Sur l'équation différentielle des lignes asymptotiques

Par

DRAGOSLAV MITRINOVITCH

La détermination des projections des lignes asymptotiques sur le plan des xy de la surface

$$(1) \qquad z = F(x, y)$$

se ramène à l'intégration de l'équation différentielle

$$(2) \qquad r\,dx^2 + 2\,s\,dx\,dy + t\,dy^2 = 0,$$

r, s et t étant des notations classiques de la théorie des équations aux dérivées partielles. Donc, la détermination des lignes asymptotiques dépend de l'intégration d'une équation différentielle de la forme

$$(3) \qquad M(x, y)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + N(x, y)\frac{dy}{dx} + P(x, y) = 0,$$

dont on ne peut effectuer l'intégration que pour les formes spéciales des coefficients: M, N et P.

Nous nous proposons de traiter dans cet article le problème *de trouver toutes les surfaces* (1), *dont l'équation différentielle des lignes asymptotiques est réductible à l'équation différentielle*

$$(4) \qquad \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + a_2(x)\,y^2 + 2a_1(x)\,y\,\frac{dy}{dx} + a_0(x) = 0\,,$$

représentant évidemment une forme particulière de l'équation (3).

Considérons, à cet effet, l'équation (2) écrite sous la forme

$$(5) \qquad \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 2\frac{s}{t}\frac{dy}{dx} + \frac{r}{t} = 0,$$

en supposant que $t \neq 0$. Au cas $t = 0$ correspond la surface

$$z = \lambda(x)\, y + \mu(x),$$

$\lambda(x)$ et $\mu(x)$, étant des fonctions quelconques de x; l'intégration de l'équation (2) est alors possible par des méthodes élémentaires.

Pour que l'équation (5) soit de la forme (4), il faut et il suffit que

$$(6) \qquad \frac{s}{t} = a_1(x)\, y,$$

$$(7) \qquad \frac{r}{t} = a_2(x)\, y^2 + a_0(x).$$

L'équation linéaire aux dérivées partielles du second ordre (6) peut se réduire à l'équation

$$\partial x - a_1 y \frac{\partial q}{\partial y} = 0, \qquad \left(q = \frac{\partial z}{\partial y}\right),$$

dont l'intégrale générale

$$(8) \qquad q = \theta\left(y e^{\int a_1 dx}\right),$$

θ étant une fonction arbitraire de son argument, représente une intégrale intermédiaire de l'équation (6). Par l'intégration de l'équation (8), on obtient

$$(9) \qquad z = \int \theta\left(y e^{\int a_1 dx}\right) \partial y + X,$$

X désignant une fonction arbitraire de x, ce qui représente l'intégrale générale de l'équation (6)

La fonction z, définie par dernière relation, doit encore vérifier la condition (7), c'est-à-dire

$$(10)\qquad \frac{e^{\int a_1 dx}(a_1'+a_1^2)\int y\,\theta'\,\partial y + a_1^2 e^{2\int a_1 dx}\int y^2\,\theta''\,\partial y + X''}{e^{\int a_1 dx}\theta'} = \\ = a_2 y^2 + a_0,$$

θ' et θ'' désignant la première et la deuxième dérivée par rapport à

$$u = y\, e^{\int a_1 dx}.$$

Par suite, *la surface de la forme la plus générale répondant à la question énoncée est représentée par la relation* (9) *avec la restriction* (10)

L'exemple de cette éspèce de surfaces est la surface

$$(11)\qquad z = f(x)\,y^2 + \alpha y + \psi(x) \qquad (\alpha = \text{const.})$$

correspondant à la forme linéaire de la fonction $\theta(u)$.

La détermination des lignes asymptotiques de la surface (11) se réduit à l'intégration de l'équation

$$(12)\qquad \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \frac{f''}{2f}y^2 + 2\frac{f'}{f}\frac{dy}{dx} + \frac{\psi''}{2f} = 0.$$

D'une part, si l'on sait par un procédé quelconque déterminer des lignes asymptotiques de la surface (11), on saura intégrer l'équation (12).

D'autre part, chaque cas d'intégrabilité de l'équation différentielle (12) conduit à une surface de la forme (11) dont on peut complétement déterminer des lignes asymptotiques.

Ainsi, par exemple, l'équation différentielle de la forme

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \frac{y}{\nu x+\tau}\frac{dy}{dx} + \frac{\lambda x+\mu}{\nu x+\tau} = 0,$$

λ, μ, ν, τ étant des constantes quelconques, intégrable comme une équation dite de *Lagrange*, donne la surface

$$(13)\qquad z = (ax+b)\,y^2 + 2a\left(\frac{\lambda x^3}{b} + \frac{\mu x^2}{2} + cx + d\right) + \alpha y,$$

où les coefficients sont des constantes.

Par suite, *on peut complètement effectuer la détermination des lignes asymptotiques de le surface* (13).

Il est clair que les résultats, que nous venous d'exposer sont également variables pour les surfaces de la forme

$$z = f(y)\, x^2 + \alpha x + \psi(y)\,,$$

$$y = f(x)\, z^2 + \alpha z + \psi(x)\,,$$

$$y = f(z)\, x^2 + \alpha x + \psi(z)\,,$$

$$x = f(y)\, z^2 + \alpha z + \psi(y)\,,$$

$$x = f(z)\, y^2 + \alpha y + \psi(z)\,.$$

Le problème que nous avons traité peut être généralisé. En effet, prenant pour le point de départ au lieu de l'équation (4) une autre équation, convenablement choisie, et opérant comme précédemment, on peut arriver aux résultats intéressants pour le problème dont il s'agit.