Remarques arithmétiques sur les intégrales abeliennes à coefficients tayloriens commensurables.

Par

MICHEL PETROVITCH.

1. Si l'on compare entre eux les coefficients de x^n des deux développements

$$f_1(x) = log(1 - ax),$$
$$f_2(x) = xe^x$$

(où a est un nombre commensurable $\frac{p}{q}$, p et q étant des entiers) on constate le fait suivant:

L'entier k étant convenablement choisi, le coefficient de x^n de $f_1(x)$ est égal au coefficient de x^n de $f_2\left(\frac{x}{k}\right)$ multiplié par un nombre rationnel lequel, réduit à sa plus simple expression, *n'a son dénominateur différant de l'unité que pour les n égaux à des nombres premiers, le dénominateur étant alors ce nombre premier n lui-même.*

En effet, les coefficients respectifs α_n et β_n de x^n dans les développements de $f_1(x)$ et $f_2\left(\frac{x}{q}\right)$ sont

$$\alpha_n = \frac{1}{n}\left(\frac{p}{q}\right)^n, \qquad \beta_n = \frac{1}{(n-1)!}\left(\frac{1}{q}\right)^n$$

de sorte qu'on aura

$$\alpha_n = \mu_n \, p^n \, \beta_n \qquad \text{où} \qquad \mu_n = \frac{(n-1)!}{n}.$$

Or, si n est un nombre *composé* autre que 4, la factorielle $(n-1)!$ est divisible par n; si n est un nombre *premier*, il ne divisera pas cette factorielle et par suite figurera au dénominateur de μ_n à moins qu'il ne divise pas p. En tous cas, si le dénominateur de μ_n diffère de l'unité, il ne différera pas du nombre premier n.

Pour abréger la langage, nous dirons, que les deux fonctions $f_1(x)$ et $f_2(x)$ *sont en correspondance* (A) et nous allons montrer que l'exemple cité n'est qu'un cas particulier d'un fait plus général exprimé par la proposition suivante:

Toute intégrale abélienne développable suivant les puissances de la variable indépendante à coefficients commensurables est en correspondance (A) *avec la fonction* xe^x.

En effet, soit

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots \tag{1}$$

le développement d'une fonction algébrique. On aura

$$u = \int_0^x y\,dx = b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3 + \ldots \tag{2}$$

avec

$$b_n = \frac{a_{n-1}}{n} = \mu_n \frac{a_{n-1}}{(n-1)!}, \tag{3}$$

$$\mu_n = \frac{(n-1)!}{n}. \tag{4}$$

Les coefficients b_n étant supposés commensurables, le théorème d'Eisenstein assure l'existence d'un entier k tel que a_i soit un multiple entier de $\left(\frac{1}{k}\right)^i$ pour $i=1, 2, 3\ldots$ On peut donc écrire

$$b_n = \mu_n M_n \frac{1}{(n-1)!} \left(\frac{1}{k}\right)^{n-1} = \mu_n M_n \beta_n \tag{5}$$

où β_n désigne le coefficient de x^n du développement de $f_2\left(\frac{x}{k}\right)$, la fonction $f_2(x)$ étant xe^x, et où M_n est un nombre entier.

D'après la propriété arithmétique du facteur μ_n, le produit $\mu_n M_n$ sera:

1° un nombre entier lorsque x est un nombre composé autre que 4, ou bien un nombre (premier ou composé) divisant M_n;

2° une fraction irreductible ayant pour dénominateur n lorsque n est un nombre premier ne divisant pas M_n.

En tous cas, si le dénominateur de $\mu_n M_n$ diffère de l'unité, il ne différera pas du nombre premier n, ce qui démontre la proposition.

La proposition est directement applicable

A) à toute intégrale

$$\int y dx \tag{6}$$

rattachée à la courbe algébrique

$$f(x, y) \quad 0 \tag{7}$$

où f est un polynome en x et y à coefficients commensurables, y prenant pour $x=0$ une valeur commensurable. Car les dérivées $y', y'', y'''\dots$, calculées par la dérivation successive de (5) prendront pour $x=0$ des valeurs commensurables; les coefficients tayloriens de (6) seront donc tous commensurables;

B) à toute intégrale (6) où la fonction algébrique y satisfait à une équation différentielle algébrique d'ordre fini

$$f(x, y, y', y'', \dots)=0, \tag{8}$$

où f est polynome en $x, y, y', y'', \dots$ à coefficients commensurables; les coefficients tayloriens de (6) seront tous commensurables.

Diverses propositions analogues à la précédente peuvent être établies à l'égard des intégrales

$$\int \varphi(x, t)dt \tag{9}$$

où φ est une combinaison des fonctions algébriques de x avec diverses fonctions de t.

Soit y une fonction algébrique de x développable en série (1) à coefficients a_n commensurables, et envisageons l'intégrale

$$F(x, t) = \int_0^t y(z)zdt \quad \text{où} \quad z = xe^{-t}. \tag{10}$$

La valeur asymptotique de $F(x, t)$ pour $t = \infty$ est une fonction $f_1(x)$ de x qui est en correspondance (A) avec la fonction xe^x.

En effet, on a

$$F(x, t) = a_1 x I_1 + a_2 x^2 I_2 + a_3 x^3 I_3 + \dots$$

où

$$I_n = \int_0^t e^{-nt} dt = \frac{1 - e^{-nt}}{n}.$$

La valeur asymptotique de $F(x, t)$ est donc représentable par la série

$$f_1(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n x^n \qquad \text{où} \qquad b_n = \frac{a_{n-1}}{n}.$$

Comme les a_{n-1} sont, pour k convenablement choisi, de la forme

$$a_{n-1} = M_{n-1}\left(\frac{1}{k}\right)^{n-1}$$

(M_i et k étant des entiers), les coefficients b_n se laissent écrire sous la forme

$$b_n = \mu_n M_n \beta_n$$

(M_n = entier) où β_n est le coefficient de x^n de la fonction

$$f_2\left(\frac{x}{k}\right) = \left(\frac{x}{k}\right) e^{\frac{x}{k}}$$

et la démonstration s'achève comme tout-à-l'heure.

2. Si l'on compare entre eux les coefficients α_n et β_n des deux développements

$$(11) \qquad f_1(x) = \frac{1}{2} \log \frac{(1-x)^2}{1-2x} = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n x^n,$$

$$(12) \qquad f_2(x) = \frac{1}{1-ax}$$

où a est un nombre commensurable $\frac{p}{q}$, on constate le fait suivant:

L'entier k étant convenablemant choisi, le coefficient α_n est égal au coefficient β_n de $f_2\left(\frac{x}{k}\right)$, multiplié par un nombre rationnel lequel, réduit à sa plus simple expression, *n'a son dénominateur différant de l'unité que pour les n égaux à des nombres composés, le dénominateur étant alors ce nombre composé lui-même.*

En effet, de

$$f'_1(x) = \frac{1}{1-2x} - \frac{1}{1-x} = (2^1-1)x + (2^2-1)x^2 + (2^3-1)x^3 + \ldots$$

on tire

$$f_1(x) = \frac{2^1-1}{2}x + \frac{2^2-1}{3}x^2 + \frac{2^3-1}{4}x^3 + \ldots$$

de sorte qu'on aura

$$\alpha_n = \frac{2^{n-1}-1}{n}.$$

D'autre part, on a

$$f_2\left(\frac{x}{k}\right) = \frac{1}{1-\frac{ax}{k}} = \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n x^n$$

où

$$\beta_n = \left(\frac{a}{k}\right)^n.$$

On en tire

$$\alpha_n = \frac{2^{n-1}-1}{n}\left(\frac{kq}{p}\right)^n \beta_n$$

de sorte qu'en prenant $k=p$ on aura

$$\alpha_n = \frac{2^{n-1}-1}{n} q^{\frac{n}{-}} \beta_n \,. \tag{13}$$

Or la différence $2^{n-1}-1$ est divisible par n toutes les fois que n est un nombre premier plus grand que 2. Le facteur multipliant β_n dans (13) ne peut donc avoir comme dénominateur aucun nombre premier plus grand que 2; si ce dénominateur diffère de l'unité, il coïncidera avec le nombre composé n.

Nous dirons, pour abréger le langage, que les deux fonctions $f_1(x)$ et $f_2(x)$ *sont en correspondance* (B) et nous allons montrer que l'exemple cité n'est qu'un cas particulier d'une proposition plus générale qui suit.

Soit y une fonction algébrique à coefficients a_n de développement (1) commensurable, et envisageons l'intégrale abélienne

$$V(x, \lambda) = \int_0^x \varphi(x, \lambda) \frac{dx}{x} \tag{14}$$

où

$$\varphi(x, \lambda) = \frac{1}{\lambda} [y(\lambda x) - \lambda y(x) + (\lambda - 1) y(0)]. \tag{15}$$

λ étant un nombre premier donné.

Toute fonction $V(x, \lambda)$ *est en correspondance* (B) *avec la fonction*

$$f_2(x) = \frac{1}{1-ax} \tag{16}$$

où a *est un nombre commensurable quelconque.*

Car le coefficient de x^n du développement de $V(x, p)$ est

$$h^n = \frac{\lambda^{n-1}-1}{n} a_n \tag{17}$$

et comme

$$a_n = M_n \left(\frac{1}{k}\right)^n \tag{18}$$

(M_n et k étant des entiers)

on aura

$$h_n = A_n\left(\frac{1}{k}\right)^n \tag{19}$$

avec

$$A_n = \frac{\lambda^{n-1}-1}{n} M_n . \tag{20}$$

D'autre part, on a

$$f_2\left(\frac{x}{k}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n x^n ,$$

où

$$\beta_n = \left(\frac{a}{k}\right)^n = \left(\frac{p}{kq}\right)^n .$$

On en tire

$$h_n = \frac{\lambda^{n-1}-1}{n} M_n \left(\frac{kq}{p}\right)^n \beta_n$$

de sorte que si l'on prend $k=p$ on aura

$$h_n = \frac{\lambda^{n-1}-1}{n} M_n q^n \beta_n . \tag{21}$$

La différence $\lambda^{n-1}-1$ est divisible par n toutes les fois que n est un nombre premier autre que λ, et la démonstration s'achève comme dans l'exemple cité.

Dans l'exemple précédent on avait

$$\lambda = 2, \qquad y(x) = \frac{1}{1-x} ,$$

d'où

$$\varphi(x, \lambda) = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{1-2x} - \frac{2}{1-x} + 1\right] = \sum_{n=2}^{\infty} (2^{n-1}-1)x^n ,$$

$$V(x, \lambda) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2^{n-1}-1}{n} x^n = \frac{1}{2} \log \frac{(1-x)^2}{1-2x}$$

ce qui n'est qu'un cas particulier du cas général indiqué.

Des propositions analogues à la précédente peuvent être énoncées à l'égard des intégrales portant sur diverses combinaisons des fonctions algébriques à coefficients de x^n commensurables, avec diverses transcedantes.

Nous remarquerons également que la fonctionnelle $V(x, \lambda)$ *a une signification qui la rattache aux suites limitées des nombres réels positifs*.

Soit

$$x_1, x_2, \ldots x_\lambda \tag{22}$$

une telle suite, et $f(x)$ une fonction positive convexe dans un intervalle de x contenant la suite.

Désignons par x et z la moyenne arithmétique des x_i et celle des $f(x_i)$, de sorte que

$$x = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_\lambda}{\lambda}, \tag{23}$$

$$z = \frac{f(x_1) + f(x_2) \ldots + f(x_\lambda)}{\lambda}. \tag{24}$$

Comme je l'ai montré dans un travail antérieur[1], la valeur z oscille autour de la valeur moyenne

$$\frac{f(\lambda x) + \lambda f(x) + (\lambda - 1) f(0)}{2\lambda} \tag{25}$$

et la limite que l'amplitude de ces oscilations ne peut dépasser, mais peut effectivement atteindre pour toute fonction $f(x)$ de nature considérée, est la valeur

$$\frac{1}{2} V(x, \lambda). \tag{26}$$

3. Les propriétés aritmétiques des intégrales abéliennes à coefficients tayloriens commensurables, indiquées dans ce qui précéde, proviennent

1° du fait analytique que le coefficient de x^n du développement de toute intégrale de telle espèce, est un multiple entier de

---

[1]) M. Petrovitch, *Sur une fonctionnelle*. (Publications mathématique de l'Université de Belgrade, t. I. 1932 p. 148).

$$\frac{1}{n}\left(\frac{1}{k}\right)^n \tag{27}$$

où k est un nombre entier rattaché à l'intégrale considérée;

2° des propriétés aritmétiques des facteurs

$$\frac{(n-1)!}{n} \quad \text{et} \quad \frac{2^{n-1}-1}{n} \tag{28}$$

seuls actuellement connus jouissant de ces propriétés.

Les intégrales abéliennes sont elles les seules fonctions qui, en vertu des propriétés des facteurs (28), se trouvent en correspondance (A) et (B) avec les deux fonctions

$$xe^x \quad \text{et} \quad \frac{1}{1-ax}\ ? \tag{29}$$

Pour répondre à la question, nous remarquerons que, a fonction $f_1(x)$ étant en correspondance (A) avec la première des deux fonctions (29), le facteur rationnel qui, dans l'expression du coefficient b_n du développement

$$f_1(x)=b_1x+b_2x^2+\ldots$$

multiplié le coefficient

$$\frac{1}{(n-1)!}\left(\frac{1}{k}\right)^n \quad \text{de} \quad \frac{x}{k}e^{\frac{x}{k}},$$

ne saurait présenter, en fait de dénominateur, que n; b_n est donc de la forme

$$b_n=\frac{N_n}{n}\frac{1}{(n-1)!}\left(\frac{1}{k}\right)^n$$

où N_n est un nombre entier.

Pour que le facteur $\frac{N_n}{n}$ jouisse de la propriété arithmetique du facteur $\frac{(n-1)!}{n}$, il suffit que N_n soit divisible par $(n-1)!$, c'est-à-dire que b_n soit de la forme

$$b_n = \frac{P_n}{n}\left(\frac{1}{k}\right)^n$$

où P_n est un nombre entier. Il s'ensuit que la fonction $\frac{df_1}{dx}$ jouira de la propriété que, lorsqu'on y change x en kx, elle aura ses coefficients tayloriens égaux à des nombres entiers.

Or, parmi les fonctions analytiques $f_1(z)$ pouvant être représentées par des séries de telle nature, il y a, comme l'on sait

1° des fonctions algébriques, rationnelles, ou multiformes (présentant dans ce dernier cas nécéssairemant des points critiques dans le cercle $|x| = 1$);

2° des fonctions transcendantes multiformes sans lignes singulières, comme

$$f_1(z) = \frac{2}{\pi}\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-16x^2 t^2)}} = \sum_{n=1}^{\infty}\binom{2n}{n}^2 x^{2n}$$

ou bien présentant des lignes singulières comme

$$f_1(z) = \sum_{n=1}^{\infty} x^{p_n} \qquad (p_n = n^{\text{ième}} \text{ nombre premier}).$$

Toutes ces fonctions $f_1(x)$ sont en correspondance (A) avec xe^x, et les fonctionnelles $V(x, \lambda)$ formées à l'aide d'elles, sont en correspondence (B) avec $(1-\alpha x)^{-1}$.

4. Les integrales définies

$$F(x) = \int_a^b \varphi(x, t)\, dt$$

où φ est une combinaison des fonctions algébriques de x avec diverses fonctions transcendantes de t, peuvent également se trouver en correspondance (A) ou (B) avec les fonctions autres que (29).

Considérons, à titre d'exemple, l'intégrale définie

$$F(x) = \int_a^b y(x\, v)\, w dx$$

où y est une fonction algébrique à coefficients tayloriens a_n commensurables, avec $a_0=0$; v et w sont deux fonctions de la variable t telle que l'intégrale

$$g_n=\int_a^b w\, v^n\, dt$$

ait un sens pour $n=1, 2, 3\ldots$ On aura

$$F(x)=B_1x+B_2x^2+B_3x^3+\ldots$$

où

$$B_n=a_n\, g_n\,.$$

Or, comme

$$a_n=M_n\left(\frac{1}{k}\right)^n,$$

on peut écrire

$$B_n=\mu_n\, M_n\, \frac{n\, g_n}{(n-1)!}\left(\frac{1}{k}\right)^n$$

μ_n étant le facteur précédent. Si donc l'on envisage la fonction de x définie par le développement

$$\Phi(x)=\frac{g_1}{0!}\,x+\frac{2g_2}{1!}\,x^2+\frac{3g_3}{2!}\,x^3+\ldots$$

la fonction $F(x)$ se trouve en correspondance (A) avec la trancendante $\Phi\,(x)$.

Ainsi, en prenant

$$v=te^{-t},\qquad w=\frac{1}{t}$$
$$a=0,\qquad b=\infty$$

la formule intégrale

$$\int_0^\infty (te^{-t})^n\,\frac{dt}{t}=\frac{(n-1)!}{n^n}\qquad (n=1,\ 2,\ 3\ldots)$$

fait voir que pour toute fonction algébrique $y(x)$ de la nature considérée la valeur asymptotique $F(x)$ de l'intégrale définie

$$\int_0^t y(xte^{-t})\frac{dt}{t}$$

est en correspondance (A) avec la transcendante, fonction entière de x

$$\Phi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^{n-1}}.$$