Remarque sur une équation différentielle du premier ordre

Par
DRAGOSLAV MITRINOVITCH.

Considérons l'équation différentielle

$$(1) \qquad y'^2 + y^2 = f(x)$$

et cherchons dans quel cas l'intégrale générale de l'équation proposée se présente sous la forme

$$(2) \qquad y = R(x, C),$$

où R est une fonction rationnelle de la constante d'intégration C convenablement choisie, dont les coefficients sont des fonctions quelconques de x.

De la relation (2) on obtient

$$(3) \qquad y' = R_1(x, C),$$

où R_1 désigne de même une fonction rationnelle de C. Eliminant C des équations (2) et (3), on trouve une équation différentielle algébrique du premier ordre

$$(4) \qquad F(x, y, y') = 0.$$

L'équation (4) est du genre zéro en y et y', car ces deux variables s'expriment rationnellement en fonction du paramètre C.

Donc, pour qu'une équation différentielle algébrique du premier ordre ait son intégrale générale exprimée par une relation (2), une condition nécessaire est qu'elle soit du genre zéro en y et y'.

Cette condition nécessaire est évidemment satisfaite pour l'équation (1); y et y' peuvent s'exprimer rationnellement à l'aide d'un paramètre u par les formules

$$y = \sqrt{f(x)}\,\frac{2u}{1+u^2},$$

$$y' = \sqrt{f(x)}\,\frac{1-u^2}{1+u^2},$$

desquelles on tire

$$(5) \qquad u = \frac{y}{\sqrt{f(x)}+y'},$$

c'est-à-dire une fonction rationnelle en y et y'.

L'équation (1) prend alors la forme

$$(6) \qquad 2\frac{du}{dx} = 1 + u^2 - [\log f(x)]'_x\,\frac{u+u^3}{1-u^2},$$

où le second membre est une fonction rationnelle de u.

Si l'intégrale générale de l'équation (1) a la forme (2), l'intégrale générale de l'équation (6), vu la relation (5), sera de la forme

$$(7) \qquad u = \frac{R(x, C)}{\sqrt{f(x)}+R_1(x,C)};$$

c'est donc une fonction rationnelle de C. Les seuls points singuliers d'une telle expression, qui varient avec C, sont évidemment des pôles. Il faut donc que les seuls points singuliers mobiles de l'équation (6) soient des pôles, ce qui conduit, en vertu d'un théorème connu, à la conclusion que l'équation (6) doit être une équation différentielle de *Riccati*. Or, cette équation n'aura la forme une d'équation de *Riccati* que si

$$[\log f(x)]'_x = 0,$$

c'est-à-dire

$$f(x) = \text{const.}$$

Il s'ensuit que, *pour que dans l'intégrale générale*

$$y = \psi(x, C)$$

de l'équation différentielle

$$y'^2 + y^2 = f(x)$$

la constante d'intégration C, convenablement choisie, figure rationnellement, il faut et il suffit que la fonction $f(x)$ se réduise à une constante.

Dans ce cas, l'équation étant

$$y'^2 + y^2 = k,$$

son intégrale générale peut s'écrire

$$y = \sqrt{k}\,\frac{1-C^2}{1+C^2}\sin x + \sqrt{k}\,\frac{2C}{1+C^2}\cos x,$$

où C est la constante d'intégration.

Envisageons encore l'équation différentielle plus générale

$$\left(\frac{dY}{dX}\right)^2 + a_2 Y^2 + 2a_1 Y \frac{dY}{dX} + a_0 = 0, \tag{8}$$

a_0, a_1, a_2 étant des fonctions arbitraires de X, qui se ramène par le changement des variables

$$Y = y\, e^{-\int a_1\, dX},$$

$$\frac{dx}{dX} = \sqrt{a_2 - a_1^2},$$

à l'équation différentielle de la forme

$$y'^2 + y^2 = f(x),$$

de sorte que la conclusion précédente s'applique également à l'équation (8), à savoir: *pour que dans l'intégrale générale*

$$Y = \Phi\,(X, C)$$

de l'équation différentielle (8) *la constante d'intégration* C, *convenablement choisie, figure rationnellement, il faut et il suffit qu'il existe la relation suivante entre les coefficients* a_0, a_1, a_2:

$$\frac{a_0}{a_1^2 - a_2}\, e^{2\int a_1\, dX} = k = \text{const.}$$

Dans ce cas l'intégrale générale de l'équation (8) se présente sous la forme

$$Y = \sqrt{k}\,\frac{1 - C^2}{1 + C^2}\, e^{-\int a_1\, dX} \sin\left(\int \sqrt{a_2 - a_1^2}\, dX\right) +$$
$$+ \sqrt{k}\,\frac{2C}{1 + C^2}\, e^{-\int a_1\, dX} \cos\left(\int \sqrt{a_2 - a_1^2}\, dX\right),$$

où C est la constante d'intégration.