PUBLICATIONS DE L'INSTITUT MATHÉMATIQUE
Nouvelle série, tome 9 (23), 1969. p. 65—68.

КООРДИНАТНОЕ n-МЕРНОЕ ПРОСТРАНСТВО* МЕТРИЧЕСКИЙ ТЕНЗОР КОТОРОГО ЯВНО ЗАВИСИТ ОТ ВРЕМЕНИ

Велько Вуйичич

(Доложено 9-ого февраля 1968)

1. Для того чтобы исследовать движение системы динамических точек $M_\nu (\nu = 1, \ldots, N)$, массы m_ν которых функции времени t в пространстве конфигурации**, указалось нужным добавить этому пространству некоторые дополнения, так-как метрический тензор $a_{\alpha\beta} = a_{\beta\alpha} (t, x^1, \ldots, x^n)$ через массы точек $m_\nu = m_\nu (t)$ явно зависит от времени t. Возможность решать эту задачу в реономном (расширенном $(n+1)$-мерном) [3] пространстве, показалась неподходящая. В этом случаю формально приходили бы рассматривать траектории склерономной системы в конфигурации с реономными связами. Даже и при исследованию движения системы точек переменной массы в расширенном $(n+1)$-мерном пространстве надо обратить внимание на те-же особености о которых идёт реч в n-мерном координатном пространстве. В противположном не получим соотвествующие выражения для дифференциальных уравнений движений системы [4].

С точки зрения механики n-мерное координатное пространство, метрический тензор которого явно зависит от времени, являеться ясным моделём пространства конфигурации. Между тем, с матеметической точки зрения, в водить параметар (время) через массу в метрический тензор пространства конфигурации, кажеться, остало в чем-то неясным***. Чтобы это пояснить с помним сначала как мы толкуем метрический тензор обичного пространства конфигурации.

2. В этой цели рассмотрим N точек M_ν $(\nu = 1, 2. \ldots N)$. Каждой точке M_ν, положеные которой определяет радиус-вектор $r_\nu = \{y_{3\nu-2}, y_{3\nu-1}, y_{3\nu}\}$, принадлежит масса $m_\nu = \text{const}$. Положения точек не фиксируються, а изменяються зависимо от параметра t. Поэтому будет $r_\nu = \{y_{3\nu-2}(t), y_{3\nu-1}(t), y_{3\nu}(t)\}$, $\dot{r}_\nu = \dfrac{dr_\nu}{dt} = \{\dot{y}_{3\nu-2}(t), \dot{y}_{3\nu-1}, \dot{y}_{3\nu}\}$. Если параметар t время то производная $\dot{r}_\nu$ скорость точки M_ν, и произведение $m_\nu \dot{r}_\nu$ импульс или количество движения этой тачки. Поскольку к точкам M_ν приложенные геометрические связи, их положения определяються через $n < 3N$ независимых обобщенных координат. Пусть $x^a(t)$ $(\alpha = 1, \ldots, n)$ независимые. Тогда существует зависимость.

$$r_\nu = r_\nu (x^1(t),\ x^2(t), \ldots, x^n(t))$$

---

* Смотри терминологию Гантмахера Ф. Р.

** См. терминологию Анджелич Т.

*** См. Р. Ж. мат. 1967. год. 10А 578.

и поэтому

$$(1)\qquad m_\nu \dot{r}_\nu = m_\nu \sum_{\alpha=1}^{n} \frac{\partial r_\nu}{\partial x^\alpha} \dot{x}^\alpha = m_\nu \partial_\alpha r_\nu \dot{x}^\alpha, \quad \left(\partial_\alpha = \frac{\partial}{\partial x^\alpha}\right).$$

Если умножим скалярно каждое соотношение (1) на $\partial_\beta r_\nu$ (проектируем $m_\nu \dot{r}_\nu$ на касательное направление $\partial_\beta r_\nu$ координаты x^β) и суммируем, получим ковариантные составляющие вектора

$$\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \dot{r}_\nu \cdot \partial_\beta r_\nu = \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \partial_\alpha r_\nu \cdot \partial_\beta r \dot{x}^\alpha = a_{\alpha\beta} \dot{x}^\alpha = \dot{x}_\beta .$$

Когда параметар t время, тогда $\dot{x}_\beta$ будут составляющие обобщенного импульса. Выражение

$$a_{\alpha\beta} = \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \partial_\alpha r_\nu \cdot \partial_\beta r_\nu = \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu (\partial_\alpha y_{3\nu-2} \partial_\beta y_{3\nu-2} + \partial_\alpha y_{3\nu-1} \partial_\beta y_{3\nu-1} + \partial_\alpha y_{3\nu} \partial_\beta y_{3\nu})$$

или

$$(2)\qquad a_{\alpha\beta} = \sum_{i=1}^{3N} m_i \partial_\alpha y_i \partial_\beta y_i = a_{\beta\alpha}(x^1(t), x^2(t), \ldots, x^n(t))$$

где $m_{3i-2} = m_{3i-1} = m_{3i}$, называеться основный тензор пространства конфигурации. В этом пространстве принято* писать линейный элемент в виде $ds^2 = a_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta$ $(= 2T dt^2)$ где T кинетическа энергия системы. Поэтому тензор $a_{\alpha\beta}$ называют и метрический тензор пространства конфигурации. Этот тензор отличаеться от адекватного, допустим сказать, „чисто геометрического“ метрического тензора $g_{\alpha\beta} = \sum_i \partial_\alpha y_i \partial_\beta y_i = g_{\beta\alpha}(x^1, \ldots, x^n)$ пространства Римана R_n, только в том, что в $g_{\alpha\beta}$ не входят массы $m_\nu = \text{const}$. С математической точки зрения разница также не существует ни в том, что в конфигурации механической системы координаты $x^\alpha = x^\alpha(t)$ зависят от времени t, ибо в пространстве Римана или Эвклода рассматриваетсья зависимость координат от какого-то параметра.

3. При исследованию траекторий системы динамических точек, массы которых зависят от времени t, $m_\nu = m_\nu(t)$, метрический тензор (2) будет функция, не только координат x^α а посредством масс $m_\nu = m_\nu(t)$ явно зависит и от времени

$$(3)\qquad a_{\alpha\beta} = a_{\beta\alpha}(x^1(t), x^2(t), \ldots; t) = \sum_{i=1}^{3N} m_i(t) \partial_\alpha y_i \partial_\beta y_i .$$

Эта зависимост метрического тензора $a_{\alpha\beta}$ явно от времени t показывает изменение инерции системы и, также, быт может, конфигурации системы. Если между функциями $m_\nu = m_\nu(t)$ есть ограниченных функций в течении времен t, число N динамических точек M_ν $(\nu = 1, \ldots, N)$ измениться. Это в общем случаю изменит и число n независимых координат x^α $(\alpha = 1, \ldots, n)$. Из-за этой возможной переменности пространство конфигурации голономной склерономной системы точек „переменной массы“ мы назвали [6] „переменно-конфигурационное пространство“ ${}^{(P)}V_n$.

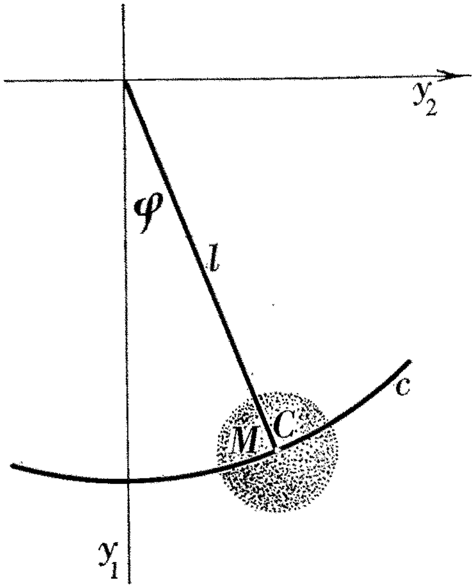
---

* См. на пример, J. L. Synge [5]

Оно конфигурационное так-как соответствует многообразию конфигурации системы; геометрические связи не деформируються, не изменяютсья в течении времени, геометрия пространства конфигурации сохраняеться. Изменяеться только какая-тоособеность точки- изменяеться её инерция. Простейший пример математического маятника „переменной массы" это хорошо иллюстрирует. Ковариантная составляющая основного тензора будет

$$a_{11} = m(t)\left(\frac{\partial y_1}{\partial \varphi}\frac{\partial y_1}{\partial \varphi} + \frac{\partial y_2}{\partial \varphi}\frac{\partial y_2}{\partial \varphi}\right) =$$

$$= m(t)\, l^2 = a_{11}(t).$$



Если масса $m(t)$ изменяеться так что её центр C остаётся неизменимым, конфигурация также остаётся неизменимой, $l = \text{const}$. положение определяет обобщеная координата $x = \varphi$. Но, масса $m(t)$ изменяться и так что её центр инерции не совпадает с точкой M. И в этом общем случаю не деформируеться l, хотья отклонение движущейся точки C возможно от линии c.

Тензорная алгебра в пространстве конфигурации V_n и в ${}^{(P)}V_n$ будет одной и то-же. Между тем, в тензорном анализу дело так не стоит. Ковариантная производная метрического тензора равняеться нулю

$$(5) \qquad a_{\alpha\beta;\gamma} = \partial_\gamma a_{\alpha\beta} - a_{\alpha\beta}\begin{Bmatrix}\delta\\ \alpha\gamma\end{Bmatrix} - a_{\alpha\delta}\begin{Bmatrix}\delta\\ \beta\gamma\end{Bmatrix} = 0,$$

но это не так в случае апсолютной производной по параметру t. Действительно, абсолютная производная $\frac{Da_{\alpha\beta}}{dt}$ будет

$$\frac{Da_{\alpha\beta}}{dt} = \frac{da_{\alpha\beta}}{dt} - a_{\delta\beta}\begin{Bmatrix}\delta\\ \alpha\sigma\end{Bmatrix}\frac{dx^\sigma}{dt} - a_{\alpha\delta}\begin{Bmatrix}\delta\\ \beta\sigma\end{Bmatrix}\frac{dx^\sigma}{dt} \neq 0$$

так как

$$\frac{da_{\alpha\beta}}{dt} = \partial_\sigma a_{\alpha\beta}\frac{dx^\sigma}{dt} + \frac{\partial a_{\alpha\beta}}{\partial t}$$

где

$$(6) \qquad \frac{\partial a_{\alpha\beta}}{\partial t} \stackrel{\text{def.}}{=} \sum_{i=1}^{3N}\frac{dm_i}{dt}\,\partial_\alpha y_i\,\partial_\beta y_i\,.$$

Вследствие этого нельзя писать что

$$\frac{Da_{\alpha\beta}}{dt} = a_{\alpha\beta;\gamma}\frac{dx^\gamma}{dt},$$

а будет

$$\frac{Da_{\alpha\beta}}{dt}=a_{\alpha\beta;\gamma}\frac{dx^{\gamma}}{dt}+\frac{\partial a_{\alpha\beta}}{\partial t},$$

или, в силу (5) и (6),

$$\frac{Da_{\alpha\beta}}{dt}=\frac{\partial a_{\alpha\beta}}{\partial t}\neq 0.$$

Это основная разница между V_n и ${}^{(P)}V_n$ и существенно отражается при исследованию дифференциальных уравнений движения системы точек „переменной массы" [6].

При исследованию абсолютной производной по параметру t от ковариантных составляющих вектора p в ${}^{(P)}V_n$ надо обратить внимание что

$$\frac{Dp_{\alpha}}{dt}=\frac{dp_{\alpha}}{dt}-p_{\beta}\left\{\begin{matrix}\beta\\ \alpha\gamma\end{matrix}\right\}\frac{dx^{\gamma}}{dt}\neq a_{\alpha\beta}\frac{dp^{\beta}}{dt}+[\alpha,\beta\gamma]p^{\beta}\frac{dx^{\gamma}}{dt}$$

а

$$\frac{Dp_{\alpha}}{dt}=a_{\alpha\beta}\frac{Dp^{\beta}}{dt}+\frac{\partial a_{\alpha\beta}}{\partial t}p^{\beta}.$$

Из закона движения $s=s(t)$ где s дуга траектории можно всегда выразыть время t как функцию дуги s, т.е. $t=t(s)$ и также массы $m_{\nu}=m_{\nu}(t)=m_{\nu}(s)$ как функции от s. Поэтому основный тензор (3) можно считать что явно зависит од дуги s

(4) $$a_{\alpha\beta}=a_{\beta\alpha}(x^1, x^2, \ldots, x^n; s).$$

В этой модели пространства конфигурации ${}^{(P)}V_n$ дифференциальные уравнения автопараллелы имеют вид [6]

$$\frac{D}{ds}\left(\frac{dx^{\alpha}}{ds}\right)=\frac{d^2x^{\alpha}}{ds^2}+\left\{\begin{matrix}\alpha\\ \gamma\delta\end{matrix}\right\}\frac{dx^{\gamma}}{ds}\frac{dx^{\delta}}{ds}=-\frac{1}{2}a^{\alpha\beta}\frac{\partial a_{\gamma\beta}}{\partial s}\frac{dx^{\gamma}}{ds}$$

что также отличаеться от дифференциальных уравнений геодезической в пространстве конфигурации V_n, т.е. в пространстве Римана.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Гантмахер, Ф. Р., *Лекции по аналитической механике*, Москва, 1960.

[2] Анђелић Т., *Тензорски рачун*, Београд, 1952.

[3] Wundheiler, A., *Rheonome Geometrie, Absolute Mechanik*, Proc. mat. fiz., Warszava, 40 (1932).

[4] Молюков, И. Д. Сапа, В. А., *Тензорная форма уравнений движения системы переменной массы*. Известия Академии наук Казанской ССР, серия математики и механики ;вып. 7 (11), Алма-Ата, 1959.

[5] Singe, J. L., *Tensorial method in dynamics*. Toronto, 1936.

[6] Vujičić, V., *Kretanje dinamički promenljivih objekata i njegova stabilnost*. Beograd, 1961.

[7] Vujičić, V., *On the covariant differential equations of motion of dynamical systems with variable mass:* Tensor, N. S. Vol. 18 (1967), Tokyo.