Ein Existenztheorem in der Theorie der Flächenverbiegung für den Fall nichtanalytischer Funktionen

Von

ANTON VAKSELJ

1. In der Arbeit „Beiträge zur Flächentheorie"[1]) gab ich im Falle analytischer Funktionen den Beweis des folgenden allgemeinen Theorems der Flächenverbiegung:

Es werden auf der gegebenen Fläche eine Kurve $\mathfrak{K}$ *und auf ihr zwei Funktionen* $H_0(s)$ *und* $\Theta_0(s)$ *ihrer Bogenlänge s beliebig gewählt. Es existiert eine und nur eine Verbiegung, die Folgendes leistet: In den Punkten zum Parameter s der Kurve* $\mathfrak{K}$ *hat die mittlere Krümmung der neuen Fläche die vorgeschriebenen Werte* $H_0(s)$, *und die Winkel* $\frac{\Theta}{2}$, *zwischen den Tangenten an die Kurve* $\mathfrak{K}$ *und der jeweiligen Hauptkrümmungsrichtung der neuen Fläche, nehmen die Werte* $\frac{1}{2}\Theta_0(s)$ *an.*

Dieses Existenztheorem kann nun, wie ich es am Schlusse der erwähnten Arbeit anführte, auf den Fall erweitert werden, in dem die vorkommenden Funktionen nur endlich viele Ableitungen besitzen. Man muss für *die Koeffizienten der ersten Grundform* $g_{ik}\,du^i\,du^k$ *stetige Ableitungen fünfter Ordnung nach beiden Variabeln und für die auf der Kurve* $\mathfrak{K}$ *gegebenen Werte der mittleren Krümmung H und der Hilfsfunktion* Θ *stetige Ableitungen dritter Ordnung nach der Bogenlänge von* $\mathfrak{K}$ *verlangen.* Der Grund, dass die Koeffizienten g_{ik} Ableitungen so hoher Ordnung

1) Mathematische Zeitschrift 38 (1934), S. 461 ff.

nach den beiden Variabeln besitzen müssen, liegt in der Natur des Problems, da in dem planaren Differenzialgleichungssystem, welchem die Funktionen H und Θ genügen, noch Ableitungen dritter Ordnung von g_{ik} auftreten.

Dieses System lautet, wenn $g_{12}=0$ und $J=H^2-K$ ist, folgendermassen:

$$(1)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial\Theta}{\partial u^1} = -\dfrac{\sin\Theta}{\sqrt{J}}\dfrac{\partial H}{\partial u^1} + \sqrt{\dfrac{g_{11}}{g_{22}}}\dfrac{\sqrt{J}\cos\Theta+H}{J}\dfrac{\partial H}{\partial u^2} + \\ \qquad\qquad + \dfrac{1}{\sqrt{g}}\dfrac{\partial g_{11}}{\partial u^2} - \sqrt{\dfrac{g_{11}}{g_{22}}}\dfrac{1}{2J}\dfrac{\partial K}{\partial u^2} \\ \dfrac{\partial\Theta}{\partial u^2} = \sqrt{\dfrac{g_{22}}{g_{11}}}\dfrac{\sqrt{J}\cos\Theta-H}{J}\dfrac{\partial H}{\partial u^1} + \dfrac{\sin\Theta}{\sqrt{J}}\dfrac{\partial H}{\partial u^2} - \\ \qquad\qquad - \dfrac{1}{\sqrt{g}}\dfrac{\partial g_{22}}{\partial u^1} + \sqrt{\dfrac{g_{22}}{g_{11}}}\dfrac{1}{2J}\dfrac{\partial K}{\partial u^1}. \end{cases}$$

Die Hilfsfunktion $\frac{1}{2}\Theta$ bedeutet den Winkel zwischen den Koordinatenlinien $du^1=0$ und einer Hauptkrümmungsrichtung.

Es is wichtig zu betonen, dass gegenwärtig diese Erweiterung nur bei Flächen negativer Gaussscher Krümmung K mögich ist. Bei der Durchführung des Beweises bediene ich mich, soweit als möglich, der Methode der sukzessiven Approximationen, die Herr O. Perron in seiner Arbeit: „Über die Existenz und Nichtexistenz von Integralen partieller Differentialgleichungssysteme im reellen Gebiet"[2]) entwickelt hat.

2. Ist die gegebene Fläche eine Torse, d. h., ist die Gausssche Krümmung K überall gleich Null, so genügt es für die Anfangswerte von H und Θ auf der Kurve $\mathfrak{K}$ nur stetige Ableitungen erster beziehungsweise zweiter Ordnung zu verlangen.

Wir führen die Kurve $\mathfrak{K}$ mittels einer Koordinatentransformation in die Gerade $u^1=0$ über und setzen, da $K=0$ ist, $g_{11}=g_{22}=1$. Die Differentialgleichungen (1) nehmen dann folgende Gestalt an:

---

[2]) Math. Zeitschrift 27 (1928), S. 549.

$$
(2)\quad
\begin{aligned}
\frac{\partial \Theta}{\partial u^1} &= -\sin\Theta \frac{\partial \log H}{\partial u^1} + (1+\cos\Theta)\frac{\partial \log H}{\partial u^2} \\
\frac{\partial \Theta}{\partial u^2} &= (\cos\Theta - 1)\frac{\partial \log H}{\partial u^1} + \sin\Theta \frac{\partial \log H}{\partial u^2}\,.
\end{aligned}
$$

Aus (2) folgt sofort:

$$\frac{\partial \Theta}{\partial u^1} - \operatorname{cotg}\frac{\Theta}{2}\cdot\frac{\partial \Theta}{\partial u^2} = 0.$$

Setzen wir $X = \operatorname{cotg}\frac{\Theta}{2}$, so bekommen wir einfacher die Gleichung:

$$\frac{\partial X}{\partial u^1} - X\frac{\partial X}{\partial u^2} = 0,$$

deren allgemeinstes Integral von einer willkürlichen Funktion f abhängt:

$$X = f(Xu^1 + u^2).$$

Sind die Anfangswerte von H und $X = \operatorname{cotg}\frac{\Theta}{2}$ für $u^1 = 0$ beziehungsweise:

$$X = \varphi(u^2), \qquad H = \psi(u^2),$$

so ist das gesuchte Integral eine Lösung der Gleichung:

$$X = \varphi(Xu^1 + u^2).$$

Weiter ist

$$\frac{\partial \log H}{\partial u^1} - X\frac{\partial \log H}{\partial u^2} = \frac{\varphi'(Xu^1+u^2)}{1-u^1\varphi'(Xu^1+u^2)},$$

deren allgemeinste Lösung durch:

$$H = \frac{f_1(Xu^1 + u^2)}{1-u^1\varphi'(Xu^1+u^2)}$$

gegeben ist, wo f_1 eine weitere willkürliche Funktion bedeutet Die gesuchte Lösung ist also:

$$H = \frac{\psi(Xu^1+u^2)}{1-u^1\varphi'(Xu^1+u^2)}\,.$$

3. Wir nehmen nun an, dass die Gausssche Krümmung negativ ist. In dem Differentialgleichungssystem (1) schreiben wir zunächst einfacher:

$$\sqrt{\frac{g_{11}}{g_{22}}}=\alpha\,,\quad \frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial g_{22}}{\partial u^1}=\frac{2\alpha_1}{\alpha}\,,\quad \frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial g_{11}}{\partial u^2}=2\alpha_2\,,$$
$$\frac{1}{4K}\frac{\partial K}{\partial u^1}=\beta_1\,,\quad \frac{1}{4K}\frac{\partial K}{\partial u^2}=-\frac{\beta_2}{\alpha}$$

und erhalten so:

$$\frac{\partial\Theta}{\partial u^1}=-\frac{\sin\Theta}{\sqrt{J}}\frac{\partial H}{\partial u^1}+\alpha\frac{\sqrt{J}\cos\Theta+H}{J}\frac{\partial H}{\partial u^2}+2\alpha_2+\frac{2K}{J}\beta_2$$
$$\frac{\partial\Theta}{\partial u^2}=\frac{1}{\alpha}\frac{\sqrt{J}\cos\Theta-H}{J}\frac{\partial H}{\partial u^1}+\frac{\sin\Theta}{\sqrt{J}}\frac{\partial H}{\partial u^2}-\frac{2\alpha_1}{\alpha}+\frac{2K}{J}\frac{\beta_1}{\alpha}$$

Nun führen wir zwei neue Funktionen Ω_1 und Ω_2 ein- durch folgende Formeln:

$$(3)\qquad \begin{aligned}\Omega_1&=\frac{1}{2}\left(\Theta+\operatorname{arc\,cotg}\frac{H}{\sqrt{-K}}\right),\\ \Omega_2&=\frac{1}{2}\left(\Theta-\operatorname{arc\,cotg}\frac{H}{\sqrt{-K}}\right),\end{aligned}$$

welche folgenden Differentialgleichungen genügen:

$$(4)\qquad \left\{\begin{aligned}\frac{\partial\Omega_1}{\partial u^1}&=\alpha\operatorname{cotg}\Omega_2\frac{\partial\Omega_1}{\partial u^2}+(\alpha_1\operatorname{cotg}\Omega_2+\alpha_2)+\\ &\quad+\frac{\sin(\Omega_1-\Omega_2)}{\sin\Omega_2}(\beta_1\sin\Omega_1+\beta_2\cos\Omega_1)\,,\\ \frac{\partial\Omega_2}{\partial u^1}&=\alpha\operatorname{cotg}\Omega_1\frac{\partial\Omega_2}{\partial u^2}+(\alpha_1\operatorname{cotg}\Omega_1+\alpha_2)+\\ &\quad+\frac{\sin(\Omega_2-\Omega_1)}{\sin\Omega_1}(\beta_1\sin\Omega_2+\beta_2\cos\Omega_2)\,.\end{aligned}\right.$$

Setzen wir noch:

$$X = \operatorname{cotg} \Omega_1, \qquad Y = \operatorname{cotg} \Omega_2,$$

so bekommen wir folgende für die Durchführung des Beweises handliche Form:

$$(5)\quad \begin{aligned} \frac{\partial X}{\partial u^1} &= \alpha Y \frac{\partial X}{\partial u^2} - (1+X^2)(\alpha_1 Y + \alpha_2) + (X-Y)(\beta_1 + \beta_2 X) \\ \frac{\partial Y}{\partial u^1} &= \alpha X \frac{\partial Y}{\partial u^2} - (1+Y^2)(\alpha_1 X + \alpha_2) + (Y-X)(\beta_1 + \beta_2 Y). \end{aligned}$$

Die Winkel Ω_1 und Ω_2 besitzen eine einfache geometrische Deutung. Benützen wir die Formeln von Euler und Ossian Bonnet[3]):

$$\varrho - H = \sqrt{J} \cos 2\varphi$$
$$\tau = \sqrt{J} \sin 2\varphi$$

für die Asymptotenrichtung $\varrho = 0$, $\tau = \sqrt{-K}$, so ist:

$$\frac{H}{\sqrt{-K}} = -\operatorname{cotg} 2\varphi_1,$$

wo φ_1 den Winkel einer Asymptotenrichtung und der ersten Hauptkrümmungsrichtung bezeichnet. Dann ist aber:

$$\Omega_1 = \frac{1}{2}\Theta - \varphi_1$$

der Winkel zwischen der Koordinatenlinie $du^1 = 0$ und einer Asymptotenrichtung. Also:

Die Winkel Ω_1 und Ω_2 zwischen den Koordinatenlinien

[3]) Beiträge, S. 447.

$du^1 = 0$ *und der jeweiligen Asymptotenrichtung genügen dem speziellen planaren Differentialgleichungssystem* (4). *Die Funktionen* Ω_1 *und* Ω_2 *selbst sind Lösungen einer planaren partiellen Differentialgleichung zweiter Ordnung.*

Endlich gilt für die mittlere Krümmung folgende Gleichung:

$$H = \sqrt{-K} \operatorname{cotg}(\Omega_1 \quad \Omega_2).$$

4. Bevor wir zum Beweis des Verbiegungstheorems im Falle nichtanalytischer Funktionen kommen, müssen wir uns einige Sätze über die lineare partielle Differentialgleichung[4, 5]):

$$\frac{\partial z}{\partial x} = f(x,y)\frac{\partial z}{\partial y} + g(x,y)$$

zurechtlegen, die wir im Folgenden benützen werden.

Die Funktionen $f(x,y)$ und $g(x,y)$ sollen noch stetige Ableitungen zweiter Ordnung nach y besitzen. Es sei im Gebiete:

$$|x| < a \qquad |y| < b$$

durchwegs

$$|f| \leqslant F, \qquad \left|\frac{\partial f}{\partial y}\right| \leqslant F'$$

$$|g| \leqslant G, \qquad \left|\frac{\partial g}{\partial y}\right| \leqslant G'.$$

Unter diesen Voraussetzungen besitzt die gewöhnliche Differentialgleichnng:

$$\frac{dy}{dx} + f(x,y) = 0$$

---

4) O. Perron, S. 354.

5) Goursat: Cours d'Analyse math. Bd. III. 1915. S. 7.

im Gebiete:

$$|x| < a, \quad |y| + F|x| < b \tag{D_1}$$

das Integral $y = \varphi(x, y_0)$, welches für $x = 0$ den Wert y_0 annimmt. Wegen der Stetigkeit von $\frac{\partial f}{\partial y}$ existiert auch die Ableitung des Integrals nach dem Anfangswert y_0:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y_0} = e^{-\int\limits_0^x \frac{\partial f[t, \varphi(t, y_0)]}{\partial y} dt}.$$

Die Gleichung $y = \varphi(x, y_0)$ können wir deshalb nach y_0 auflösen:

$$y_0 = \psi(x, y).$$

Die Funktion $\psi(x, y)$ besitzt in D_1 Ableitungen nach beiden Variabeln und genügt der Gleichung:

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = f \frac{\partial \psi}{\partial y}.$$

Aus der Identität:

$$y = \varphi[x, \psi(x, y)]$$

folgt noch

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = e^{\int\limits_0^x \frac{\partial f\{t, \varphi[t, \psi(x, y)]\}}{\partial y} dt}.$$

Das Integral von:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = f \frac{\partial z}{\partial y} + g,$$

welches für $x = 0$ die Anfangswerte $z = z_0(y)$ annimmt, ist nun leicht in Integralform darzustellen. Die Anfangswerte $z=z_0(y)$ sollen noch stetige Ableitungen dritter Ordnung besitzen und es sei für $|y|<b$:

$$|z_0(y)|\leqslant k, \quad |z'_0(y)|\leqslant k', \quad |z''_0(y)|\leqslant k'', \quad |z'''_0(y)|\leqslant k'''.$$

Setzen wir $g_1=f\dfrac{\partial z_0}{\partial y}+g$, so ist das gesuchte Integral:

$$z(x,y)=z_0(y)+\int_0^x g_1\{t, \varphi[t, \psi(x,y)]\}\,dt. \tag{6}$$

Nun ist in D_1:

$$|g_1|\leqslant G_1, \qquad \left|\frac{\partial g_1}{\partial y}\right|\leqslant G'_1,$$

wo G_1, G'_1 wiederum zwei endliche Zahlen bedeuten. Für das gewonnene Integral z besitzen wir dann folgende Abschätzung:

$$|z-z_0|\leqslant G_1|x|. \tag{7}$$

Eine ähnliche Abschätzung gilt auch für die Ableitung $\dfrac{\partial z}{\partial y}$. Es ist, wie leicht zu ersehen,

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z_0}{\partial y}+\int_0^x \frac{\partial g_1\{t, \varphi[t, \psi(x,y)]\}}{\partial y}\cdot e^{\int_t^x \frac{\partial f\{v,\ldots\}}{\partial y}dv}\,.\,dt \tag{8}$$

und also:

$$\left|\frac{\partial z}{\partial y}-\frac{\partial z_0}{\partial y}\right|\leqslant\frac{G'_1}{F'}\left(e^{F'|x|}-1\right). \tag{9}$$

Wir merken uns den folgenden Hilfssatz:
Die Lösung $z=z(x,y)$ genügt in dem Gebiete:

$$(D_2)\qquad \begin{gathered}|x|\leqslant a_1 \qquad |y|+F'|x|<b\\ a_1=\mathrm{Min}\left[a, \frac{k}{G_1}, \frac{1}{F'}\log\left(1+\frac{k'G'_1}{F'}\right)\right]\end{gathered}$$

den beiden Ungleichungen:

$$|z-z_0| \leqslant k, \quad \left|\frac{\partial z}{\partial y}-\frac{\partial z_0}{\partial y}\right| \leqslant k'$$

und besitzt stetige Ableitungen zweiter Ordnung nach y:

$$(10)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 z_0}{\partial y^2} &+ \int_0^x \frac{\partial^2 g_1\{t, \varphi[t, \psi(x, y)]\}}{\partial y^2} \cdot e^{2\int_t^x \frac{\partial f\{v, \ldots\}}{\partial y} dv} \cdot dt + \\ &+ \int_0^x \frac{\partial g_1\{t, \ldots\}}{\partial y} \Bigg\{ e^{\int_t^x \frac{d f\{v, \ldots\}}{\partial y} dv} \times \\ &\qquad \times \int_t^x \frac{\partial^2 f\{v, \ldots\}}{\partial y^2} e^{\int_v^x \frac{\partial f\{w, \ldots\}}{\partial y} dw} dv\, dt \Bigg\}. \end{aligned}\right.$$

5. Wir wollen nun von den Koeffizienten α, α_1, α_2, β_1, β_2 des Differentialgleichungssytems (5) einige für die Durchführungen des Beweises notwendigen Bedingungen aufstellen. Erstens sollen diesen Koeffizienten noch partielle Ableitungen zweiter Ordnung nach u^2 zukommen und zweitens sollen $\alpha, \alpha_1, \ldots, \beta_2$ ihre ersten Ableitungen $\frac{\partial \alpha}{\partial u^2}, \ldots, \frac{\partial \beta_2}{\partial u^2}$ und ebenso ihre zweiten Ableitungen $\frac{\partial^2 \alpha}{\partial u^2 \partial u^2}, \ldots, \frac{\partial^2 \beta_2}{\partial u^2 \partial u^2}$ im Gebiete:

$$|u^1| < a, \qquad |u^2| < b$$

beziehungsweise die gemeinsamen oberen Grenzen m, m' und m'' besitzen.

Es seien $X_0(u^2)$ und $Y_0(u^2)$ die Anfangswerte, die $X(u^1, u^2)$ und $Y(u^1, u^2)$ für $u^1 = 0$ annehmen und für weche wir noch stetige Ableitungen dritter Ordnung nach u^2 verlangen. Weiters sollen die beiden Funktionen $X_0(u^2)$ und $Y_0(u^2)$ und ihre Ableitungen in folgender Weise im Gebiete $|u^2| < b$ nach oben beschränkt sein:

$$|X_0| \leqslant k, \quad \left|\frac{\partial X_0}{\partial y}\right| \leqslant k', \ldots, \left|\frac{\partial^3 X_0}{(\partial u^2)^3}\right| \leqslant k'''$$

und ebenso für Y_0. Die Endlichkeit der Anfangswerte X_0 und Y_0 besagt wegen der Bedeutung der Winkel Ω_1 und Ω_2, dass *auf dem betrachteten Abschnitte die Kurve $\mathfrak{K}$ in keinem ihrer Punkte eine Asymptotenrichtung tangiert.*

Wir definieren jetzt zwei Folgen von Funktionen $X_n(u^1, u^2)$ und $Y_n(u^1, u^2)$, die mit $X_0(u^2)$ und $Y_0(u^2)$ beginnen sollen, durch folgende Differentialgleichungen:

$$(11) \quad \begin{cases} \dfrac{\partial X_{n+1}}{\partial u^1} = \alpha Y_n \dfrac{\partial X_{n+1}}{\partial u^2} - (1 + X_n^2)(\alpha_1 Y_n + \alpha_2) + \\ \qquad + (X_n - Y_n)(\beta_2 + \beta_2 X_n) \\ \dfrac{\partial Y_{n+1}}{\partial u^1} = \alpha X_n \dfrac{\partial Y_{n+1}}{\partial u^2} - (1 + Y_n^2)(\alpha_1 X_n + \alpha_2) + \\ \qquad + (Y_n - X_n)(\beta_1 + \beta_2 Y_n)\,. \end{cases}$$

Die Integrale X_{n+1}, Y_{n+1} von (11) sollen für $u^1 = 0$ die Anfangswerte X_0, Y_0 annehmen.

Wenden wir den Hilfssatz aus der Nummer 4. auf die Differentialgleichungen (11) und machen wir den Schluss von k auf $k+1$, so gelten für die Funktionen X_n und Y_n beim beliebigen Werte von n im Gebiete:

$$(D_2) \quad \begin{gathered} |u^1| < a_1, \qquad |u^2| + F|u^1| < b \\ a_1 = \mathrm{Min}\left[a, \frac{k}{G_1}, \frac{1}{F'} \log\left(1 + \frac{k' G'_1}{F'}\right)\right] \end{gathered}$$

die folgenden Ungleichungen:

$$(12) \qquad |X_n - X_0| \leqslant k, \qquad \left|\frac{\partial X_n}{\partial y} - \frac{\partial X_0}{\partial y}\right| \leqslant k',$$

$$(13) \qquad |X_n| \leqslant 2k, \qquad \left|\frac{\partial X_n}{\partial y}\right| \leqslant 2k'$$

und ebenso für Y_n.

Die Konstanten $F, G, G_1, F', G', G'_1, \ldots$ sind leicht zu bestimmen. Es ist beispielsweise:

$$F = 2km, \qquad G = m\,[2kk' + (1+2k)^2], \ldots$$

Die Funktionen X_n, Y_n besitzen nach (10) und nach den Voraussetzungen über die Koeffizienten $\alpha, \alpha_1, \ldots$ noch stetige zweite Ableitungen nach u^2, für welche wir allgemein die folgenden Abschätzungen beweisen wollen:

$$(14) \qquad \left|\frac{\partial^2 X_n}{(\partial u^2)^2}\right| \leqslant C^{n+1}, \qquad \left|\frac{\partial^2 Y_n}{(\partial u^2)^2}\right| \leqslant C^{n+1}.$$

Die Abschätzung gilt für $n=0$, wenn $C \geqslant k''$ genommen wird. Wir beweisen, dass sie für $n+1$ gilt, wenn sie für n als richtig vorausgesetz ist. In (10) können wir den Ausdruck unter dem Haupt integralzeichen in der folgenden Gestalt schreiben:

$$\Pi + \Phi \frac{\partial^2 X_n}{(\partial u^2)^2} + \Psi \frac{\partial^2 Y_n}{(\partial u^2)^2}$$

wo Π, Φ, Ψ ganze rationale beziehungsweise exponnentiale Funktionen der Koeffizienten $\alpha, \alpha_1, \ldots$, ihrer ersten zwei Ableitungen nach u^2, der Funktionen X_n, Y_n und ihrer ersten Ableitungen nach u^2 und endlich der Anfangswerte X_0 und Y_0 und ihrer ersten drei Ableitungen nach u^2 sind. Alle diese Werte sind aber im betrachteten Gebiete und zwar unabhängig von n beschränkt und Gleiches gilt dann auch von den Funktionen Π, Φ, Ψ. Sind P, Q, Q beziehungsweise die oberen Grenzen von Π, Φ und Ψ so können wir den Integrand von (10) folgendermassen nach oben abschätzen:

$$P + 2Q\,C^{n+1}$$

und folglich:

$$\left| \frac{\partial^2 X_{n+1}}{(\partial u^2)^2} \right| \leqslant k'' + Pa_1 + 2Qa_1\, C^{n+1}.$$

Ist $C \geqslant 1$, so haben wir auch

$$\left| \frac{\partial^2 X_{n+1}}{(\partial u^2)^2} \right| \leqslant (k'' + Pa_1 + 2Qa_1)\, C^{n+1}$$

Wir erhalten also die Abschätzung (14), wenn

$$C = \mathrm{Max}\,(1, k'' + Pa_1 + 2Qa_1)$$

ist.

6. Wir setzen nun:

$$X_n - X_{n-1} = U_n\,, \quad Y_n - Y_{n-1} = V_n$$

und beweisen die gleichmässige Konvergenz der Reihen:

$$\text{(15)} \qquad X = X_0 + \sum_1^{\infty} U_n\,, \quad Y_n = Y_0 + \sum_1^{\infty} V_n\,.$$

Die Funktionen U_n und V_n sind jene Integrale des Differentialgleichungssystems:

$$\text{(16)} \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial U_{n+1}}{\partial u^1} &= \alpha\, Y_n \frac{\partial U_{n+1}}{\partial u^2} + \\ &+ \left\{ V_n \left[\alpha \frac{\partial X_n}{\partial u^2} - \alpha_1 (1 + X_n^2) - (\beta_1 + \beta_2 X_n) \right] - \right. \\ &\left. - U_n \left[(X_n + X_{n-1})(\alpha_1 Y_{n-1} + \alpha_2) + (\beta_1 - \beta_2 Y_{n-1} \right] \right\}, \\ \frac{\partial V_{n+1}}{\partial u^1} &= \alpha X_n \frac{\partial V_{n+1}}{\partial u^2} + \\ &+ \left\{ U_n \left[\alpha \frac{\partial Y_n}{\partial u^2} - \alpha_1 (1 + Y_n^2) - (\beta_1 + \beta_2 Y_n) \right] - \right. \\ &\left. - V_n \left[(Y_n + Y_{n-1})(\alpha_1 X_{n-1} + \alpha_2) + (\beta_1 - \beta_2 X_{n-1}) \right] \right\}, \end{aligned} \right.$$

welche für $u^1 = 0$ den Wert Null annehmen. Für U_n gilt folgende bei allen n gültige Abschätzung:

$$(17) \qquad | U_n | \leqslant \frac{(C_1 u^1)^n}{n!}$$

und ebenso für $| V_n |$.

Die Ungleichung (17) gilt nach (6) und nach (7) für $n=1$, wenn $C_1 \geqslant G_1$ genommen wird. Wir beweisen ihre Gültigkeit für $n+1$, wenn sie für n als geltend vorausgesetzt wird. Bezeichen wir mit $\overline{g_n}$ das, was aus dem gewundenen Klammerausdruck der ersten Differentialgleichung von (16) entsteht, wenn wir die in (6) angegebene Substitutionen ausführen, so ist

$$U_{n+1} = \int_0^{u^1} \overline{g}_n dt.$$

Nun ist nach (16):

$$|\overline{g}_n| \leqslant R[| U_n | + | V_n |],$$

wo R eine von n unabhängige Konstante bedeutet. Also ist:

$$| U_{n+1} | \leqslant 2R \int_0^{|u^1|} \frac{(C_1 t)^n}{n!} dt = \frac{2R}{C_1} \frac{(C_1 |u^1|)^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Die Ungleichung (17) gilt allgemein, wenn

$$C_1 = \text{Max}\,(G_1,\ 2R)$$

ist.

Die gleichmässige Konvergenz der Reihen (15) ist somit bewiesen und damit auch die Existenz der Funktionen $X(u^1, u^2)$ und $Y(u^1, u^2)$:

$$X(u^1, u^2) = \lim_{u \to \infty} X_n, \qquad Y(u^1, u^2) = \lim_{u \to \infty} Y_n .$$

Auf dieselbe Weise beweisen wir die gleichmässige Konvergenz von:

$$(18) \qquad \frac{\partial X_0}{\partial u^2} + \sum_1^\infty \frac{\partial U_n}{\partial u^2}, \quad \frac{\partial Y_0}{\partial u^2} + \sum_1^\infty \frac{\partial V_n}{\partial u^2}$$

mit Hilfe der Ungleichungen:

$$(19) \qquad \left| \frac{\partial U_n}{\partial u^2} \right| \leqq \frac{(C_2 |u^1|)^n}{n!}, \quad \left| \frac{\partial V_n}{\partial u^2} \right| \leqq \frac{(C_2 |u^1|)^n}{u!} .$$

Die Ungleichungen gelten für $n=1$, wenn weniger genau als in (9) C_2 grösser als $G'_1 e^{F' a_1}$ genommen wird. Leiten wir den Koeffizienten von $\frac{\partial U_{n+1}}{\partial u^2}$ und den Klammerausdruck der ersten Gleichung von (16) nach u^2 ab und führen darin die in (6) angegebenen Substitutionen aus, so wollen wir die erhaltenen Resultate beziehungsweise mit $\frac{\partial \overline{f}_n}{\partial u^2}(t)$ und $\frac{\partial \overline{g}_n}{\partial u^2}(t)$ bezeichnen. Dann ist nach (7):

$$\frac{\partial U_{n+1}}{\partial u^2} = \int_0^{u^1} \frac{\partial \overline{g}_n}{\partial u^2}(t)\, e^{\int_t^{u^1} \frac{\partial \overline{f}_n}{\partial u^2}(v)\, dv} . dt$$

In Hinblick auf (16) können wir aber $\frac{\partial \overline{g}_n}{\partial u^2}(t)$ folgendermassen nach oben abschätzen:

$$S[\,|U_n| + |V_n|\,] + T\left[\left| \frac{\partial U_n}{\partial u^2} \right| + \left| \frac{\partial V_n}{\partial u^2} \right| \right] + m\,|V_n| \left| \frac{\partial^2 X_n}{(\partial u^2)^2} \right|,$$

also

$$\left|\frac{\partial U_{n+1}}{\partial u^2}\right| \leqslant e^{F'a_1} \int_0^{|u^1|} \left[2S\frac{(C_1 t)^n}{n!} + 2T\frac{(C_2 t)^n}{n!} + m\, C^{n+1}\frac{(C_1 t)^n}{n!}\right] dt$$

und da $C \geqslant 1$ auch:

$$\left|\frac{\partial U_{+1}}{\partial u^2}\right| \leqslant e^{F'a_1} [2S(C\,C_1)^n + 2TC_2^n + m\,C\,(C\,C_1)^n\,] \frac{|u^1|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Die Abschätzung (19) gilt allgemein, wenn

$$C_2 = \text{Max}\,[G'_1\, e^{F'a_1}, C\,C_1, (2S + 2T + mC)\, e^{F'a_1}]$$

ist.

Die Reihen (18) konvergieren also gleichmässig und nach dem Satz der Reihendifferentiaticn gelten alsdann folgende Gleichungen:

$$\frac{\partial X(u^1, u^2)}{\partial u^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{\partial X_n}{\partial u^2}, \quad \frac{\partial Y(u^1, u^2)}{\partial u^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{\partial Y_n}{\partial u^2}.$$

Mit Hilfe der Gleichungen (16) und des lezterwähnten Satzes beweist man endlich, dass auch die Gleichungen:

$$\frac{\partial X(u^1, u^2)}{\partial u^1}, = \lim_{u\to\infty} \frac{\partial X_n}{\partial u^1}, \quad \frac{\partial Y(u^1, u^2)}{\partial u^1} = \lim_{u\to\infty} \frac{\partial Y_n}{\partial u^1}$$

erfüllt sind.

Die Funktionen $X(u^1, u^2)$ und $Y(u^1, u^2)$ sind also im Gebiete D_2 eine Lösung des Differentialgleichungssystems (5), welche den verlangten Anfangsbedingungen genügen.

Es ist leicht zu zeigen, dass diese Lösung die einzig mögliche ist. Gäbe es noch eine andere $\overline{X}(u^1, u^2)$ und $\overline{Y}(u^1, u^2)$, so wäre es nur notwendig mittels (5), geschrieben für $\overline{X}$, $\overline{Y}$, und (11) ein (16) analoges Differentialgleichungssystem für die Funktionen:

$$\overline{X}-X_{n+1}, \quad \overline{Y}-Y_{n+1}$$

aufzustellen und für die letzten Differenzen Abschätzungen, die völlig jenen von U_n, V_n ähnlich sind, abzuleiten. Es ist endlich:

$$|X-\overline{X}| \leqslant |X-X_{n+1}| + |\overline{X}-X_{n+1}|$$

und ebenso für $|Y-\overline{Y}|$.