PUBLICATIONS DE L'INSTITUT MATHEMATIQUE
Nouvelle série, tome 9 (23) 1969. pp. 203—216

SUR LES MOUVEMENTS ANALOGUES D'UN GAZ PARFAIT ET D'UN FLUIDE INCOMPRESSIBLE

K. Voronjec

(Communiqué le 27 Novembre 1968)

Dans le cas de mouvement permanent plan d'un gaz l'équation de continuité $\operatorname{div}(\rho \vec{v}) = 0$ permet d'introduire la fonction de courant ψ par des équations

$$\rho v_x = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \qquad \rho v_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x},$$

où ρ désigne la densité et v_x et v_y sont des projections de la vitesse $\vec{v}$. Si le gaz est parfait et le mouvement adiabatique l'équation d'énergie se réduit à

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{p}{\rho^{\varkappa}}\right) = 0$$

et détermine la pression p par l'équation

$$p = \rho^{\varkappa}\, \varepsilon(\psi) \tag{1}$$

avec $\varepsilon(\psi)$ — fonction arbitraire de ψ et $\varkappa$ le rapport des chaleurs spécifiques du gaz (pour l'air $\varkappa = 1{,}4$).

On sait*) que la compatibilité des équations d'Euler exige que le tourbillon

$$2\omega = \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}$$

soit donné par la formule

$$\frac{2\omega}{\rho} = \frac{1}{\varkappa - 1}\rho^{\varkappa-1}\varepsilon' - \lambda', \tag{2}$$

*) Voir p.e. [1]

où λ' est la dérivée par rapport à ψ d'une nouvelle fonction arbitraire λ de ψ. On déduit ensuite, en intégrant les équations d'Euler, que

$$\frac{v^2}{2}+\frac{\varkappa}{\varkappa-1}\varepsilon\rho^{\varkappa-1}=\lambda. \tag{3}$$

L'étude d'un tel problème est liée, ordinairemment, à des suppositions que l'on fait sur la nature de deux fonctions arbitraires λ et ε de ψ. Si les deux fonctions sont constantes, le mouvement est irrotationnel et nous laissons à part ce cas comme bien étudié par plusieurs auteurs. On trouve aussi des méthodes approximatives liées à la théorie des fonctions de variable complexe[2], [3]. Le mouvement peut être irrotationnel aussi dans le cas où cette condition n'est pas accomplie*).

Dans la théorie classique on admet souvent que ε ne change pas, mais que λ n'est pas une constante. D'autre part, dans des travaux récents on suppose parfois que le mouvement rotationnel se produit sous la condition que λ est une constante et que ε varie. On trouve des résultats intéressants dans[4].

Tenant compte du fait que les conditions dynamiques sont plus naturelles dans l'analyse de mouvement d'un fluide compressible et qu'elles jouent le même rôle que les conditions cinématiques dans le cas d'un fluide incompressible, nous avons analysé, dans un travail récent[1], le mouvement soumis à la condition que rot $(\rho\vec{v})=0$, équivalente, dans le problème plan, à l'équation

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho v_y)-\frac{\partial}{\partial y}(\rho v_x)=0.$$

Il est évident que dans ce cas la fonction ψ est harmonique et peut ainsi correspondre à la fonction de courant d'un movement irrotationnel plan d'un fluide incompressible. On peut, donc, introduire une fonction φ, harmonique aussi, par l'équation $\rho\vec{v}=\operatorname{grad}\varphi$ et considérer la fonction analytique complexe $w(z)=\varphi+i\psi$ de variable complexe $z=x+iy$. Comme conséquence on arrive à deux équations

$$\operatorname{div}\vec{v}=-v^2\frac{\partial\rho}{\partial\varphi},\quad 2\omega=v^2\frac{\partial\rho}{\partial\psi},$$

où on a passé à des coordonnés φ et ψ à la place de x et de y.

Dans le travail cité nous pouvions intégrer ces équations grâce au fait que la seconde, d'après (2) et (3), ne dépend que de ρ et de ψ. Le résultat d'intégration

$$2\rho^{m+1}\lambda^{\frac{m+1}{2}}\left[1-\frac{(m+1)\varkappa}{(m+\varkappa)(\varkappa-1)}K_m\rho^{\varkappa-1}\lambda^{\frac{m(\varkappa-1)}{m-\varkappa}}\right]=(m+1)\mu \tag{4}$$

*) Voir p.e. [4]

contient un paramètre m et détermine ρ en fonction de λ et d'une nouvelle fonction μ de φ, liée à la divergence de $\vec{v}$ par la formule

$$\rho^m \lambda^{\frac{m-1}{2}} \operatorname{div} \vec{v} = -\mu'. \tag{5}$$

La fonction $\varepsilon(\psi)$, désignée par ε_m, devient une fonction de λ donnée par la formule

$$\varepsilon_m = K_m \lambda^{\frac{(m-1)\varkappa}{m-\varkappa}}, \tag{6}$$

où K_m est une constante d'intégration qui peut dépendre de m.

Pour les valeurs $m=-1$, $m=\varkappa$, $m=-\varkappa$ et $m=-\infty$ le calcul doit être effectué séparement et l'équation (4) prend une autre forme. On peut noter aussi quelques valeurs caractéristiques de m: les fonctions λ et ε sont proportionnelles l'une à l'autre pour $m=0$, pour $m=1$ ε est une constante et pour $m=\varkappa$ cette propriété a la fonction λ. Enfin, pour $m=1-2\varkappa$, $m=\varkappa-2$ et $m=-(\varkappa+1)/2$ l'équation (4) devient de deuxième ordre et peut être résolue par rapport à ρ.

Les résultats obtenus ne peuvent pas être appliqués que dans le cas où la fonction ψ est harmonique. On peut essayer de satisfaire à cette condition en considérant la fonction $\ln(\rho v)$ qui doit être aussi harmonique. Ce calcul n'était pas effectué dans le travail cité [1] et nous le donnons plus loin, mais on a constaté que toutes les conditions sont satisfaites si $\mu=\text{const.}$, ce qui correspond à la densité qui est fonction de ψ seulement.

Il est nécessaire, donc, de satisfaire à l'équation

$$\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} \ln(\rho v) + \frac{\partial^2}{\partial\psi^2} \ln(\rho v) = 0,$$

où, d'après (3) et (4), $\ln(\rho v)$ peut être considéré comme une fonction de $\lambda(\psi)$ et de $\mu(\varphi)$.

Pour simplifier le calcul on introduit la fonction

$$F(\lambda, \mu) = K_m \frac{\varkappa}{\varkappa-1} \rho^{\varkappa-1} \lambda^{\frac{m(\varkappa-1)}{m-\varkappa}}$$

à la place de ρ et l'on obtient

$$v^2 = 2\lambda(1-F).$$

Un changement de variables

$$\frac{(m+1)(m+\varkappa)}{2(m-\varkappa)} \ln\lambda = \lambda_1,$$

$$\ln\frac{m+1}{2} + \frac{m+1}{\varkappa-1} \ln\frac{\varkappa K_m}{\varkappa-1} + \ln\mu = \mu_1,$$

valable si $(m+1)\mu$ est plus grand que 0 (λ, ε et K_m sont positifs) permet d'écrire l'équation (4) sous la forme

$$F_1^{\frac{m+1}{\varkappa-1}}\left(1-\frac{m+1}{m+\varkappa}F_1\right)=e^{\lambda_1+\mu_1}, \tag{4'}$$

où F_1 remplace la fonction F et peut être considéré comme une fonction de $\lambda_1+\mu_1$

$$F(\lambda, \mu)\equiv F_1(\lambda_1+\mu_1).$$

Si $(m+1)\mu$ est négatif, rien ne change pas dans le calcul qui suit, sauf que e^{μ_1} doit être remplacé par $-e^{\mu_1}$.

On arrive ainsi à l'expression

$$\left[\ln(\rho v)+\frac{1}{\varkappa-1}\ln\frac{\varkappa K_m}{\varkappa-1}-\frac{1}{2}\ln 2\right](m+1)=-\lambda_1+F_2$$

déterminant $\ln(\rho v)$ avec

$$F_2(\lambda_1+\mu_1)=\frac{m+1}{\varkappa-1}\ln F_1+\frac{m+1}{2}\ln(1-F_1). \tag{7}$$

La condition que $\ln(\rho v)$ soit une fonction harmonique par rapport aux variables φ et ψ amène à l'équation

$$\lambda_1''(F_2'-1)+\mu_1''F_2'+(\lambda_1'^2+\mu_1'^2)F_2''=0,$$

ou

$$(F_2'-1)\frac{\partial U}{\partial\lambda_1}+F_2'\frac{\partial U}{\partial\mu_1}+2UF_2''=0$$

si l'on désigne par U l'expression $\lambda_1'^2+\mu_1'^2$. Tenant compte du fait que F_2 est une fonction de la somme $\lambda_1+\mu_1$ et ne dépend pas de la différence $\lambda_1-\mu_1$, il est facile d'intégrer cette équation par des méthodes habituelles. En partant de

$$\frac{d\lambda_1}{F_2'-1}=\frac{d\mu_1}{F_2'}=-\frac{dU}{2UF_2''}$$

on obtient après l'intégration

$$U=\Phi' f[(\lambda_1-\mu_1)-\Phi(\lambda_1+\mu_1)], \tag{8}$$

où f est une fonction arbitraire de l'argument noté et où la fonction Φ est déterminée par

$$\Phi(\lambda_1+\mu_1)=\int\frac{d(\lambda_1+\mu_1)}{1-2F_2'}. \tag{9}$$

La fonction U étant une somme de deux fonctions, une de φ et l'autre de ψ seulement, l'expression (8) doit satisfaire à la condition $\partial^2 U/\partial\lambda_1\,\partial\mu_1 = 0$, ce qui amène à l'équation différentielle

$$\Phi''' f - 3\,\Phi'\,\Phi'' f' - \Phi'\,(1-\Phi'^2)\,f'' = 0, \tag{10}$$

où par le signe „'" sont désignées les dérivées des fonctions Φ et f par rapport à leurs arguments. L'équation (10) détermine d'un part la fonction arbitraire f et, d'autre part, donne la forme acceptable de la fonction Φ, c'est à dire F_2 et F_1.

La fonction Φ ne dépendant pas de la différence $\lambda_1 - \mu_1$ il est naturel de chercher la solution de (10) sous la forme

$$f = C'\,e^{k\,(\lambda_1-\mu_1)}$$

et l'on constate tout de suite que d'après (8) C' (fonction de $\lambda_1+\mu_1$) doit être égal à

$$C' = Ce^{-k\,\Phi}.$$

Il s'ensuit, donc, que

$$f = Ce^{k\,(\lambda_1-\mu_1-\Phi)}$$

avec C et k constantes. L'équation (10) devient alors

$$\Phi'\,(\Phi'^2-1)\,k^2 - 3\,\Phi'\,\Phi''\,k + \Phi''' = 0. \tag{11}$$

Pour chaque valeur de paramètre m la fonction F_2 et, à cause de (9), la fonction Φ aussi sont complétement définies (à une constante additionnelle près). Il est, donc, évident que dans le cas général aucune valeur constante de k ne satisfaira pas à l'équation (11) Mais il n'est pas sans intérêt de résoudre l'équation (11) et de trouver l'expression générale de Φ pour essayer d'accomoder à cette expression les fonctions F_2 et F_1 par un choix convenable de paramètre m et des constantes d'intégration.

Si la forme de fonction Φ permet de trouver deux valeurs constantes k_1 et k_2 de k on obtient, d'après (8)

$$\lambda_1'^2 + \mu_1'^2 = \Phi'\,[C_1\,e^{k_1\,(\lambda_1-\mu_1-\Phi)} + C_2\,e^{k_2\,(\lambda_1-\mu_1-\Phi)}] \tag{12}$$

avec deux constantes C_1 et C_2. D'autre part, on peut intégrer (11) pour k arbitraire et déterminer ainsi Φ contenant le paramètre k. Dans ce cas l'équation (8) donne

$$\lambda_1'^2 + \mu_1'^2 = C\,\Phi'\,e^{k\,(\lambda_1-\mu_1-\Phi)}. \tag{12'}$$

Le nombre des contantes d'intégration reste évidemment le même dans les deux cas.

Après quelques transformations on obtient l'équation (11) sous la forme

$$\left[\frac{d^2}{d\,(\lambda_1+\mu_1)^2} - k^2\right]\frac{d}{d\,(\lambda_1+\mu_1)}\,e^{-k\,\Phi} = 0,$$

d'où l'on tire

$$e^{-k\,\Phi} = \frac{c_1}{k}\,e^{k\,(\lambda_1+\mu_1)} - \frac{c_2}{k}\,e^{-k\,(\lambda_1+\mu_1)} + 2\,\frac{c_3}{k}$$

avec des constantes d'intégration c_1, c_2, c_3. Puisque

$$\Phi' = -\frac{c_1 e^{k(\lambda_1+\mu_1)} + c_2 e^{-k(\lambda_1+\mu_1)}}{c_1 e^{k(\lambda_1+\mu_1)} - c_2 e^{-k(\lambda_1+\mu_1)} + 2c_3} \tag{13}$$

on obtient de la formule (12') que

$$\lambda_1'^2 + \frac{Cc_1}{k} e^{2k\lambda_1} = -\left(\mu_1'^2 + \frac{Cc_2}{k} e^{-2k\mu_1}\right) = N, \tag{14}$$

où N est un nombre quelconque.

Cette équation détermine les fonctions $\lambda(\psi)$ et $\mu(\varphi)$ et le calcul pourrait être considéré comme terminé si la fonction Φ, donnée par (13), pourrait être accomodée à des fonctions F_2 et F_1 déterminées par (4') et (7).

Les équations (9) et (13) donnent

$$F_2' = \frac{c_1 e^{k(\lambda_1-\mu_1)} + c_3}{c_1 e^{k(\lambda_1+\mu_1)} + c_2 e^{-k(\lambda_1+\mu_1)}}$$

et l'on constate facilement que dans le cas général, où toutes les constantes c_1, c_2, c_3 diffèrent de 0, il faut supposer que $c_1/c_2 = -g^2 < 0$, car autrement F_2 ne pourrait pas s'exprimer par les logarithmes. Dans ce cas on a

$$F_2 = \frac{1}{2k}\left\{\left(1 + \frac{c_3}{c_2 g}\right)\ln[1 + ge^{k(\lambda_1+\mu_1)}] + \left(1 - \frac{c_3}{c_2 g}\right)\ln[1 - ge^{k(\lambda_1+\mu_1)}]\right\} + c_4. \tag{15}$$

Si c_3 est égal à 0 on obtient

$$F_2 = \frac{1}{2k}\ln\left[1 - \frac{c_1}{c_2} e^{2k(\lambda_1+\mu_1)}\right] + c_5 \tag{15'}$$

sans aucune restriction sur la valeur de rapport c_1/c_2. On obtient facilement les valeurs spéciales de la fonction F_2 si une ou deux constantes sont égales à 0.

Il reste à voir quelle forme de la fonction Φ permet d'obtenir deux valeurs différentes constantes de k. Cette fonction doit satisfaire dans ce cas à deux équations

$$\Phi'' = n(\Phi'^2 - 1), \quad \Phi''' = n_1(\Phi'^2 - 1)\Phi'.$$

Après un calcul élémentaire on obtient que $n_1 = 2n^2$ et l'équation (11) devient

$$k^2 - 3nk + 2n^2 = 0$$

avec des racines $k_1 = 2n$ et $k_2 = n$. La fonction Φ' prend alors la forme

$$\Phi' = -\frac{Ce^{n(\lambda_1+\mu_1)} + e^{-n(\lambda_1+\mu_1)}}{Ce^{n(\lambda_1+\mu_1)} - e^{-n(\lambda_1+\mu_1)}}.$$

En comparant cette expression avec (13) on voit qu'elle présente un cas particulier de (13) quand $c_3 = 0$ avec un changement modéré de désignations. Il n'est pas, donc, nécessaire d'analyser ce cas particulièrement, mais il faut tenir compte des équations (12) et (12') qui donnent des expressions différentes pour λ_1 et μ_1.

Les formules obtenues pour F_2 doivent coïncider avec (7). En partant de (15) on voit que l'on peut prendre

$$F_1 = \frac{1}{2}[1 - ge^{k(\lambda_1+\mu_1)}],$$

d'où l'on tire

$$1 - F_1 = \frac{1}{2}[1 + ge^{k(\lambda_1+\mu_1)}].$$

La supposition que

$$F_1 = \frac{1}{2}[1 + ge^{k(\lambda_1+\mu_1)}$$

amène à des résultats identiques. Ensuite il faut poser

$$\frac{m+1}{\varkappa-1} = \left(1 - \frac{c_3}{c_2 g}\right)\frac{1}{2k}, \quad \frac{m+1}{2} = \left(1 + \frac{c_3}{c_2 g}\right)\frac{1}{2k},$$

d'où l'on calcule

$$\frac{c_3}{c_2 g} = -\frac{3-\varkappa}{\varkappa+1}, \quad k = \frac{2}{m+1}\,\frac{\varkappa-1}{\varkappa+1}.$$

Avec

$$c_4 = -\frac{m+1}{3}\,\frac{\varkappa+1}{\varkappa-1}\ln 2$$

les deux expressions de F_2 coïncident. On voit tout de suite que les expressions de F_2 correspondantes à des cas spéciaux où une au moin de constantes c_1, c_2, c_3 est nulle, ne peuvent pas être accomodées à la forme (7), car elles ne contiennent pas un nombre suffisant de constantes arbitraires.

Il faut, donc, accepter la forme (16) de F_1 pour que la fonction $\ln(\rho v)$ soit harmonique. Mais, d'autre part, F_1 doit satisfaire à l'équation (4'). Les valeurs de paramètre m, qui ne permettent pas de résoudre (4') par rapport à F_1, doivent être exclues, car d'après (16) F_1 est une simple fonction de $\lambda_1 + \mu_1$. Un calcul élémentaire montre qu'il n'existe pas de valeurs de m pour lesquelles l'équation (4') pourrait être satisfaite par (16). On arrive ainsi à la conclusion que F_1 ne peut pas être considéré comme une fonction de λ et de μ. Il faut accepter la valeur constante pour une de ces deux quantités. Laisson à part le cas où λ est une constante, car d'après (2) et (6) cette supposition correspond, dans le cas général, à un movement irrotationnel. Il reste, donc, à analyser le cas où μ est une constante.

Soit $\mu = \bar{\mu} = \text{const.}$ Il s'ensuit de (4) que la densité ne dépend que de ψ et que $\operatorname{div}\vec{v} = 0$. Le mouvement se produit, donc, dans des couches fluides des densités constantes mais différentes. D'après (2) et (3) le tourbillon et le carré de vitesse ne dépend non plus de φ et il est de même pour $\ln(\rho v)$.

La fonction $\ln(\rho v)$ étant harmonique, on voit qu'elle est une fonction linéaire de ψ et que l'angle ϑ que fait la vitesse avec l'axe des x est une fonction linéaire de φ. Dans le travail [1] déjà cité nous avons trouvé que le mouvement correspondant est donné par la fonction analytique

$$w = \frac{\Gamma}{2\pi i}\ln z.$$

On voit que le mouvement irrotationnel d'un fluide incompressible, conjugué à celui étudié ici, présente le mouvement dans le champ d'un tourbillon isolé de la circulation Γ. Le mouvement correspondant de fluide compressible, pour toute les valeurs de paramètre m, se produit aussi le long des cercles concentriques, mais il est rotationnel. La constante Γ présente ici la circulation de vecteur ρv. La circulation de vitesse, évidemment, n'est plus constante. Notons ici que l'on obtient le même système de lignes de courant aussi dans des autres cas où la densité est une fonction de ψ seulement.

La supposition que $\ln(\rho v)$ est une constante est sans intérêt car elle correspond à un mouvement uniforme à la densité constante.

En appliquant les coordonnées polaires r et θ on obtient les formules

$$\varphi = \frac{\Gamma}{2\pi}\theta; \quad \psi = -\frac{\Gamma}{2\pi}\ln r,$$

$$\rho v_x = -\frac{\Gamma}{2\pi}\frac{\sin\theta}{r} = -\frac{\Gamma}{2\pi}e^{\frac{2\pi}{\Gamma}\psi}\sin\frac{2\pi}{\Gamma}\varphi,$$

(17)

$$\rho v_y = \frac{\Gamma}{2\pi}\frac{\cos\theta}{r} = \frac{\Gamma}{2\pi}e^{\frac{2\pi}{\Gamma}\psi}\cos\frac{2\pi}{\Gamma}\varphi,$$

$$v_r = 0, \quad \rho v_\theta = \rho v = \frac{\Gamma}{2\pi}\frac{1}{r} = \frac{\Gamma}{2\pi}e^{\frac{2\pi}{\Gamma}\psi}.$$

De point de vue géométrique le mouvement est le même pour toutes les valeurs de paramètre m. Mais pour trouver la densité, la pression, la vitesse etc. il faut choisir une valeur de m puisque toutes ces quantités varient avec m. On peut le faire dans la forme explicite pour certaines valeurs de m, notées plus haut, permettant de résoudre l'équation (4). La constante $\bar{\mu}$ reste dans ce calcul arbitraire. Dans ce qui suit les exemples sont choisis autrement. En admettant que $\bar{\mu}=0$ on trouve toutes les quantités cherchées comme fonction de m se trouvant dans un certain intervalle.

Soit $\bar{\mu}=0$. Il s'ensuit de (4) que

$$\rho = a_m \lambda^{-\frac{m}{m-\varkappa}} \tag{18}$$

avec

$$a_m^{\varkappa-1} = \frac{m+\varkappa}{m+1}\cdot\frac{\varkappa-1}{\varkappa K_m}$$

et l'on a la condition $(m+\varkappa)/(m+1)>0$. Avec cette valeur de ρ on obtient pour le carré de vitesse l'expression

$$v^2 = -2\frac{\varkappa-1}{m+1}\lambda, \tag{19}$$

d'où l'on tire que $(m+1)<0$ et enfin $m<-\varkappa$. Tenant compte de cette restriction il est utile d'introduire le paramètre j à la place de m par la relation $m/(m+\varkappa)=j$ (j varie de 1 à ∞) et d'effectuer le calcul suivant. On pose (18)

et (19) dans la formule (17) déterminant ρv et l'on calcule ainsi λ en fonction de ψ ou de r. Ensuite (18) nous donne la densité ρ. Il est facile maintenant de trouver les projections v_x et v_y de la vitesse en utilisant les formules (17). La formule (6) détermine ε_m après quoi on calcule, d'après (1) et (2), la pression et le tourbillon. En exprimant toutes ces quantités en coordonnées polaires on obtient les formules suivantes:

$$\lambda = b_m^2 \frac{j + \frac{1}{\varkappa - 1}}{2(j-1)} r^{2(2j-1)},$$

$$\rho = \frac{\Gamma}{2\pi} b_m^{-1} r^{-2j}, \quad v = b_m r^{2j-1},$$

$$2\omega = 2 b_m j r^{2(j-1)}, \quad p = \frac{\Gamma}{2\pi} \frac{b_m}{2(j-1)} r^{2(j-1)}, \tag{20}$$

$$\varepsilon_m = \left(\frac{2\pi}{\Gamma}\right)^{\varkappa-1} \frac{b_m^{\varkappa+1}}{2(j-1)} r^{2(j\varkappa+j-1)}$$

avec

$$b_m^{\frac{m+\varkappa}{m-\varkappa}} = \frac{2\pi}{\Gamma}\left(-2\frac{\varkappa-1}{m+1}\right)^{\frac{m}{m-\varkappa}} a_m.$$

Les expressions (19) contiennent quelques constantes arbitraires qui doivent être déterminées par des condition aux limites. Si l'on accepte comme condition que la vitesse est v_0 et la densité est ρ_0 sur le cercle de rayon r_0, on obtient que

$$b_m = v_0 r_0^{1-2j}, \quad \Gamma = 2\pi \rho_0 r_0 v_0,$$

ce qui est admissible car dans l'expression de b_m se trouve une constante arbitraire K_m. Les équations (20) deviennent

$$\lambda = \frac{v_0^2}{2} \frac{j + \frac{1}{\varkappa - 1}}{j-1} \left(\frac{r}{r_0}\right)^{2(2j-1)},$$

$$\rho = \rho_0 \left(\frac{r}{r_0}\right)^{-2j}, \quad v = v_0 \left(\frac{r}{r_0}\right)^{2j-1}, \tag{20'}$$

$$2\omega = \frac{2 j v_0}{r_0} \left(\frac{r}{r_0}\right)^{2(j-1)}, \quad p = \frac{\rho_0 v_0^2}{2(j-1)} \left(\frac{r}{r_0}\right)^{2(j-1)}$$

$$\varepsilon_m = \frac{v_0^2 \rho_0^{1-\varkappa}}{2(j-1)} \left(\frac{r}{r_0}\right)^{2(j\varkappa-j-1)}$$

et l'on y tire quelques conclusions intéressantes.

Sur le cercle $r=r_0$, où $v=v_0$ et $\rho=\rho_0$, les autres quantités sont données par des formules

$$\lambda_0=\frac{v_0^2}{2}\,\frac{j+\dfrac{1}{\varkappa-1}}{j-1}\,,\quad 2\,\omega=2\,j\,\frac{v_0}{r_0}\,,$$

$$p_0=\frac{\rho_0\,v_0^2}{2\,(j-1)}\,,\quad \varepsilon_m=\frac{v_0^2\,\rho_0^{1-\varkappa}}{2\,(j-1)}$$

et l'on voit qu'elles varient avec le paramètre j. Remarquons ici que j varie dans l'intervalle de 1 à ∞, mais qu'il ne peut pas prendre les valeurs extrèmes dans cet intervalle. Ces valeurs de j correspondent à des valeurs spéciales de m, notées plus haut, pour lesquelles l'équation (4) change sa forme. Si j croît le tourbillon tend vers l'infini, la pression et la fonction ε_m tendent vers 0 et λ vers $v_0^2/2$. Pour que ces quantités soient déterminées il est nécessaire de donner une condition complémentaire, par exemple, la valeur d'une de ces quantités sur le cercle $r=r_0$. Ce fait est tout à fait naturel car il s'agit ici d'un mouvement rotationnel.

La condition complémentaire peut se rapporter à un autre cercle, de rayon $r=r_1$, si le mouvement se produit entre deux cylindres circulaires coaxiaux. Il suffit de donner, avec certaines restrictions, la valeur d'une seule de quantités (20′) sur ce cercle et de trouver ainsi la valeur correspondante de j. Par exemple, si la vitesse est v_1 sur le cercle $r=r_1$, on obtient

$$2\,j-1=\frac{\ln\,(v_1/v_0)}{\ln\,(r_1/r_0)}\,.$$

Puisque $2j-1>0$ la vitesse v_1 doit être choisie de tel sorte que $\ln\,(v_1/v_0)$ soit plus grand que $\ln\,(r_1/r_0)$.

Enfin, le fluide peut être soumis à des conditions provenant de son état thermique. Le gaz étant parfait on tire de l'équation d'état

$$p=\frac{\varkappa-1}{\varkappa}\,Jc_p\,\rho\,T,$$

(c_p est la chaleur spécifique à pression constante, J l'équivalent mécanique de calorie, T la température) que

$$T=\frac{\varkappa}{\varkappa-1}\,\frac{1}{j-1}\,\frac{v_0^2}{2\,Jc_p}\left(\frac{r}{r_0}\right)^{2\,(2j-1)}.$$

Cette équation détermine le paramètre j si, par exemple, la température de cylindre $r=r_0$ est constante et égale à T_0.

On peut étudier l'influence de paramètre j sur le mouvement entre deux cylindres en appliquant les formules (20′) dans le cas où $r=r_1$. On obtient

$$v_1=v_0\left(\frac{r_1}{r_0}\right)^{2\,(j-1)}\,,\quad \rho_1=\rho_0\left(\frac{r_1}{r_0}\right)^{-2j}$$

d'où l'on tire que $v_1>v_0$ et que $\rho_1<\rho_0$ quand $r_1>r_0$ et inversement. Si $r_1>r_0$ la vitesse croît et la densité diminue quand j croît. Sans donner les formules correspondantes notons ici que c'est le tourbillon seulement qui croît avec j si

$r_1 > r_0$. Les autres quantités ont pour chaque valeur de r_1 un minimum et la valeur de j correspondante à ce minimum n'est pas la même pour ces quantités.

Cette particularité des formules obtenues permet de donner un criterium pour le choix de la valeur de j basé sur une sorte de postulat dynamique. En considérant le mouvement entre deux cylindres coaxiaux de rayons r_1 et r_0 $(r_1 > r_0)$ on part de la constatation qu'une certaine énergie est nécessaire pour former un tel mouvement avec les valeurs $v = v_0$ et $\rho = \rho_0$ sur le cylindre $r = r_0$. Le mouvement étant adiabatique et le gaz parfait l'énergie reste constante et la fonction λ représente cette énergie relative à l'unité de la masse fluide. Le mouvement étant plan on a la masse élémentaire $2\pi\rho\, rdr$ et l'énergie élémentaire correspondente $dE = 2\pi\rho\lambda\, rdr$. On obtient l'énergie totale de la couche fluide d'épaisseur 1 entre deux cylindres en intégrant cette expression. En utilisant les formules (20') on obtient

$$E = \pi\rho_0 r_0^2 v_0^2 \frac{j + \dfrac{1}{\varkappa - 1}}{2j(j-1)} \left[\left(\frac{r_1}{r_0} \right)^{2j} - 1 \right].$$

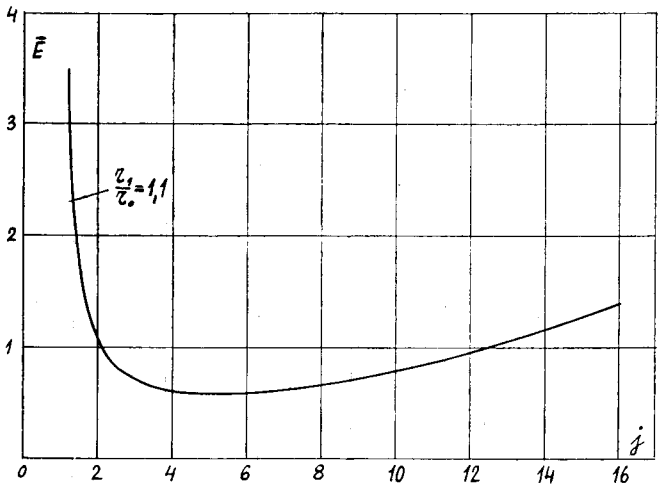

Fig. 1 a

Il est facile à voir que pour chaque valeur donnée de r_1/r_0 l'énergie E a son minimum à qui correspond une certaine valeur de j. Sur la fig. 1 sont tracées qulques courbes donnant la valeur de l'énergie non dimensionnelle $\bar{E} = E/\pi\rho_0 r_0^2 v_0^2$ en fonction de j pour quelques valeurs de rapport r_1/r_0. Il est naturel de supposer qu'un mouvement sera établi pour lequel l'énergie aura son minimum. En considérant E comme fonction de j et en égalant à O la dérivée de E par rapport à j, on arrive à l'équation

$$2j(j-1)\left(j + \frac{1}{\varkappa + 1}\right)\left(\frac{r_1}{r_0}\right)^{2j} \ln\left(\frac{r_1}{r_0}\right) - \left(j - \frac{1}{\sqrt{\varkappa} + 1}\right)\left(j + \frac{1}{\sqrt{\varkappa} - 1}\right)\left[\left(\frac{r_1}{r_0}\right)^{2j} - 1\right] = 0$$

déterminant j pour chaque valeur de $r_1/r_0 > 1$. La courbe sur la fig. 2 représente cette équation.

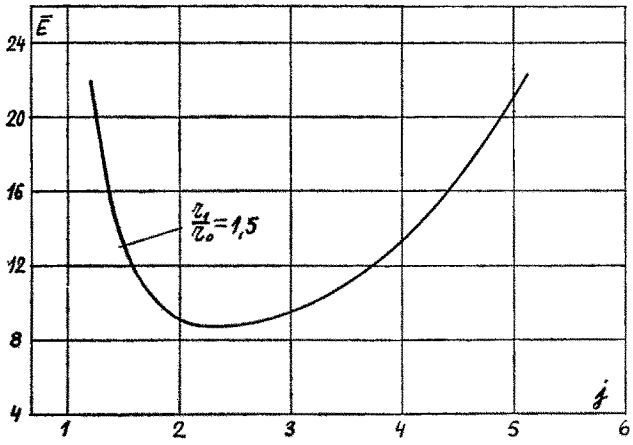

Fig. 1 b

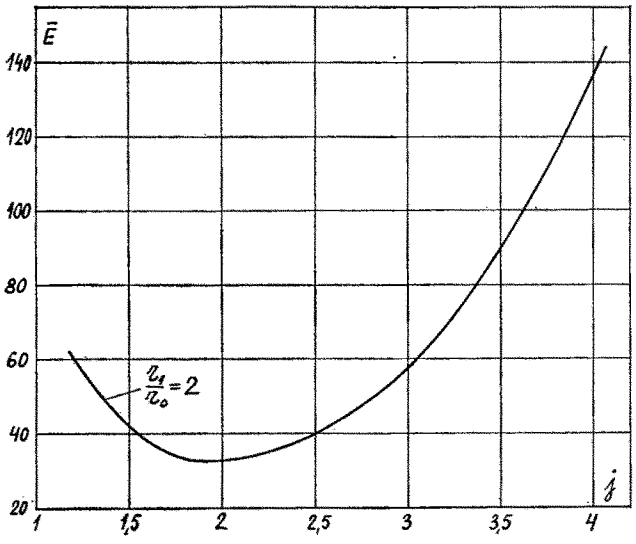

Fig. 1 c

Les expressions obtenues pour v_x et v_y montrent que la vitesse complexe $\bar{v}$ est une fonction non analytique car on peut écrire

$$\bar{v}=v_x-iv_y=-ib_m\, z^{-\frac{\varkappa}{m+\varkappa}}\, \bar{z}^{\frac{m}{m+\varkappa}}$$

ou, d'après (20'),

$$\bar{v}=-iv_0\, r_0^{1-2j}\, z^{j-1}\, \bar{z}^{j}.$$

Cette forme de $\bar{v}$ permet d'étudier l'influence de paramètre j sur le mouvement considéré d'un autre point de vue. Nous nous servirons de l'idée de A. Bilimovitch[5] développée ensuite par Fempl[6] sur la mesure de déflexion d'une fonction non analytique par rapport à une fonction analytique.

On nomme la déflexion de l'analyticité d'une fonction non analytique (vitesse complexe $\bar{v}$) l'expression

$$2\frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{z}} = \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y}\right) - i\left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}\right) = \operatorname{div} \vec{v} - i\,2\,\omega,$$

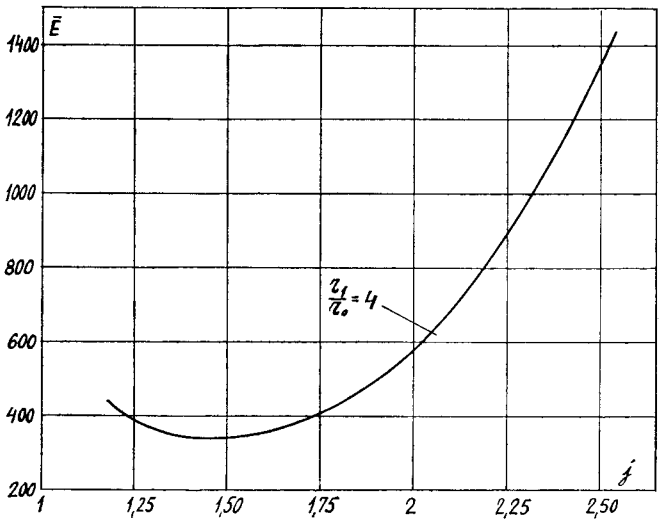

Fig. 1 d

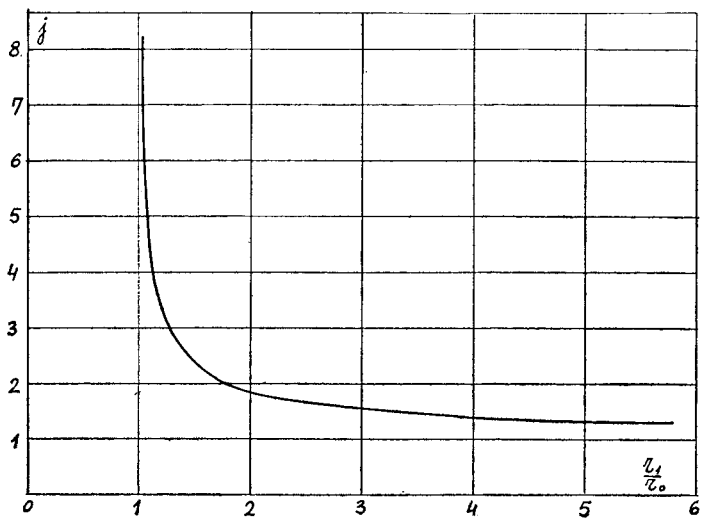

Fig. 2

que Bilimovitch étudie sous la forme vectoriel. Si la fonction $\bar{v}$ est analytique, cette expression est nulle si non, on peut chercher la déflexion de cette expression, la déflexion de deuxième ordre, $4\,\partial^2\bar{v}/\partial\bar{z}^2$. Ce procédé peut être répété et il peut arriver que la déflexion de l'ordre $j+1$ soit nulle. Nous laissons à part les propriétés analytiques et géométriques, d'ailleurs très intéressantes, des déflexions de premier ordre et des ordres plus élévés. Nous constatons seulement que ce procédé peut être appliqué dans le problème traité ici et est lié à des valeurs de paramètre j.

En effet, si l'on considère les valeurs positives et entières de j: 1, 2, 3, ... ∞ on voit que les valeurs de m: $-\infty$, $-2\varkappa$, $-3\varkappa/2$, ... $-\varkappa$, se trouvent dans l'intervalle acceptable dans le problème traité. Puisque les deux valeurs extrèmes doivent être exclues, on constate que la plus faible déflexion de fonction $\bar{v}$ est de l'ordre $2\,(j=2,\ m=-2\varkappa)$. L'analyse faite dans le cas où j croît correspond, donc, à des déflexions de plus en plus élévées. D'autre part, l'absence dans le problème traité de déflexions de l'ordre 1 et 0 empêche d'effectuer le passage à la fonction analytique et ne permet pas de donner un sens physique précis à des propriétes analytiques et géométriques de l'idée de A. Bilimovitch.

BIBLIOGRAPHIE

[1] K. Voronjec, *O nekim primenama kompleksnih funkcija u adijabatskim strujanjima neviskoznog gasa.* (sous presse)

[2] Чаплыгин, *О газовых струях.* Изв. Москов, Унив. 21 (1904), 1—21.

[3] Христианович, *Обтекание тел газом при больших звуковых скростях.* Труды У. А. Г. И, в. 481 (140).

[4] Кочин, Кибель, Розе, *Теоретическая Гидромеханика.* Часть II, (1963), стр. 35.

[5] A. Bilimovitch, *Sur la mesure de déflexion d'une fonction non analytique par rapport à une fonction analytique,* C. R. de l'Ac. des Sc. 237 (1953) Publ. Inst. Math. Ac. Serbe des Sc. T. V. (1954).

O meri otstupanja neanalitične funkcije od analitičnosti. Gl. SAN, CCXXI, Beograd (1956).

[6] S. Fempl, *O neanalitičnim funkcijama čije je odstupanje od analitičnosti analitična funkcija,* Glas SAN, CCLIV (1963).

O neanalitičnim funkcijama čije je drugo odstupanje od analitičnosti analitična funkcija. Vesnik Dr. Mat. i Fiz. SR Srbije, XV, 1—4, Beograd (1963).

Areolarui polinomi kao klasa neanalitičnih funkcija čiji su realni i imaginarni delovi poliharmonijske funkcije, Matem. vesnik I (16) 1954, str. 29—38.

Institut Mathématique
Beograd