k. \tag{25}$$

Das Element $b = b'_k x_k b_k$ hat nun bemerkenswerte Eigenschaften. Aus der Definition beziehungsweise aus (25) folgen nun folgende Beziehungen:

$$\begin{aligned} b\, b_k &= b, & b'_k\, b &= b, \\ b\ \ b &= b_k, & b\, b'_k &= b'_k. \end{aligned} \tag{26}$$

Dann ist

$$b^2 = b\,(b_k\, b)\, b_k = b\, b_k^2 = b.$$

Das nach (19) definierte Element:

$$B_1 = b'_k\, B = B\, b_k$$

hat also b als beiderseitiges Einheitselement. Zu B_1 dürfen wir als inverses Element:

$$B_1^{-1} = b\, B'_k\, b$$

wählen, welches ebenfalls b als beiderseitiges Einheitselement aufweist. In der Tat ist:

$$B_1\, B_1^{-1} = B\,(b_k\, b)\, B'_k\, b = B\, B'_k\, b = b'_k\, b = b,$$

$$B_1^{-1}\, B_1 = b\, B'_k\,(b\, b'_k)\, B = b\, B'_k\, B = b\, b_k = b.$$

Das Element B_1 erzeugt also wohl eine gewöhnliche zyklische Gruppe. Die Gruppe besteht nun aus dem Einheitselement b, wenn

$$b'_k\, B = B\, b_k = b$$

oder nach (26):

$$b'_k B b' = b'_k, \qquad b_k B b_k = b$$

ist.

7 Nun kann es in der Tat vorkommen, dass die oben definierten gruppenartigen Gebilde nur solche gewöhnliche Gruppen enthalten, welche nur aus dem Einheitselemente bestehen. Um dafür ein für sich selbst bemerkenswertes Beispiel zu geben, nehmen wir die Menge der Mächtigkeiten (Kardinalzahlen) transfiniter wohlgeordneter Mengen, die bekanntlich mit den Buchstaben $\aleph$ (Alef) bezeichnet werden[2]):

$$\aleph_1,\ \aleph_2, \ldots,\ \aleph_n, \ldots,\ \aleph_\omega, \ldots \tag{27}$$

Eine endliche Menge dieser Kardinalzahlen bildet nach der Addition oder Multiplikation eine erweiterte Gruppe der eben beschriebenen Art:

$$\aleph_\mu \leqslant \aleph_\nu,\quad \aleph_\mu \aleph_\mu = \aleph_\mu,\quad \aleph_\nu \aleph_\nu = \aleph_\nu,$$
$$\aleph_\mu \aleph_\nu = \aleph_\nu \aleph_\mu = \aleph_\nu .$$

Die unendliche Menge aller Kardinalzahlen (27) bildet hingegen eine Gruppenerweiterung, die nur den Postulaten I — IV genügt.

Damit ist nebenbei für *die Verknüpfungen der unendlichen Kardinalzahlen eine vom Begriffe der unendlichen Menge unabhängige aksiomatische Grundlage gefunden worden.*

8. Die in dieser Arbeit dargelegte Gruppenerweiterung wurde für endliche Gruppen und auf ganz andere Weise vom Herrn A. Schuschkewitsch[3]) gegeben und weitgehenkst unter-

---

[2]) Vgl. etwa: E. Pascals Repertorium, I. 1. S. 25.

[3]) A. Schuschkewitsch: Über die endlichen Gruppen ohne das Gesetz der eindeutigen Umkehrbarkeit. Math. Ann. Bd. 99. (1928).
" " Untersuchungen über verallgemeinerte Substitutionen. Atti del Congresso int. dei matematici 1928 a Bologna, Bd. II. S. 147.

sucht. In seinen verallgemmeinerten Substitutionen finden wir ein unentbehrliches Mittel zur Darstellung solcher Gruppen. Es ist leicht einzusehen, dass die von Herrn Schuschkewitsch eingeführte Kerngruppe den Postulaten I—IV, V*, genügt. Die allgemeinste Gruppenerweiterung des Herrn Schuschkewitsch genügt wohl den Postulaten I, II und V*, hebt aber für einzelne Elemente die Postulate III und IV auf. Die Gruppenerweiterungen der Herren A. Loewy [4]) und H. Brandt [5]) dagegen ziehen noch das Postulat I in Mitleidenschaft, wodurch wohl die Gleichmässigkeit aller Elemente der Gruppe verloren geht.

---

[4]) A. Loewy: Über abstrakt definierte Transmutationssysteme oder Mischgruppen. Journal für die reine und angew. Mathematik, Bd. 157. (1927).

[5]) H. Brandt: Über eine Verallgemeinerung des Gruppenbegriffes. Math. Ann. Bd. 96. (1927).