PUBLICATIONS DE L'INSTITUT MATHÉMATIQUE
Nouvellé série, tome 9 (23), 1969, pp. 143—152.

ENSEMBLES ORDONNÉS, FONCTIONS RÉELLES, ESPACES DIAMÉTRIQUES

Michaël S. Benado

A la mémoire de ma mère
SOPHIE WECHSLER

(Communiqué le 26. 4. 1968 par D. Kurepa).

1. Introduction. On sait que les continus géométriques usuels (cf. [1], § 5, [2], 2. 3), ainsi que d'autres systèmes ordonnés tels les treillis normés ([6], p. 76), les multitreillis normés ([3], § 5). les arbres aux stellarités[1] dénombrables [7, 8] etc, ont cette propriété d'être munis d'une fonction réelle strictement croissante par rapport à l'ordre requis.

L'importance de cette classe d'ensembles ordonnés tient, sans doute, à ce que les chaînes d'un tel ensemble sont ordinalement isomorphes à des sous-chaînes de réels et par là, ils sont, pour ainsi dire, les proches parents des continus géométriques, qu'ils préfigurent.

La question se pose alors de chercher les conditions, afin qu'un ensemble ordonné muni d'une fonction strictement croissante, devienne un espace diamétrique ([2], 2. 2), dont l'ordre intrinsèque ([2], 2.1.2, 2.2.1) coïncide avec l'ordre apriorique de l'ensemble sousjacent. C'est le problème inverse de la théorie des continus géométriques en tant que multiplicités ordonnées.

Le but de la présente note, c'est de résoudre cette question dans le cas particulier des espaces fortement aconcentriques ([4], § 4), où les conditions requises (4.1, 4.2 ci-dessous) sont d'une remarquable simplicité et apparentées, par ailleurs, aux subévaluations[2] de multitreillis ([3], 4.7, particulièrement 4.7.4.1, inégalités (9), (9')), sauf qu'ici l'ensemble ordonné sousjacent n'est assujetti à aucune condition multiréticulaire. Seules sont requises, dans ce but, les propriétés de module réticulé conditionnellement complet du système des réels.

Il convient de remarquer à ce propos que la solution que je propose de ladite question, comprend le cas particulier important des ensembles ramifiés [7—9]; cf. théorèmes 5.2, 5.4 ci-dessous.

Un autre cas particulier remarquable est celui des multitreillis munis d'une évaluation de deuxième espèce d'en bas (et positive: théorème 6.1 ci-dessous).

---

[1] Abréviation pour nombre stellaire et nombre antistellaire; cf. [8].

[2] Abus de langage. On sait que l'existence d'une subévaluation multiréticulaire, n'est pas caractéristique de la semimodularité des multitreillis, ni même des treillis; cf. [6].

Dans le cas général, la question est plus difficile et semble étroitement liée à la théorie des positions relatives des corps d'un espace diamétrique [5]. Quoi qu'il en soit, j'en avais déjà dès 1963 proposée une solution fondée sur les positions relatives, mais valant seulement pour les continus géométriques arbitraires ([2], 2.1) en ce que la réduction des conditions requises, pour le cas particulier des espaces diamétriques, s'était averée chose extrêmement difficile. On verra d'ailleurs aux alinéas 3.5—3.7 et § 7 du présent travail, en quoi cette difficulté est liée à l'existence des intervalles non-tangentiaux.

2. *Définitions et notations.* 2.1. Soit E un ensemble ordonné (*alias* partiellement ordonné [6], p. 1) par une relation d'ordre $\geqslant$ ou $\leqslant$. Pour $a, b \in E$ tels que a non$\geqslant b$ et a non$\leqslant b$ j'écris $a \parallel b$, alors que $a \nparallel b$ signifie $a \geqslant b$ ou $a \leqslant b$.

2.1.1. On pose en outre $u \in a \sqcup b \Leftrightarrow u \in E$, $u \geqslant a$, $u \geqslant b$ et $v \in a \sqcap b \Leftrightarrow v \in E$, $v \leqslant a$, $v \leqslant b$ $(a, b \in E)$. En particulier $a \sqcap a = a^{\sqcap}$ dénote *l'idéal principal engendré pour* $a \in E$ ([6]. p. 58): par dualité ([6], p. 3) on définit aussi l'idéal principal *dual* $a \sqcup a = a^{\sqcup}$ engendré par $a \in E$.

L'ensemble vide est noté par $\varnothing$.

2.1.2. L'ensemble ordonné E est dit *filtrant d'en haut* (directed set [6], p. XI) si pour tous les $a, b \in E$, on a $a \sqcup b \neq \varnothing$ (2.1.1). Par dualité on définit aussi la *filtration d'en bas.*

2.2. Une application $a \to a\varphi$, $a \in E$, $a\varphi \in R\#$ de l'ensemble ordonné E dans la chaîne $R\#$ des réels sera dite *strictement croissante* ou encore positive, si l'on a: $a, a' \in E$, $a' < a \Rightarrow a'\varphi < a\varphi$, où $a' < a \Leftrightarrow a' \leqslant a$ et $a \neq a'$; cf. [6], p. 74.

2.3. Une fonction réelle $a \to a\varphi$, $a \in E$ sera dite *subévaluation d'en bas,* si pour les $a, b \in E$ tels que $a \sqcup b \neq \varnothing \neq a \sqcap b$ (2.1.1) et chaque $v \in a \sqcap b$, on peut trouver un $u \in a \sqcup b$ tel que $a\varphi + b\varphi \geqslant u\varphi + v\varphi$.

2.4. Un ensemble ordonné muni d'une subévaluation d'en bas, positive, sera dit *sousnormé d'en bas.*

Pour la commodité du lecteur, je rappelle en outre les notions suivantes:

2.5. D'après M. Georges Kurepa [7—9], on appelle *ensemble ramifié,* tout ensemble ordonné, dont les idéaux principaux (2.1.1) sont des chaînes (par rapport à l'ordre induit).

Le dual d'un ensemble ramifié n'est pas nécessairement ramifié; mais ses idéaux principaux *duaux* (2.1.1) sont toujours des chaînes. C'est pourquoi il convient d'appeler *ensemble ramifié dual,* le dual de tout ensemble ramifié.

2.6. Toujours d'après M. Kurepa (l. c.) un ensemble ordonné est dit *arbre,* si ses idéaux principaux sont bien ordonnés (par l'ordre induit). Il suit de là que tout arbre est un ensemble ramifié.

Le dual d'un arbre sera dit *arbre dual.*

2.7. Je dis qu'un ensemble ordonné est un *multitreillis,* s'il vérifie les deux conditions suivantes (cf. mon travail [3], 1.1).

M 1. *Pour tous les* $a, b, u \in E$ *tels que* $u \in a \sqcup b$ (2.1.1) *il existe* $d \in E$ *tel que* $u \geqslant d \in a \sqcup b$ *et tel que pour chaque* $d' \in E$ *vérifiant* $d \geqslant d' \in a \sqcup b$, *on ait* $d = d'$.

M 2. *Pour tous les* $a, b, v \in E$ *tels que* $v \in a \sqcap b$, *il existe* $m \in E$ *tel que* $v \leqslant m \in a \sqcap b$ *et tel que pour chaque* $m' \in E$ *vérifiant* $m \leqslant m' \in a \sqcap b$, *on ait* $m = m'$.

On trouvera dans [3], 1.2, maints exemples algébriques et géométriques de multitreillis.

2.8. J'appelle *espace diamétrique* tout ensemble non vide E, muni d'une fonction réelle $\delta(x, y)$ vérifiant $\delta(a, b) = \delta(b, a)$ et $\delta(a, b) + \delta(c, c) \leqslant \delta(a, c) + \delta(c, b)$ pour tous les $a, b, c \in E$. Cf. mes travaux [1, 2, 4, 5], particulièrement [2]. 2.2, 2.3.

2.8.1. Tout espace diamétrique E est un ensemble ordonné „*intrinsèquement*" par *l'intériorité* de ses corps: $a, a' \in E$, $a' \leqslant a \Leftrightarrow \delta(a, a') \leqslant \delta(a, a)$; cf. toujours [1, 2, 4, 5], particulièrement [1], § 3 et [2], 2.1.2, 2.2.1.

Au cas, où pour $a, a' \in E$ tels que $a' \leqslant a$, on a même $\delta(a, a') = \delta(a, a)$, on dit que les corps $a, a' \in E$ sont *tangents intérieurement* et on écrit $a' \underline{\leqslant} a$: [1], 3.8 et [5].

2.8.2. Tout espace diamétrique par rapport à $\delta(x, y)$, $x, y \in E$ est aussi diamétrique par rapport à $\check{\delta}(x, y) = \delta(x, y) - \delta(x, x) - \delta(y, y)$, $x, y \in E$. En effet, il est aisé à vérifier l'identité

$$\check{\delta}(a, c) + \check{\delta}(c, b) - \check{\delta}(a, b) - \check{\delta}(c, c) = \delta(a, c) + \delta(c, b) - \delta(a, b) - \delta(c, c)$$

pour tous les $a, b, c \in E$, d'où l'assertion concernant $\check{\delta}$. L'espace E muni de la diamétrique *duale* $\check{\delta}(x, y)$, est noté $\check{E}$ et appelé *l'espace dual* de l'espace E et l'on a $\check{\delta}(\check{x}, \check{y}) = \delta(x, y)$, $\check{x}, \check{y} \in \check{E}$: c'est la *loi de dualité métrique* des espaces diamétriques, dont le *principe de dualité métrique* des mêmes, est la conséquence immédiate; cf. [1], 2.1, 2.1.1.

3. *Espaces diamétriques réguliers.*

3.1. *Lemme. Dans tout espace diamétrique E:* (i) *Le diamètre* $\delta(x, x)$, $x \in E$ *est une fonction positive* (2.2), (ii) *La diamétrique* $\delta(x, y)$, $x, y \in E$ *est isotone en ce que* $a, a', b \in E$, $a' \leqslant a \Rightarrow \delta(a', b) \leqslant \delta(a, b)$.

Démonstration aisée. Cf. [1], 3.6, 3.5 et [2], 2.1.3, 2.2.1.

3.1.1. *Corollaire. Dans tout espace diamétrique E, les relations $a, b, u \in E$,* $u \in a \sqcup b$ entraînent $\delta(u, u) \geqslant \delta(a, b)$.

Démonstration. Conséquence de 3.1, (ii).

3.1.2. *Corollaire. Dans tout espace diamétrique E, les relations $a, b \in E$, $a \sqcup b \neq \emptyset$ entraînent*

$$\delta(a, b) \leqslant \inf_{u \in a \sqcup b} \delta(u, u); \tag{1}$$

si, de plus,on a $a \parallel b$ (2.1, 2.8.1), *alors, on a aussi*

$$\delta(a, b) > \sup(\delta(a, a), \delta(b, b)). \tag{1'}$$

Démonstration. Conséquence de 3.1.1, 2.8.1 et des propriétés de $R\#$.

3.1.3. *Corollaire. Dans tout espace diamétrique E on a:* $a, b, v \in E$, $v \in a \sqcap b \Rightarrow \delta(v, v) \leqslant -\check{\delta}(a, b)$.

Démonstration. Par dualité métrique (2.8.2) on a $\check{v} \in \check{a} \sqcup \check{b}$ (dans $\check{E}$), donc d'après 3.1.1. il viendra $\delta(\check{v}, \check{v}) \geqslant \delta(\check{a}, \check{b}) = \check{\delta}(a, b)$, d'où l'inégalité à démontrer.

3.2. *Définition.* J'appelle *A-régulier* tout espace diamétrique vérifiant la condition suivante:

(A) *Pour tous les* $a, b \in E$ *tels que* $a \| b$ (2.1, 2.8.1), *il existe* $d \in E$ *tel que* $d \in a \sqcup b$, $\delta(d, d) = \delta(a, b)$; cf. [5], corollaire 2.2.1, (ii).

Sont A-réguliers au sens de cette définition les continus circulaire et sphérique et quelques autres encore.

3.3. *Lemme. Dans tout espace diamétrique* A-*régulier, le diamètre est une subévaluation d'en bas* (2.3).

Démonstration. En effet d'après le corollaire 3.1.3. et la condition (A) de régularité (3.2), on a pour tous les $a, b \in E$, tels que $a \| b$, $a \sqcap b \neq \emptyset$ et chaque $v \in a \sqcap b$

$$\delta(d, d) + \delta(v, v) \leqslant \delta(a, b) - \check{\delta}(a, b) = \delta(a, a) + \delta(b, b):$$

2.8.2. et ainsi

$$(1) \qquad \begin{cases} \delta(a, a) + \delta(b, b) \geqslant \delta(u, u) + \delta(v, v) & a, b \in E, \ a \| b \\ \textit{pour chaque } v \in a \sqcap b \textit{ et certain } u \in a \sqcup b \ (u = d!) \end{cases}$$

et le lemme sera complètement démontré, quand on aura prouvé que l'inégalité (1) vaut également pour les couples *ordonnés* $a, b \in E$ (donc $a \# b$: 2.1). Or, ceci résulte de la proposition plus générale suivante:

3.3.1. *Lemme. Toute fonction réelle* $a \to a\varphi$, $a \in E$, *définie sur un ensemble ordonné E, est une subévaluation d'en bas* (et aussi, par dualité, une surévaluation d'en haut; cf: 4.1.1, remarque 1) *sur les chaînes de E, pourvu qu'elle soit isotone* (donc telle que $a, a' \in E$, $a' \leqslant a \Rightarrow a'\varphi \leqslant a\varphi$: [6], p. 74).

Démonstration. Soient $a, b \in E$ tels que $a \# b$ et soit $C \subseteq E$ une chaîne quelconque telle que $a, b \in C$. Or toute fonction réelle (isotone ou non) définie sur une chaîne étant une évaluation de celle-ci ([6], p. 74), on a

$$(1) \qquad \begin{cases} a\varphi + b\varphi = (a \cup b)\varphi + (a \cap b)\varphi \\ \text{(où, comme à l'ordinaire, } a \cup b = \sup(a, b) \in E \\ a \cap b = \inf(a, b) \in E, \text{ car } a \# b). \end{cases}$$

Si donc φ est, de plus, isotone et qu'on ait $v \in a \sqcap b$ ($v \in E$ et non pas nécessairement $u \in C$!) alors on a aussi $v \leqslant a \cap b$ donc $v\varphi \leqslant (a \cap b)\varphi$ et ainsi, compte tenu de (1), on aura

$$(1') \qquad \begin{cases} a\varphi + b\varphi \geqslant u\varphi + v\varphi & a, b \in E, \ a \# b \\ \textit{pour chaque } v \in a \sqcap b \textit{ et certain } u \in a \sqcup b \\ \text{notamment } u = a \cup b \end{cases}$$

ce qui prouve le lemme actuel et achève la démonstration du lemme 3.3 (3.1, (i)!).

3.4. *Lemme. Dans les espaces diamétriques* A-*réguliers, l'inégalité* (1) *de* 3.1.2, *devient une égalité pour les couples* $a, b \in E$, $a \| b$.

Démonstration. Clair.

3.4.1. *Remarque.* Au cas, où l'espace E est *fortement* A-*régulier* (en abrégé A'-*régulier*) en ce que la condition (A) de 3.2 vaille pour *tous* les $a, b \in E$, *alors l'espace E est fortement aconcentrique, en ce que* $a, a' \in E$, $a' \leqslant a \Rightarrow a' \underline{\leqslant} a$ (2.8.1) *ou bien,* ce qui revient au même, *en ce que* $a, b \in E$, $a \not\# b \Rightarrow \delta(a, b) = \sup(\delta(a, a), \delta(b, b))$. Cf. [4], 1.6 bis.

Cela résulte essentiellement de ce qu'on a pour tous les $a, b, d \in E$ tels que $d \in a \sqcup b$, les inégalités $\delta(a, b) + \delta(d, d) \leqslant \delta(a, d) + \delta(d, b) \leqslant \delta(d, d) + \delta(d, d)$ ce qui se réduit à des égalités au cas, où E vérifie la condition de A'-régularité. Il en résulte par les propriétés de module ordonné du système des réels, qu'on a alors même $\delta(a, d) = \delta(d, d)$, $\delta(b, d) = \delta(d, d)$, cela veut dire (2.8.1) $a \underline{\leqslant} d$, $b \underline{\leqslant} d$ et il suffit dès lors d'appliquer le Satz 3.9 de [1].

3.5. *Lemme. Dans tout espace diamétrique E on a*

$$(1) \qquad \delta(a, b) \geqslant \sup_{a \cap b \underline{\leqslant} s \leqslant a \cup b} \delta(s, s), \qquad a, b \in E,\ a \nparallel b$$

où $\underline{\leqslant}$ a le sens de 2.8.1. *En outre, on a*

$$(1') \qquad \delta(a, b) \leqslant \sup\,(\delta(a, a),\ \delta(b, b)), \qquad a, b \in E,\ a \nparallel b.$$

Démonstration. Supposons, pour fixer les idées, qu'on ait $a \geqslant b$ et, par conséquent $b \underline{\leqslant} s \leqslant a$. On en tire d'après 3.1, (ii): $\delta(s, s) = \delta(b, s) \leqslant \delta(b, a)$, d'où l'inégalité (1) résulte immédiatement.

Quant à l'inégalité (1') elle est également la conséquence presque immédiate de la définition de $\leqslant$ dans E (2.8.1) et de 3.1, (i).

3.6. *Définition.* J'appelle *B-régulier* tout espace diamétrique E vérifiant la condition suivante:

(*B*) *Pour tous les $a, a' \in E$ tels que $a' \leqslant a$, il existe $s \in E$ tel que $a' \underline{\leqslant} s \underline{\leqslant} a$*, $\delta(s, s) = \delta(a, a')$ (Cf. [5], 2.1.1, (ii), où cette propriété est formulée sous une forme légèrement changée, mais rigoureusement équivalente).

Les continus circulaire et sphérique sont certainement B-réguliers au sens de cette définition.

3.7. *Lemme. Dans les espaces diamétriques B-réguliers, l'inégalité* (1) *de* 3.5 *devient une égalité* (quant à l'inégalité (1') *ibidem*, elle n'est une égalité que si l'on a $a \underline{\geqslant} b$ ou $a \underline{\leqslant} b$).

Démonstration. Clair.

4. *Ensembles ordonnés sousnormés d'en bas.*

4.1. *Théorème. Tout ensemble E sousnormé d'en bas* (2.4) *et filtrant d'en haut* (2.1.2) *est un espace diamétrique fortement aconcentrique* (3.4.1), *dont l'ordre intrinsèque $\dot{\leqslant}$* (2.8.1) *est plus fin que l'ordre $\leqslant$ défini à priori dans E, en ce que*:

$$a, a' \in E,\ a' \leqslant a \Rightarrow a' \dot{\leqslant} a.$$

Démonstration. Soient $a, b \in E$. D'après les suppositions du théorème, on a toujours $a \sqcup b \neq \varnothing$; d'ailleurs $a \sqcup b$ a un plus petit élément, si $a \nparallel b$, c'est $a \cup b = \sup\,(a, b)$. Je définis, $R\#$ étant une chaîne conditionnellement complète et φ positive, donc, isotone (3.3.1)

$$(1) \qquad \delta(a, b) = \inf_{u \in a \sqcup b} u\varphi \qquad a, b \in E$$

(formule suggérée par le corollaire 3.1.2. et le lemme 3.4) et fais remarquer, que d'après ce qu'on vient de dire, cette formule se réduit à

$$(1') \qquad \delta(a, b) = \sup\,(a\varphi, b\varphi), \qquad a, b \in,\ a \nparallel b;$$

la formule (1′) se réduit d'ailleurs, pour $a=b$, à

$$(1'') \qquad \delta(a, a)=a\varphi, \qquad a \in E.$$

En effet, φ étant positive, donc isotone, on a pour tous les $u \in a \sqcup b$, $u\varphi \geqslant a\varphi$, $u\varphi \geqslant b\varphi$ et ainsi $u \in a \sqcup b \Rightarrow u\varphi \geqslant \sup\,(a\varphi, b\varphi)$ (même $u \in a \sqcup b \Rightarrow$ $\Rightarrow u\varphi > \sup\,(a\varphi, b\varphi)$, si $a \,||\, b$, puisque φ est positive!) donc, enfin,

$$(2) \qquad \inf_{u \in a \sqcup b} u\varphi \geqslant \sup\,(a\varphi, b\varphi) \quad a, b \in E$$

où l'égalité a certainement lieu, si $a \nparallel b$, précisément parce que φ est isotone.

Cela posé, il s'agit de prouver d'abord que le nombre réel δ défini sous (1)—(1″), vérifie les conditions sous 2.8.

Pour ce qui est de la première de celles-ci, la chose est triviale. Soient donc $a, b, c \in E$ arbitraires; je dis qu'on a

$$(3) \qquad \delta(a, b)+\delta(c, c) \leqslant \delta(a, c)+\delta(c, b).$$

En effet, soient $u, u', u'' \in E$ tels que $u \in a \sqcup b$, $u' \in a \sqcup c$, $u'' \in c \sqcup b$; cela veut dire, on a (2.1.1)

$$(4) \qquad u \geqslant a, \ u \geqslant b$$

$$(4') \qquad u' \geqslant a, \ u' \geqslant c, \ u'' \geqslant c, \ u'' \geqslant b.$$

Ainsi, on a, en particulier, $u' \geqslant c$, $u'' \geqslant c$, d'où je tire, puisque φ est subévalution d'en bas et que E est filtrant d'en haut, l'existence d'un $\bar{u}$ E tel que

$$(5) \qquad \bar{u} \geqslant u', \ \bar{u} \geqslant u''$$

$$(5') \qquad u'\varphi+u''\varphi \geqslant \bar{u}\varphi+c\varphi.$$

Or, d'après (5) et (4′), on a évidemment $\bar{u} \in a \sqcup b$ ce qui d'après (5′) et les propriétés de module réticulé conditionnellement complet de $R\#$ entraîne

$$(\inf_{u \in a \sqcup b} u\varphi)+c\varphi = \inf_{u \in a \sqcup b} (u\varphi+c\varphi) \leqslant \bar{u}\varphi+c\varphi \leqslant u'\varphi+u''\varphi,$$

cela veut dire

$$(\inf_{u \in a \sqcup b} u\varphi)+c\varphi \leqslant u'\varphi+u''\varphi, \quad u' \in a \sqcup c, \ u'' \in c \sqcup b$$

d'où l'on tire, compte tenu toujours des propriétés de module réticulé complet de $R\#$

$$(\inf_{u \in a \sqcup b} u\varphi)+c\varphi \leqslant \inf_{\substack{u' \in a \sqcup c \\ u'' \in c \sqcup b}} (u'\varphi+u''\varphi) = \inf_{u' \in a \sqcup c} \ \inf_{u'' \in c \sqcup b} (u'\varphi+u''\varphi)$$

$$= \inf_{u' \in a \sqcup c} (u'\varphi+\inf_{u'' \in c \sqcup b} u''\varphi) = (\inf_{u' \in a \sqcup c} u'\varphi)+(\inf_{u'' \in c \sqcup b} u''\varphi)$$

et ainsi

(6) $$(\inf_{u \in a \sqcup b} u\varphi) + c\varphi \leqslant (\inf_{u' \in a \sqcup c} u'\varphi) + (\inf_{u'' \in c \sqcup b} u''\varphi), \qquad a, b, c \in E$$

ce qui, d'après les définitions (1), (1″) équivaut exactement à l'inégalité (3), cela veut dire, E est un espace diamétrique.

Reste à prouver que cet espace est fortement aconcentrique (par rapport à son ordre intrinsèque $\dot{\leqslant}$!), et qu'on a l'implication logique $a, a' \in E$, $a' \leqslant a \Rightarrow a' \dot{\leqslant} a$ (cf. l'énoncé du théorème).

Or, l'ordre intrinsèque de E est défini par (2.8.1)

(7) $$a, a' \in E, \ a' \dot{\leqslant} a \iff \delta(a, a') \leqslant \delta(a, a)$$

d'où, d'après (1), (2), (1″), on aura

(7′) $$\sup(a\varphi, a'\varphi) \leqslant \inf_{u \in a \sqcup a'} u\varphi \leqslant a\varphi$$

ce qui entraîne qu'on a partout égalité, et le second membre de l'équivalence (7) s'écrit alors $\delta(a, a') = \delta(a, a)$. Ainsi $a' \dot{\leqslant} a \Rightarrow a' \underline{\dot{\leqslant}} a$, cela veut dire, tout intervalle *intrinsèque* de E est tangentiel (2.8.1) ce qui est proprement la définition des espaces fortement aconcentriques (3.4.1).

D'autre part, si pour $a, a' \in E$, on a $a' \leqslant a$, il suit des définitions (1′), (1″), qu'on a aussi $\delta(a, a') = \delta(a, a)$, donc, d'après ce qu'on vient de dire, on a précisement $a' \leqslant a \Rightarrow a' \dot{\leqslant} a$ ce qui achève la démonstration.

4.1.1. *Remarques.* 1. L'application de la dualité fournit le résultat suivant, qu'il convient de formuler explicitement:

Tout ensemble surnormé d'en haut et filtrant d'en bas est un espace diamétrique fortement aconcentrique, dont l'ordre intrinsèque est plus fin que l'ordre de l'ensemble dual de l'ensemble sousjacent.

Ici, par ensemble *surnormé d'en haut*, on entend un ensemble ordonné E, muni d'une fonction φ *positive* et telle que pour tous les $a, b \in E$ vérifiant $a \sqcup b \neq \varnothing \neq a \sqcap b$ et chaque $u \in a \sqcup b$ il existe un $v \in a \sqcap b$ tel que $a\varphi + b\varphi \leqslant u\varphi + v\varphi$: *surévaluation d'en haut.*

La fonction $\delta(x, y)$ de 4.1 est en ce cas définie par

(1) $$\delta(x, y) = -\sup_{v \in a \sqcap b} v\varphi, \qquad a, b \in E.$$

2. Au cas, où E est une chaîne (elle est ordinalement isomorphe à une chaîne de réels) et la construction de 4.1 conduit aux espaces *tangentiaux* en ce que pour tous les $a, a' \in E$, on a $a \underline{\dot{\leqslant}} a'$ ou $a \underline{\dot{\geqslant}} a'$ (ordre intrinsèque; cf. [4], 1.6 bis).

4.2. *Théorème. Afin que sous les suppositions de* 4.1 *l'ordre intrinsèque* $\dot{\leqslant}$ *de E coïncide avec l'ordre apriorique* $\leqslant$, *il faut et il suffit, que la fonction* φ *remplisse la condition suivante:* (*) *Pour tous les* $a, b \in E$ *tels que* $a \| b$ (2.1), *il existe un nombre réel* $\xi = \xi(a, b)$ *tel que* $\xi > \sup(a\varphi, b\varphi)$ *et tel que* $u\varphi \geqslant \xi$ *pour chaque* $u \in a \sqcup b$.

Démonstration. La condition (*) est *nécessaire* en ce, qu'elle est vérifiée par tout espace diamétrique (et même par tout continu géométrique ([2, 2.1) ordonné intrinsèquement (2.8.1); c'est ce, qui résulte aisément du lemme 3.1, en posant $x\varphi = \delta(x, x)$, $x \in E$ et en prenant $\xi = \delta(a, b)$.

La condition (*) est *suffisante*. Supposons qu'elle soit remplie et soient $a, a' \in E$ tels que $a' \dot{\leqslant} a$; je dis qu'on a aussi $a' \leqslant a$.

En effet, d'après les définitions (1), (7) de 4.1, on aura évidemment puisque $a' \dot{\leqslant} a$,

$$a\varphi = \inf_{u \in a \sqcup a'} u\varphi = \sup (a\varphi, a'\varphi) \tag{1}$$

(cf. (7′) de 4.1!), d'où il suit en particulier qu'on a

$$a'\varphi \leqslant a\varphi. \tag{1′}$$

Or, si la condition $a' \leqslant a$ n'était pas vraie, c'est qu'on aurait *ou bien* $a' > a$ *ou bien* déjà $a \| a'$. La première supposition est manifestement en contradiction avec (1′); car φ est positive. La deuxième supposition, entraîne d'après la condition (*), l'existence d'un nombre réel ξ tel que $\xi > \sup (a\varphi, a'\varphi)$ et que $u\varphi \geqslant \xi$ pour chaque $u \in a \sqcup a'$. Il en résulte $\inf_{u \in a \sqcup a'} u\varphi \geqslant \xi > \sup (a\varphi, a'\varphi)$ ce, qui est en contradiction avec la moitié droite de (1). Il est donc prouvé, par réduction à l'absurde, qu'on a bien $a' \dot{\leqslant} a \Rightarrow a' \leqslant a$ et c'est ce qu'il fallait démontrer.

5. *Cas des ensembles ramifiés.*

5.1. *Théorème. Tout ensemble ramifié dual E* (2.5), *filtrant d'en haut et muni d'une fonction réelle strictement croissante* (2.2) *est un espace diamétrique fortement aconcentrique par rapport à la fonction réelle* (1) — (1″) *de* 4.1.

Démonstration. D'après 4.1, il suffit de faire voir que toute fonction strictement croissante, est ici une subévaluation d'en bas.

Or, si $a, b \in E$ sont tels que $a \sqcap b \not\parallel \varnothing$, il suit de la définition des ensembles ramifiés duaux, qu'on a nécessairement $a \not\parallel b$, et alors la propriété requise est une conséquence immédiate du lemme 3.3.1.

5.2. *Théorème. Tout ensemble ramifié, filtrant d'en bas et muni d'une fonction réelle strictement croissante, est un espace diamétrique fortement aconcentrique* (par rapport à (1) de 4.1.1, remarque 1).

Démonstration. C'est qu'en ce cas toute fonction strictement croissante est d'après 3.3.1, surévaluation d'en haut.

5.3. *Lemme. Un arbre* (2.6) *est filtrant d'en bas, si et seulement si il a un premier* (*alias* plus petit) *élément* (et la propriété duale).

Démonstration. La condition requise est trivialement *suffisante* (pour tout ensemble ordonné E, et non pas seulement pour les arbres); montrons donc, qu'elle est aussi *nécessaire*, si E est un arbre.

Soient, en effet, $a, b \in E$ arbitraires. Puisque les idéaux principaux $a\sqcap$, $b\sqcap$ (2.1.1) sont bien ordonnés, ils ont, chacun, un premier élément, soit a_0 pour $a\sqcap$ et b_0 pour $b\sqcap$; on a donc, en particulier, $a \geqslant a_0$, $b \geqslant b_0$.

Or, puisque E est filtrant d'en bas, il y a un $c \in E$, tel que $c \leqslant a_0$, $c \leqslant b_0$. Si donc a_0, b_0 étaient incomparables ($a_0 \| b_0$), on aurait $c < a_0$, $c < b_0$ et alors a_0, b_0 ne seraient plus premiers éléments des idéaux $a\sqcap$, $b\sqcap$. Ainsi, $a_0 \not\parallel b_0$ ce qui entraîne par la propriété d'être premier élément, $a_0 = b_0$.

Or, puisque $a, b \in E$ sont *arbitraires*, il s'ensuit que $a_0 = b_0 = c_0 \cdots = 0$ est le premier élément de E: $0 \leqslant x$ pour tout $x \in E$, c.q.f.d.

5.4. *Théorème. Tout arbre à nombre antistellaire*[1)] *dénombrable* [7, 8] *et à premier élément, est un espace diamétrique fortement aconcentrique.*

Démonstration. C'est que tout arbre pareil possède, d'après [7], p. 837, théorème 1, une fonction *rationnelle* strictement croissante, et l'assertion du théorème résulte alors de 5.2.

6. *Cas des multitreillis,*

6.1. *Théorème. Tout multitreillis* (2.7) *filtrant d'en haut et muni d'une évaluation de deuxième espèce d'en bas, positive, est un espace diamétrique fortement aconcentrique.*

Démonstration. D'après la définition 5.1 de [3], la fonction réelle φ est une *évaluation de deuxième espèce d'en bas* du multitreillis E, si pour tous les $a, b \in E$ tels que $a \vee b \neq \varnothing \neq a \wedge b$ (cf. [3], 2.1 pour les notations requises) et chaque $m \in a \wedge b$, il existe un $d = d(m) \in a \vee b$, tel que $a\varphi + b\varphi = d\varphi + m\varphi$.

Soit $v \in a \sqcap b$ arbitraire. D'après 2.7, il existe $m \in \mathrm{E}$ tel que $v \leqslant m \in a \wedge b$ et dès lors on a puisque φ est positive (donc isotone) $d\varphi + v\varphi \leqslant d\varphi + m\varphi = a\varphi + b\varphi$, cela veut dire, φ est subévaluation d'en bas (2.3). ce qui entraîne le théorème.

6.1.1. *Corollaire. Tout multitreillis normé* ([3], 5.13) *filtrant d'en haut* (*ou d'en bas*) *est un espace diamétrique fortement aconcentrique.*

6.1.2. *Remarque.* Les continus circulaire et sphérique (ordonnés par l'intériorité des cercles ou sphères) sont des multitreillis (cf. [3], 1.2, Exemple 4, où la fonction réelle $x\varphi = R(x) =$ rayon du cercle (sphère) x est, comme on s'en assure aisément, une évalution de deuxième espèce d'en bas positive ([3], 5.2, Exemple 1.)).

Le théorème 6.1 s'applique donc à ces cas, mais la condition (*) de 4.2 y est en défaut, c'est-à-dire que l'espace diamétrique qu'on obtient ainsi, ne coïncide pas avec le continu circulaire ou sphérique en tant qu'espace diamétrique par rapport à $\delta(x, y) = x^* y^* + R(x) + R(y)$, où $x^* y^*$ est la distance (euclidienne) des centres x^*, y^* des cercles (sphères) x, y: c'est que, en tant que tels, ces continus ne sont pas fortement aconcentriques (par rapport à l'intériorité en tant qu'ordre intrinsèque). En effet, la formule (1) de 4.1 ne vaut, en ces cas, que pour les couples $a, b \in E$ tels que $a \| b$, et non pas pour *tous* les couples a, $b \in E$ (cf. 3.2, 3.4).

7. *Quelques remarques sur le problème général de la diamétrisation des ensembles ordonnés.*

La construction du § 4, comme cela était évident *à priori*, ne fournit pas tous les espaces diamétriques, mais seulement les espaces fortement aconcentriques; c'est ce qui pose la question générale mentionnée déjà dans l'introduction.

Il semble tout naturel de poser d'abord, en ce cas (d'après 3.4)

$$\delta(a, b) = \inf_{u \in a \sqcup b} u\varphi, \qquad a, b \in E,\ a \| b \tag{1}$$

puis d'introduire, en second lieu (d'après 3.7) une sousfamille d'intervalles $x \underline{\geqslant} y$ de E, appelés conventionnellement *tangentiaux*, avec les propriétés ordinaires pour ces intervalles, à savoir: *réfléxivité*, *antisymétrie* et *scindement* (cette dernière signifiant: $a, b, s \in E$, $a \underline{\geqslant} b$, $a \geqslant s \geqslant b \Rightarrow a \underline{\geqslant} s \underline{\geqslant} b$; cf. [1], 3.9) et de poser enfin

$$\delta(a, b) = a\varphi, \qquad a, b \in E,\ a \underline{\geqslant} b \tag{2}$$

$$\delta(a, b) = \sup_{a \cap b \underline{\leqslant} s \leq a \cup b} s\varphi, \qquad a, b \in E,\ a \nparallel b. \tag{3}$$

Le problème consiste alors en la recherche de conditions permettant de remonter des définitions (1) — (3) à l'inégalité (3) de 4.1; il est évident, d'ailleurs, que cette dernière vaut ici sans plus, pour les triples a, b, $c \in E$ tels que $a \| b \| c \| a$ (attendu que φ soit, comme à 4.1, subévaluation d'en bas, positive).

Cependant, la résolution de cette question, exige, outre ces conditions, d'autres propriétés de la fonction φ et de l'ensemble ordonné sousjacent E. En fait, j'avais bien trouvé en 1963 quelques unes de ces conditions, se rapportant en partie, à la structure interne de E, et qui me permirent de remonter à l'inégalité (3) de 4.1, pour certaines positions mutuelles des trois corps a, b, $c \in E$ (sans nul rapport au cas actuel $a \| b \| c \| a$, que, d'ailleurs, je n'ai tranché que fort récemment); mais je n'ai pu atteindre à une solution satisfaisante, comprenant tous les cas possibles.

RÉFÉRENCES

[1] Michaël Benado, *Beiträge zur Theorie der geometrischen Kontinua I*, manuscrit janvier 1966.

[2] Michaël Benado, *Geometrische Kontinua und diametrische Räume*, Publ. Fac Sci. Univ. Brno, cahier 468 (1965), pp. 469—473.

[3] Michaël Benado, *Les ensembles partiellement ordonnés et le théorème de raffinement de Schreier II* (*Théorie des multistructures*), Czechosl. Math. Journal, t. 5 (80) cahier 3 (1955), pp. 308—344.

[4] Michaël Benado, *Beiträge zur Theorie der geometrischen Kontinua II*, manuscrit, juin 1966.

[5] Michaël Benado, *Positions relatives des corps d'un espace diamétrique*, manuscrit, mai 1967.

[6] Garrett Birkhoff, *Lattice Theory*, revised ed., New York, 1948.

[7] Georges Kurepa, *Transformations monotones des ensembles partiellement ordonnés*, Revista de Ciencias, Lima, No. 434, 42 (1040), p.p. 827—846.

[8] Georges Kurepa, *Star number and antistar number of ordered sets and graphs*' Glasnik, Zagreb, série II, t. 18, cahier 1—2 (1963), pp. 27—37.

[9] Georges Kurepa, *Problématique des ensembles partiellement ordonnés*, Actes du III-ième Congrès des mathématiciens yougoslaves, 1949.

Str. Lt Col. Papazoglou 10
Bucarest (Roumanie)