PUBLICATIONS DE L'INSTITUT MATHÉMATIQUE
Nouvelle série, tome 9 (23), 1969. pp. 163—166.

SUR DEUX EQUATIONS FONCTIONNELLES MATRICIELLES

Radovan R. Janić

(Communiqué le 17 Mai 1968)

Dans cet article nous allons considérer deux équations fonctionnelles à plusieurs fonctions matricielles rectangulaires inconnues, les agruments étant des matrices carrées, commutatives et réelles.

1. Equation fonctionnelle $\mathbf{L}_1$

C'est l'équation fonctionnelle

$$F(x_1 y_2 - x_2 y_1,\ x_3 y_4 - x_4 y_3) = G(x_1 y_3 - x_3 y_1,\ x_2 y_4 - x_4 y_2) + H(x_1 y_4 - x_4 y_1,\ x_3 y_2 - x_2 y_3), \tag{1.1}$$

où x_i, y_j $(i, j = 1, 2, 3, 4)$ sont des matrices carrées et commutatives d'ordre (n, n) et F, G, H des fonctions matricielles d'ordre (m, s), que l'on va appeler: *équation fonctionnelle* $\mathbf{L}_1$.

C'est pour l'équation $\mathbf{L}_1$ que nous allons démontrer le résultat suivant:

Théorème 1.1. *La solution générale mesurable de l'équation fonctionnelle* $\mathbf{L}_1$ *est donnée par les formules*

$$\begin{aligned} F(X, Y) &= \sum_{i,j=1}^{n} K_{ij} z_{ij} + A + B, \\ G(X, Y) &= \sum_{i,j=1}^{n} K_{ij} z_{ij} + A, \\ H(X, Y) &= \sum_{i,j=1}^{n} K_{ij} z_{ij} + B, \end{aligned} \tag{1.2}$$

où K_{ij}, A *et* B *sont des matrices constantes d'ordre* (m, s) *arbitraires et* z_{ij} *sont les éléments de la matrice* $\|z_{ij}\| = Z = XY$.

Démonstration. En posant $x_1 = u$, $x_3 = v$, $x_2 = x_4 = y_1 = y_3 = 0$ (0 — matrice zéro), $y_2 = y_4 = I$ (I — matrice unité) dans $\mathbf{L}_1$, on obtient

$$H(u, v) = F(u, v) - A, \tag{1.3}$$

avec $A = G(0, 0)$.

Si l'on pose, dans (1.1), $x_1=u$, $x_4=-v$, $x_2=x_3=y_1=y_4=0$, $y_2=y_3=I$, on trouve

$$G(u, v)=F(u, v)-B, \tag{1.4}$$

avec $B=H(0, 0)$.

Après la substitution de (1.3) et (1.4) dans (1.1), l'équation $\mathbf{L}_1$ devient

$$\begin{aligned} F(x_1 y_2-x_2 y_1,\ x_3 y_4-x_4 y_3)&=F(x_1 y_3-x_3 y_1,\ x_2 y_4-x_4 y_2)\\ &+F(x_1 y_4-x_4 y_1,\ x_3 y_2-x_2 y_3)-A-B. \end{aligned} \tag{1.5}$$

Si l'on introduit la nouvelle fonction E par la substitution

$$E(u, v)=F(u, v)-A-B, \tag{1.6}$$

l'équation (1.5) devient

$$\begin{aligned} E(x_1 y_2-x_2 y_1,\ x_3 y_4-x_4 y_3)&=E(x_1 y_3-x_3 y_1,\ x_2 y_4-x_4 y_2)\\ &+E(x_1 y_4-x_4 y_1,\ x_3 y_2-x_2 y_3). \end{aligned} \tag{1.7}$$

L'équation (1.7) peut s'écrire sous la forme que voici (*voir*: **[1]** et **[2]**)

$$g(X+Y)=g(X)+g(Y), \tag{1.8}$$

où la fonction g est définie par

$$E(u, v)=-E(uv, -I)=g(uv). \tag{1.9}$$

La solution générale mesurable de (1.8) est donnée par

$$g(X)=\sum_{i,j=1}^{n} K_{ij}\, x_{ij}, \tag{1.10}$$

où K_{ij} sont des matrices arbitraires d'ordre (m, s) et x_{ij} les éléments de la matrice $\|x_{ij}\|=X$.

D'après (1.3), (1.4), (1.6), (1.9) et (1.10) on obtient (1.2). Donc, le théorème 1.1 est prouvé.

P. M. Vasić et R. R. Janić ont considéré, dans **[1]**, l'équation fonctionnelle (1.7). Mais, utilisant un résultat incomplet de **[3]**, ils y ont donné une solution de cette équation qui n'était pas cependant sa solution mesurable générale. D'après (1.9) et (1.10) on obtient que la solution générale mesurable de l'équation (1.7) est donnée par

$$E(X, Y)=\sum_{i,j=1}^{n} K_{ij}\, z_{ij},$$

avec les mêmes significations de K_{ij} et z_{ij} que dans (1.2).

2. Equation fonctionnelle $\mathbf{L}_2$

C'est l'équation fonctionnelle

$$\begin{aligned} &F_0(x_1 y_2-x_2 y_1,\ z_2 t_3-z_3 t_2)+F_1(x_1 z_2-x_2 z_1,\ y_2 t_3-y_3 t_2)\\ &+F_2(x_1 t_2-x_2 t_1,\ y_3 z_2-y_2 z_3)+F_3(z_2 t_1-z_1 t_2,\ x_2 y_3-x_3 y_2)\\ &+F_4(y_1 t_2-y_2 t_1,\ x_2 z_3-x_3 z_2)+F_5(y_2 z_1-y_1 z_2,\ x_2 t_3-x_3 t_2)=0, \end{aligned} \tag{2.1}$$

où x_i, y_i, z_i, t_i $(i=1, 2, 3)$ sont des matrices carrées et commutatives d'ordre (n, n) et F_j $(j=0, 1, 2, 3, 4, 5)$ des fonctions matricielles d'ordre (m, s).

Nous allons prouver le résultat suivant:

Théorème 2.1. *La solution générale mesurable de l'équation fonctionnelle* $\mathbf{L}_2$ *est donnée par*

$$F_0(X, Y) = -\sum_{i,j=1}^{n} K_{ij} z_{ij} + A, \tag{2.2}$$

$$F_r(X, Y) = \sum_{i,j=1}^{n} K_{ij} z_{ij} + A_r \qquad (r=1, 2, 3, 4, 5), \tag{2.3}$$

où K_{ij} $(i, j=1, \ldots, n)$ *sont des matrices constantes d'ordre* (m, s), z_{ij} *les éléments de la matrice* $\|z_{ij}\| = Z = XY$ *et* A_r $(r=0, 1, 2, 3, 4, 5)$ *des matrices constantes d'ordre* (m, s) *tel que* $\sum_{r=0}^{5} A_r = 0$.

Démonstration. Si l'on remplace toutes les variables par u, l'équation (2.1) devient

$$A_0 + A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5 = 0, \tag{2.4}$$

avec $A_i = F_i(0, 0)$.

En posant dans (2.1) $x_1 = X$, $z_3 = -Y$, $y_2 = t_2 = I$ et en y remplaçant toutes les autres variables par 0, on obtient

$$F_0(X, Y) = -F_2(X, Y) + A_2 + A_0. \tag{2.5}$$

Par une voie analogue, on trouve (*voir*: [**2**])

$$\begin{aligned} &F_i(X, Y) = -F_2(X, -Y) + A_2 + A_i \quad (i=1, 3, 4), \\ &F_5(X, Y) = F_2(X, Y) - A_2 + A_5. \end{aligned} \tag{2.6}$$

Si l'on introduit une nouvelle fonction F par la substitution

$$F(X, Y) = F_2(X, Y) - A_2, \tag{2.7}$$

d'après (2.4), (2.5) et (2.6), l'équation (2.1) prend la forme que voici

$$\begin{aligned} &F(x_1 y_2 - x_2 y_1,\ z_2 t_3 - z_3 t_2) + F(x_1 z_2 - x_2 z_1,\ t_2 y_3 - t_3 y_2) \\ &- F(x_1 t_2 - x_2 t_1,\ z_2 y_3 - z_3 y_2) + F(t_1 z_2 - t_2 z_1,\ y_2 x_3 - y_3 x_2) \\ &+ F(y_1 t_2 - y_2 t_1,\ z_2 x_3 - z_3 x_2) - F(z_1 y_2 - z_2 y_1,\ x_2 t_3 - x_3 t_2) = 0. \end{aligned} \tag{2.8}$$

En remplaçant dans (2.8) toutes les variables par u, on obtient

$$F(0, 0) = 0. \tag{2.9}$$

Si, dans (2.8), l'on pose $x_1 = X$, $y_2 = z_2 = I$, $t_3 = Y$ et en remplaçant toutes les variables restantes par 0, on obtient, d'après $F(0, 0) = 0$,

$$F(X, -Y) = -F(X, Y). \tag{2.10}$$

D'après (2.10), l'équation (2.8) se réduit à

$$(2.11)\qquad \begin{aligned} &F(x_1 y_2 - x_2 y_1,\ z_2 t_3 - z_3 t_2) + F(x_1 z_2 - x_2 z_1,\ t_2 y_3 - t_3 y_2) \\ &+ F(x_1 t_2 - x_2 t_1,\ y_2 z_3 - y_3 z_2) + F(t_1 z_2 - t_2 z_1,\ y_2 x_3 - y_3 x_2) \\ &+ F(y_1 t_2 - y_2 t_1,\ z_2 x_3 - z_3 x_2) + F(z_1 y_2 - z_2 y_1,\ t_2 x_3 - t_3 x_2) = 0. \end{aligned}$$

L'équation (2.11) peut s'écrire sous la forme (1.8) (*voir*: [**2**] et [**3**]), où la fonction g est définie par

$$(2.12)\qquad F(u, v) = -F(uv, -I) = g(uv).$$

Donc, d'après (1.10), (2.12), (2.5), (2.6), (2.7) et (2.10) on obtient (2.2) et (2.3). On en conclut que le théorème 2.1 est vrai.

On affirme dans [**3**] que la solution générale mesurable de l'équation (2.11) soit donnée par la formule

$$(2.13)\qquad F(X, Y) = AXYB,$$

où A est une matrice constante d'ordre (m, n) et B une matrice constante d'ordre (n, s); toutes deux étant arbitraires.

La fonction F donnée par (2.13) est vraiment une solution de (2.11), mais elle n'est pas sa solution générale mesurable. D'après tout ce qui précède, on obtient que la solution générale mesurable de l'équation (2.11) est donnée par

$$F(X, Y) = \sum_{i,j=1}^{n} K_{ij} z_{ij},$$

avec K_{ij} et z_{ij} comme dans (1.2).

BIBLIOGRAPHIE

[1] P. M. Vasić et R. R. Janić, *Sur une équation fonctionnelle où interviennent les déterminants*, Matematički vesnik, **4** (19) (1967), 325—328.

[2] R. R. Janić, *O nekim opštim klasama funkcionalnih jednačina*, Publikacije Elektrotehničkog fakulteta, serija matematika i fizika, № **242** (1968), 1—56.

[3] O. Em. Gheorghiu, *Sur une équation fonctionnelle matricielle*, C. R. Acad. Sci. Paris, **256** (1963), 3562—3563.