PUBLICATIONS DE L'INSTITUT MATHÉMATIQUE
Nouvelle série, tome 9 (23), 1969, pp. 235—241.

UNE CONTRIBUTION A L'ETUDE DE LA C[illegible]E LIMITE TRIDIMENSIONNELLE POUR UNE VITESSE EXTER[illegible]RE PERTURBEE AVEC LES OSCILLATIONS DES HAUTES FREQUENCES

Radomir Ašković

(Communiqué le 11 Décembre 1968)

1. Ordinairement on considère que la vitesse extérieure de la couche limite autour d'un corps a une valeur stationnaire. Cette hypothèse fait que l'écoulement dans la couche limite peut être analysé plus facilement que dans le cas instationnaire. D'autre part, on a découvert experimentalement que cette vitesse extérieure est toujours instationnaire, en changeant en tout point sa valeur et sa direction. On ne peut prendre qu'une valeur moyenne en temps $\bar{u}_e$ de cette vitesse u_e est stationnaire, sous la supposition que l'interval du temps est assez long pour faire une telle opération. Il est donc plus exact de prendre une composante perturbée U_1 de la vitesse extérieure et étudier la couche limite instationnaire que de prendre dès le début que la vitesse extérieure est stationnaire.

Les équations de la couche limite laminaire tridimensionnelle en régime instationnaire, dans un fluide incompressible, après application du principe de prévalence [1], s'écrivent, dans le système de coordonnées curvilignes de Hayes [2], sous la forme suivante:

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial s}+v\frac{\partial u}{\partial n}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial s}+\nu\frac{\partial^2 u}{\partial n^2} \tag{1.1}$$

$$\frac{\partial (e_2 u)}{\partial s}+\frac{\partial (e_2 v)}{\partial n}=0 \tag{1.2}$$

$$\frac{\partial w}{\partial t}+u\frac{\partial w}{\partial s}+v\frac{\partial w}{\partial n}-\frac{1}{e_1}\frac{\partial e_1}{\partial z}u^2=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}+\nu\frac{\partial^2 w}{\partial n^2} \tag{1.3}$$

$$\begin{cases} -\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial s}=\dfrac{\partial u_e}{\partial t}+u_e\dfrac{\partial u_e}{\partial s}\,; \\ \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial z}=\dfrac{1}{e_1}\dfrac{\partial e_1}{\partial z}u_e^2 \end{cases} \tag{1.4}$$

D'après ce qu'on a dit tout au début, la vitesse extérieure u_e peut être exprimée comme:

$$u_e = \overline{u}_e(s, z) + U_1(s, z, t) \tag{2.1}$$

où:

$$\overline{u}_e = \frac{1}{T}\int_0^T u_e(s, z, t)\,dt.$$

Exprimons par des formules pareilles les composantes de vitesse dans la couche limite, ainsi que la pression:

$$\begin{aligned} u(s, z, n, t) &= \overline{u}(s, z, n) + u_1(s, z, n, t)\\ v(s, z, n, t) &= \overline{v}(s, z, n) + v_1(s, z, n, t) \qquad (2.2)\\ w(s, z, n, t) &= \overline{w}(s, z, n) + w_1(s, z, n, t) \end{aligned}$$

$$p(s, z, t) = \overline{p}(s, z) + p_1(s, z, t). \tag{2.3}$$

Toutes les valeurs moyennes $\overline{u}$, $\overline{v}$, $\overline{w}$, $\overline{p}$ sont définies, en principe, de même façon que $\overline{u}_e$, et par conséquent on a:

$$\overline{U}_1 = \overline{u}_1 = \overline{v}_1 = \overline{w}_1 = \overline{p}_1 = 0.$$

En introduisant les expressions (2.1) et (2.3) dans l'équation (1.4.1), on obtient:

$$\frac{\partial U_1}{\partial t} + \overline{u}_e\frac{\partial \overline{u}_e}{\partial s} + \overline{u}_e\frac{\partial U_1}{\partial s} + U_1\frac{\partial \overline{u}_e}{\partial s} + U_1\frac{\partial U_1}{\partial s} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial \overline{p}}{\partial s} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p_1}{\partial s} \tag{3.1}$$

et la valeur moyenne par rapport au temps de cette équation donne:

$$-\frac{1}{\rho}\frac{\partial \overline{p}}{\partial s} = \overline{u}_e\frac{\partial \overline{u}_e}{\partial s} + \overline{U_1\frac{\partial U_1}{\partial s}}. \tag{3.2}$$

En soustrayant donc (3.2) de (3.1), on a:

$$-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p_1}{\partial s} = \frac{\partial U_1}{\partial t} + \overline{u}_e\frac{\partial U_1}{\partial s} + U_1\frac{\partial \overline{u}_e}{\partial s} + U_1\frac{\partial U_1}{\partial s} - \overline{U_1\frac{\partial U_1}{\partial s}}. \tag{3.3}$$

Par le même procédé l'équation (1.4.2):

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial \overline{p}}{\partial z} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p_1}{\partial z} = \frac{1}{e_1}\frac{\partial e_1}{\partial z}(\overline{u}_e^2 + 2\,\overline{u}_e U_1 + U_1^2)$$

nous donne:

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial \overline{p}}{\partial z} = \frac{1}{e_1}\frac{\partial e_1}{\partial z}(\overline{u}_e^2 + \overline{U_1^2}) \tag{4.1}$$

et, enfin:

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial p_1}{\partial z} = \frac{1}{e_1}\frac{\partial e_1}{\partial z}(2\,\overline{u}_e U_1 + U_1^2 - \overline{U_1^2}). \tag{4.2}$$

2. A l'aide des expressions (2.2) et (2.3) l'équation (1.1) pour la composante longitudinale de la vitesse dans la couche limite, devient:

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial u_1}{\partial t}+\bar{u}\frac{\partial \bar{u}}{\partial s}+\bar{u}\frac{\partial u_1}{\partial s}+u_1\frac{\partial \bar{u}}{\partial s}+u_1\frac{\partial u_1}{\partial s}\\
&+\bar{v}\frac{\partial \bar{u}}{\partial n}+\bar{v}\frac{\partial u_1}{\partial n}+v_1\frac{\partial \bar{u}}{\partial n}+v_1\frac{\partial u_1}{\partial n}\\
&=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial \bar{p}}{\partial s}-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p_1}{\partial s}+\nu\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial n^2}+\nu\frac{\partial^2 u_1}{\partial n^2}.
\end{aligned}
\tag{5.1}
$$

Si l'on prend la valeur moyenne par rapport au temps de tous les termes dans cette équation, on obtient:

$$
\begin{aligned}
&\bar{u}\frac{\partial \bar{u}}{\partial s}+\overline{u_1\frac{\partial u_1}{\partial s}}+\bar{v}\frac{\partial \bar{u}}{\partial n}+\overline{v_1\frac{\partial u_1}{\partial n}}\\
&=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial \bar{p}}{\partial s}+\nu\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial n^2}
\end{aligned}
\tag{5.2}
$$

Vu la relation (3.2), nous pouvons donner à l'équation (5.2) la forme suivante:

$$
\bar{u}\frac{\partial \bar{u}}{\partial s}+\bar{v}\frac{\partial \bar{u}}{\partial n}=\bar{u}_e\frac{\partial \bar{u}_e}{\partial s}+\nu\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial n^2}+Q_1
\tag{5.3}
$$

où:

$$
Q_1=\overline{U_1\frac{\partial U_1}{\partial s}}-\left(\overline{u_1\frac{\partial u_1}{\partial s}}+\overline{v_1\frac{\partial u_1}{\partial n}}\right).
\tag{5.4}
$$

L'équation de continuité (1.2) donne:

$$
\frac{\partial(e_2\bar{u})}{\partial s}+\frac{\partial(e_2\bar{v})}{\partial n}=0.
\tag{5.5}
$$

Si l'on soustrait l'équation (5.2) de l'équation (5.1), on obtient:

$$
\begin{aligned}
&\underline{\underline{\frac{\partial u_1}{\partial t}}}+\left(\bar{u}\frac{\partial u_1}{\partial s}+\bar{v}\frac{\partial u_1}{\partial n}\right)+\left(u_1\frac{\partial \bar{u}}{\partial s}+v_1\frac{\partial \bar{u}}{\partial n}\right)\\
&-\left(\overline{u_1\frac{\partial u_1}{\partial s}}+\overline{v_1\frac{\partial u_1}{\partial n}}\right)+\left(u_1\frac{\partial u_1}{\partial s}+v_1\frac{\partial u_1}{\partial n}\right)\\
&=\underline{\underline{\frac{\partial U_1}{\partial t}}}+\bar{u}_e\frac{\partial U_1}{\partial s}+U_1\frac{\partial \bar{u}_e}{\partial s}+\overline{U_1\frac{\partial U_1}{\partial s}}-U_1\frac{\partial U_1}{\partial s}+\nu\,\underline{\underline{\frac{\partial^2 u_1}{\partial n^2}}}
\end{aligned}
\tag{5.6}
$$

En résolvant le problème analogue dans le cas d'un mouvement plan d'un cylindre, C. C. Lin [3] a obtenu une équation de même type comme notre. Il propose de ne garder que des termes soulignés. Cet essai lui a donné des résultats acceptables.

Nous acceptons le même procédé et obtenons l'équation (5.6) linéarisée sous la forme:

$$\frac{\partial u_1}{\partial t}=\frac{\partial U_1}{\partial t}+\nu\frac{\partial^2 u_1}{\partial n^2} \tag{5.7}$$

Les conditions aux limites sont:

$$u_1=0,\quad n=0;\quad u_1\to U_1,\quad n\to\infty.$$

De plus, tenant compte des expressions (2.2), l'équation de continuité (1.2) donne:

$$\frac{\partial(e_2 u_1)}{\partial s}+\frac{\partial(e_2 v_1)}{\partial n}=0. \tag{5.8}$$

Par conséquent, le problème de la détermination de la composante lon itudinale de la vitesse dans la couche limite est résolu: En connaissant la partie perturbée U_1 de la vitesse extérieure u_e, nous pouvons calculer à l'aide des équations linéaires (5.7) et (5.8), les valeurs de u_1 et v_1. Ensuite, la fonction Q_1 peut être trouvée en utilisant l'expression (5.4) et le système des équations (5.3), (5.5) devient, évidemment, tout à fait déterminé et complet.

3. Passons maintenant au problème de la composante transversale w de la vitesse dans la couche limite. Après l'introduction des valeurs (2.2) et (2.3) dans l'équation (1.3), elle devient:

$$\begin{aligned}&\frac{\partial w_1}{\partial t}+\bar{u}\frac{\partial \bar{w}}{\partial s}+\bar{u}\frac{\partial w_1}{\partial s}+u_1\frac{\partial \bar{w}}{\partial s}+u_1\frac{\partial w_1}{\partial s}+\bar{v}\frac{\partial \bar{w}}{\partial n}\\ &+\bar{v}\frac{\partial w_1}{\partial n}+v_1\frac{\partial \bar{w}}{\partial n}+v_1\frac{\partial w_1}{\partial n}-\frac{1}{e_1}\frac{\partial e_1}{\partial z}(\bar{u}^2+2\bar{u}u_1+u_1^2)\\ &=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial \bar{p}}{\partial z}-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p_1}{\partial z}+\nu\frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial n^2}+\nu\frac{\partial^2 w_1}{\partial n^2}\end{aligned} \tag{6.1}$$

En prenant la valeur moyenne en temps de tous les membres de cette équation, on a:

$$\bar{u}\frac{\partial \bar{w}}{\partial s}+\overline{u_1\frac{\partial w_1}{\partial s}}+\bar{v}\frac{\partial \bar{w}}{\partial n}+\overline{v_1\frac{\partial w_1}{\partial n}}-\frac{1}{e_1}\frac{\partial e_1}{\partial z}(\bar{u}^2+\overline{u_1^2})=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial \bar{p}}{\partial z}+\nu\frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial n^2} \tag{6.2}$$

Vu la relation (4.2), l'équation (6.2) peut être écrite sous la forme suivante:

$$\bar{u}\frac{\partial \bar{w}}{\partial s}+\bar{v}\frac{\partial \bar{w}}{\partial n}-\frac{1}{e_1}\frac{\partial e_1}{\partial z}\bar{u}^2=-\frac{1}{e_1}\frac{\partial e_1}{\partial z}\bar{u}_e^2+\nu\frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial n^2}+Q_2 \tag{6.3}$$

où:

$$Q_2=-\frac{1}{e_1}\frac{\partial e_1}{\partial z}\overline{U_1^2}-\left(\overline{u_1\frac{\partial w_1}{\partial s}}+\overline{v_1\frac{\partial w_1}{\partial n}}\right)+\frac{1}{e_1}\frac{\partial e_1}{\partial z}\overline{u_1^2} \tag{6.4}$$

En soustrayant l'équation (6.3) de l'équation (6.1), on obtient:

$$\frac{\partial w_1}{\partial t}+\left(\bar{u}\frac{\partial w_1}{\partial s}+\bar{v}\frac{\partial w_1}{\partial n}\right)+\left(u_1\frac{\partial \bar{w}}{\partial s}+v_1\frac{\partial \bar{w}}{\partial n}\right)+\left(u_1\frac{\partial w_1}{\partial s}+v_1\frac{\partial w_1}{\partial n}\right)$$

$$-\left(u_1\frac{\partial w_1}{\partial s}+v_1\frac{\partial w_1}{\partial n}\right)=\frac{1}{e_1}\,\frac{\partial e_1}{\partial z}\,(2\,\bar{u}u_1-2\,\bar{u}_e U_1+\overline{U_1^2}-\overline{u_1^2})$$

$$+\frac{1}{e_1}\,\frac{\partial e_1}{\partial z}(u_1^2-U_1^2)+\nu\frac{\partial^2 w_1}{\partial n^2}.$$

Cette équation à dérivées partielles est nonlinéaire et très compliquée. Il est bien naturel de faire d'abord une linéarisation en ne prenant que des termes suivants:

$$\frac{\partial w_1}{\partial t}-\nu\frac{\partial^2 w_1}{\partial n^2}=\frac{1}{e_1}\,\frac{\partial e_1}{\partial z}\,(u_1^2-U_1^2) \tag{6.5}$$

avec les conditions aux limites:

$$w_1=0,\ n=0;\quad w_1\to 0,\ n\to\infty.$$

4. Le processus de la linéarisation a fait les équations pour les composantes oscillatoires (5.7), (5.8), (6.5) indépendantes de l'écoulement principal. Il est évidemment possible de les calculer à l'aide de la partie oscillatoire U_1 de la vitesse extérieure.

Ayant les solutions pour u_1, v_1, w_1 nous pouvons calculer les fonctions Q_1 et Q_2, définies par les expressions (5.4) et (6.4). Elles déterminent alors les équations (5.3) et (6.3) pour l'écoulement principal.

Il est caractéristique que les équations (5.3) et (6.3) pour l'écoulement principal $\bar{u}$ et $\bar{w}$ ont la même forme que les équations de la couche limite stationnaire, i.e. dans le cas: $\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial w}{\partial t}=0$. La différence est dans l'apparition des termes complémentaires Q_1 et Q_2 dans l'expression pour le gradient de pression, qui, dans le cas stationnaire, est présenté par $\bar{u}_e\frac{\partial \bar{u}_e}{\partial s}$ et $\frac{1}{e_1}\,\frac{\partial e_1}{\partial z}\,\bar{u}_e^2$. Ces deux termes, Q_1 et Q_2, sont les fonctions connues. On peut remarquer qu'ils dépendent de la variable „n", tandis que les composantes „classiques" du gradient de pression $\left(\bar{u}_e\frac{\partial \bar{u}_e}{\partial s},\ \frac{1}{e_1}\,\frac{\partial e_1}{\partial z}\,\bar{u}_e^2\right)$ ont été, bien entendu, indépendentes de „n".

Contenant les composantes oscillatoires, l'écoulement moyen diffère de celui que l'on obtiendrait si l'on aurait pris premièrement la valeur moyenne par rapport au temps $\bar{u}_e$ de la vitesse extérieure $u_e(s, z, t)$ et ensuite si l'on aurait introduit cette valeur dans les équations (1.1) et (1.3), en considérant que $\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial w}{\partial t}=0$. En effet, la différence se reflètte au fait qu'actuellement on a $Q_1\neq 0$, $Q_2\neq 0$, tandis que $Q_1=Q_2=0$ si l'on opère dès le début avec $\bar{u}_e(s, z)$.

Il est bien connu dans la théorie de l'écoulement turbulent que dans ce cas on a des oscillations tridimensionnelles périodiques des hautes fréquences (U_1) ajoutées à l'écoulement extérieur principal ($\bar{u}_e$). Par conséquent, un tel problème montre les mêmes caractéristiques que celui analysé dans ce travail. Les équations linéarisées (5.7) et (6.6) donnent justement les bonnes résultats pour U_1 exprimé par les oscillations des hautes fréquences.

On peut dire qu'on néglige ordinairement ces oscillations dans l'écoulement extérieur. On calcule la couche limite comme si l'écoulement est stationnaire en prenant que la vitesse extérieure est déjà $\bar{u}_e(s, z)$, à la place de $u_e(s, z, t)$. On voit que c'est équivalent au cas ou on rejette les expressions Q_1 et Q_2 aux équations (5.3) et (6.3), ce que donne nécessairement des certaines valeurs moyennes pour les vitesses, mais surement différentes des vraies solutions $\bar{u}$ et $\bar{w}$, correspondantes aux équations complètes (5.3) et (6.3).

5. Pour le cas d'une simple oscillation harmonique:

$$U_1 = U_0(s, z)\sin\omega t,$$

où $U_0(s, z)$ représente l'amplitude et ω la fréquence angulaire d'oscillations, les composantes supplementaires du gradient de pression sont trouvées [4], d'après les formules (5.4) et (6.4) avec les solutions des équations (5.7), (5.8) et (6.6):

$$Q_1 = \frac{1}{2}U_0\frac{\partial U_0}{\partial s}F_1(\eta) + \frac{1}{e_2}\frac{\partial e_2}{\partial s}U_0^2 F_2(\eta),$$

$$Q_2 = -\frac{1}{e_1}\frac{\partial e_1}{\partial z}U_0^2(s, z)F_3(\eta)$$

où:

$$F_1(\eta) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\eta - 1\right)e^{-\frac{\eta}{\sqrt{2}}}\sin\frac{\eta}{\sqrt{2}} + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\eta + 2\right)e^{-\frac{\eta}{\sqrt{2}}}\cos\frac{\eta}{\sqrt{2}} - e^{-\eta\sqrt{2}},$$

$$F_2(\eta) = \left[\left(\frac{\sqrt{2}}{4}\eta - \frac{1}{2}\right)\sin\frac{\eta}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{2}}{4}\eta\cos\frac{\eta}{\sqrt{2}}\right]e^{-\frac{\eta}{\sqrt{2}}},$$

$$F_3(\eta) = -\frac{1}{2}e^{-\eta\sqrt{2}} + e^{-\frac{\eta}{\sqrt{2}}}\cos\frac{\eta}{\sqrt{2}}.$$

Ces dernières expressions pour Q_1 et Q_2 montrent que la différence entre les vraies valeurs des composantes de la vitesse $\bar{u}$, $\bar{w}$ et des profils u_s, w_s du cas quasi-stationnaire pour lequel: $Q_1 = Q_2 = 0$, dépend non seulement de l'amplitude d'oscillations $U_0(s, z)$, mais aussi des données $e_1(s, z)$ et $e_2(s, z)$ de l'écoulement à potentiel autour du corps en question.

Tables des Notations

- s longueur d'arc le long des lignes de courant extérieures
- z longueur d'arc le long des trajectoires orthogonales des lignes de courant
- n longueur d'arc le long des normales à la surface

t coordonnée temporelle
$e_1(s, z)$ mesure de la distance de lignes equipotentielles à la paroi
$e_2(s, z)$ mesure de la distance de courant parietales de l'écoulement à potentiel
$V(u, w, v)$ vecteur-vitesse dont les composantes sont prises en direction de s, z, n
p pression
ρ masse volumique
μ viscosité physique $\left(\nu = \frac{\mu}{\rho} \text{ viscosité cinématique}\right)$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] E. A. Eichelbrenner et R. Ašković, *Sur une méthode approchée de traiter les couches limites laminaires en régime instationnaires d'un écoulement en fluide incompressible à trois dimensions*, Jour. Méc., Vol. 6, № 3, 1967.

[2] W. D. Hayes *The three-dimensional boundary layer*. Navord Rep., 1313, Washington, 1951.

[3] C. C. Lin *Notion in the boundary layer with a rapidly oscillating external flow*. Proc. 9th. Intern. Congress Appl. Mech., Brussels, 1957.

[4] R. Ašković *Tridimenzijski periodični granični sloj na telu koje se harmonijski oscilatorno kreće u spoljašnoj struji*. Présenté au Congrès Yougoslave de Mécanique rationnelle et appliquée, Juin, 1968.