PUBLICATIONS DE L'INSTITUT MATHÉMATIQUE
Nouvelle série, tome 9 (23), 1969. pp. 139—142

ОБЩЕЕ СЛЕДСТВИЕ ПРЯМОГО МЕТОДА ЛЯПУНОВА ОБ УСТОЙЧИВОСТИ

В. А. Вуйичич

(Поступило 4-ого июня 1968)

В этой статье мы предлагаем одно выражение на основании которого можно легко судить об устойчивости состояния равновесия и движения системы материальных точек по Ляпунову. Будем расматривать устойчивость состояния равновесия и движения голономной склерономной механической системы точек при наличии обобщенных сил $Q_\alpha\,(\alpha=1,2,\ldots,n)$.

1. В некоторой непрерывной и ограниченой области $\mathscr{H}$ $2n$-мерного фазового пространства $q^\alpha,\ p_\alpha \in H$ дифференциальные уравнения движения системы Гамильтона

$$\dot{q}^\alpha=\frac{\partial H}{\partial p},\quad \dot{p}_\alpha=-\frac{\partial H}{\partial q^\alpha}+Q_\alpha^* \tag{1.1}$$

напишем для голономной склерономной системы в виде

$$\begin{aligned}&\dot{q}^\alpha=a^{\alpha\beta}p_\beta\\ &\dot{p}_\alpha=\begin{Bmatrix}\delta\\ \alpha\gamma\end{Bmatrix}p_\delta\,\dot{q}^\gamma+Q_\alpha(t,q^1,\ldots,q^n;\ p_1,\ldots,p_n)\end{aligned} \tag{1.2}$$

где $a^{\alpha\beta}=a^{\beta\alpha}(q^1,\ldots,q^n)$ контравариантные составляющие основного тензора пространства конфигураций, $\begin{Bmatrix}\delta\\ \alpha\gamma\end{Bmatrix}$ — символы Кристоффеля второго рода и

$$Q_\alpha=\frac{\partial U}{\partial q^\alpha}+Q_\alpha^* \tag{1.3}$$

обобщенные силы.

Функцию Ляпунова $V=V(t,q^1,\ldots,q^n;\ p_1,\ldots,p_n)$ будем искать в виде суммы двух определенно-положительных функций

$$V=T+W=\frac{1}{2}\,a^{\alpha\beta}p_\alpha p_\beta+W(t,q^1,\ldots,q^n)$$

где T кинетическая энергия движения системы и W некоторая определенно-положительная функция, зависящая только от координат Лагранжа

q^α $(\alpha=1,2,\ldots,n)$ и времени t. Аналогично выводам статьи [2] для первой производной функции V по времени в силу уравнений (1.2) получим

$$\frac{\partial w}{\partial t}+\left(Q_\alpha+\frac{\partial W}{\partial q^\alpha}\right)\dot{q}^\alpha \tag{1.4}$$

Следуя теореме Ляпунова об устойчивости, приходим к выводу:

Если существует определенно-положительная функция $W=W(t,q^1,\ldots,q^n)$ такая, что выражение (1.4) отрицательно или тождествено равно нулю, то состояние равновесия $q^\alpha=0$, $p_\alpha=0$ механической системы точек устойчиво.

Когда обобщенные силы Q_α не зависят явно от времени, функцию W будем искать только от координат q^α.

2. Условия устойчивости стационарных движений системы также можно получить рассматривая выражение вида (1.4). Пусть система имеет k позиционных координат и $n-k$ циклических, и движение системы осуществляется при наличии обобщеных сил

$$Q_r=Q_r(q^1,\ldots,q^k;\ p_1,\ldots,p_k;\ p_n^0;\ t),\quad (r_1=1,2,\ldots,k).$$

Будем искать функцию W, которая зависить только от позиционных координат q^r и времени t. Аналогично выводам статьи [3] получим выражение

$$\frac{\partial W}{\partial t}+\left(Q_r+\frac{\partial W}{\partial q^r}\right)\dot{q}^r \tag{2.1}$$

которое должно быть меньше или тождественно равно нулю, чтобы стационарное движение системы было устойчиво. Из выражения (1.4) и (2.1) не трудно получить известные теоремы об устойчивости состояния равновесия и стационарных движений системы механических точек.

3. Чтобы исследовать устойчивость движения склерономной системы с n степенями свободы рассмотрим уравнения в вариациях [1]

$$\begin{aligned}\frac{d\xi^\beta}{dt}&=\frac{\partial^2 H}{\partial p_\beta\,\partial q^\alpha}\xi^\alpha+\frac{\partial^2 H}{\partial p_\beta\,\partial p_\alpha}\eta_\alpha+X^\beta,\\ \frac{d\eta_\beta}{dt}&=-\left(\frac{\partial^2 H}{\partial q^\beta\,\partial q^\alpha}\xi^\alpha+\frac{\partial^2 H}{\partial q^\beta\,\partial p_\alpha}\eta_\alpha\right)+Y_\beta,\end{aligned} \tag{3.1}$$

где $\xi^\alpha=\overline{q}^\beta-q^\beta$, $\eta_\beta=\overline{p}_\beta-p_\beta$ возмущения координат q^β и импульсов p_β. Так как для склерономной системы функция Гамильтона $H=\frac{1}{2}a^{\alpha\beta}p_\alpha p_\beta-$ $-U(q^1,\ldots,q^n;\ t)$, частные производные функции H в дифференциальным уравнениям (3.1), т. е.

$$\frac{\partial^2 H}{\partial p_\beta\,\partial q^\alpha}=\frac{\partial a^{\gamma\beta}}{\partial q^\alpha}p_\gamma,\quad \frac{\partial^2 H}{\partial p_\alpha\,\partial p_\beta}=a^{\alpha\beta},$$

$$\frac{\partial^2 H}{\partial q^\beta\,\partial q^\alpha}=\frac{1}{2}\,\frac{\partial^2 a^{\gamma\delta}}{\partial q^\beta\,\partial q^\alpha}p_\gamma p_\delta-\frac{\partial^2 U}{\partial q^\beta\,\partial q^\alpha},$$

уравнения (3.1) в явном виде запишутся:

$$(3.2)\qquad \begin{aligned} \frac{d\xi^\beta}{dt} &= \frac{\partial a^{\gamma\beta}}{\partial q^\alpha}\, p_\gamma\, \xi^\alpha + a^{\beta\alpha}\eta_\alpha + X^\beta, \\ \frac{d\eta_\beta}{dt} &= -\left(\frac{1}{2}\,\frac{\partial^2 a^{\gamma\delta}}{\partial q^\alpha\,\partial q^\beta}\, p_\gamma\, p_\delta\, \xi^\alpha + \frac{\partial a^{\gamma\alpha}}{\partial q^\beta}\, p_\gamma\, \eta_\alpha\right) - \frac{\partial^2 U}{\partial q^\alpha\,\partial q^\beta}\,\xi^\alpha + Y_\beta. \end{aligned}$$

В случае, когда конфигурационное пространство является Эвклидовым, составляющие основного тензора постоянны и уравнения (3.2) приводятся к простому виду:

$$(3.3)\qquad \begin{aligned} \frac{d\xi^\beta}{dt} &= a^{\alpha\beta}\,\eta_\alpha \\ \frac{d\eta_\beta}{dt} &= P_\beta(\xi^1, \ldots, \xi^n;\ \eta_1, \ldots, \eta_n;\ t) \end{aligned}$$

где $P_\beta = -\dfrac{\partial^2 U}{\partial q^\alpha\,\partial q^\beta}\,\xi^\alpha + Y_\alpha$. Вследствие того, что $a^{\alpha\beta} = \text{const}$. функции X^β будут равны нулю, так как они зависят от частных производных $a^{\alpha\beta}$ второго или более высокого порядка. Функции Y_β также не будут содержать частные производные $a^{\alpha\beta}$, а только частные производные силовой функции U третьего и более високого порядка; в функции Y_β тоже входят выражения $\dfrac{\partial Q_\beta^*}{\partial q^\alpha}\,\xi^\alpha + \dfrac{\partial Q_\beta^*}{\partial p_\alpha}\,\eta_\alpha + \cdots$. Это теперь ясно что P_β — разложение в степеный ряд обобщенных сил Q_α без нулевого члена.

Функцию Ляпунова $V = V(\xi^1, \ldots, \xi^n;\ \eta_1, \ldots, \eta_n, t)$ ищем в виде суммы двух определенно-положительных функций $W_1 = \dfrac{1}{2}\, a^{\alpha\beta}\,\eta_\alpha\,\eta_\beta$ и $W(\xi^1, \ldots, \xi^n;\ t)$ т. е.

$$(3.4)\qquad V = \frac{1}{2}\, a^{\alpha\beta}\,\eta_\alpha\,\eta_\beta + W(\xi^1, \ldots, \xi^n;\ t).$$

Производная по времени от функции V будет

$$\dot V = a^{\alpha\beta}\,\dot\eta_\alpha\,\eta_\beta + \frac{\partial W}{\partial \xi^\alpha}\,\dot\xi^\alpha + \frac{\partial W}{\partial t},$$

или, в силу уравнений возмущенного движения (3.3),

$$(3.5)\qquad \dot V = \frac{\partial W}{\partial t} + a^{\alpha\beta}\left(P_\alpha + \frac{\partial W}{\partial \xi^\alpha}\right)\eta_\beta.$$

Это можно написать в виде (2.1) или (1.4), т. е.

$$(3.5)\qquad \frac{\partial W}{\partial t} + \left(P_\alpha + \frac{\partial W}{\partial \xi^\alpha}\right)\dot\xi^\alpha,$$

так как, в силу (3.3), $\dot\xi^\alpha = a^{\alpha\beta}\,\eta_\beta$. Отсюда получаем утверждение.

Эсли в Эвклидовом пространстве существует определенно-положительная функция $W = W(t, \xi^1, \ldots, \xi^n)$ такая, что выражение (3.5) отрицательная функция или тождественно равная нулю, невозмущенное движение механической склерономной голономной системы устойчиво.

Заметим наконец то, что выражения (1.4), (2.1) и (3.5) имеют одну и ту-же форму. Одна и та-же формула дает

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \left(\psi_\alpha + \frac{\partial W}{\partial \xi^\alpha}\right) \dot{\xi}^\alpha \leqq 0 \tag{3.6}$$

даёт критерий устойчивости состояния равновесия, устойчивости стационарных движений и, также, устойчивости невозмущенного движения механической системы в Эвклидовом пространстве. Если ψ_α не зависит от времени функцию W берем от ξ^α и выражение (3.6) будет

$$\left(\psi_\alpha + \frac{\partial W}{\partial \xi^\alpha}\right) \dot{\xi}^\alpha \leqq 0.$$

При исследованию устойчивости равновесия и стационарных движений функции ψ_α обобщенные силы и $\dot{\xi}^\alpha$ обобщенние скорости. Если рассматриваем устойчивость движеные системы в Эвклидовом пространстве функции ψ_α будут, как уже сказано, обобщенные силы Q_α разложеные в степеный ряд $\psi_\alpha = \dfrac{\partial Q_\alpha}{\partial q^\beta} \xi^\beta + \dfrac{\partial Q_\alpha}{\partial p_\beta} \eta_\beta + \cdots$ и возмущения скоростей движения точек механческой системы.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Четаев Н. Г.; *Устойчивость движения*, Москва, 1955.

[2] Вуйичич В.; *Критерий об устойчивости состояния равновесия динамических точек*, Publ. Inst. Math., Nouvelle série, tome 8 (22), Beograd, 1968.

[3] Vujičić V., *Über die Stabilität der stationären Bewegungen*, Zamm, 8, Berlin, 1968.

Institut Mathématique
Beograd