PUBLICATIONS DE L'INSTITUT MATHEMATIQUE
Nouvelle série, tome 9 (23), 1969, p. 115–122.

UBER EINE PARTIELLE DIFFERENTIALGLEICHUNG IN DER NICHTANALYTISCHE FUNKTIONEN ERSCHEINEN

Stanimir Fempl

(Eingegangen am 18. Oktober 1968)

Für eine nichtanalytische Funktion

$$w(x, y) = u(x, y) + iv(x, y)$$

(u, v reelle Funktionen) kann man ihre Abweichung von der Analytizität definieren [1]:

$$B(w) \overset{def}{=} \frac{\partial w}{\partial x} + i\frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} + i\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right). \tag{1}$$

Ebenso kann man die zweite Abweichung $B_2(w)$ der Funktion $B(w)$ von der Analytizität, die im allgemeinen Falle nichtanalytisch ist, definieren. Diese "zweite" Abweichung ist mit

$$B_2(w) \overset{def}{=} B[B(w)] = \left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)^{(2)} w$$

gegeben. Ähnlich definiert man die höheren Abweichungen

$$B_n(w) \overset{def}{=} B[B_{n-1}(w)] = \left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)^{(n)} w \quad (n = 0, 1, 2, \ldots). \tag{2}$$

Dabei ist $B_1(w) = B(w)$ und $B_0(w) = w$.

In seiner Abhandlung [1] hat Bilimović Bedingungen angeführt die die Funktionen u und v erfüllen müssen. Es sei nur bemerkt dass diese Bedingungen eine ziemlich allgemeine Natur besitzen (z. B. Existenz der partiellen Ableitungen nach u und v u. s. w.).

In dieser Arbeit löse ich das Problem der Integration der partieller Differentialgleichung

$$\sum_{\nu=0}^{n} a_{n-\nu} B_\nu(w) = W(x, y). \tag{3}$$

Hier sind die Koeffizienten a konstant, während W eine komplexe nichtanalytische Funktion darstellt. Im Spezialfall $W=0$ reduziert sich die Gleichung (3) auf eine homogene Differentialgleichung die ich in einer meiner früheren Arbeit untersucht habe [2]. Dort wurde gezeigt dass ihre allgemeine Lösung die Form

$$w=\sum_{\nu=1}^{n} \varphi_\nu(z)\, e^{\frac{r_\nu}{2}\bar{z}} \tag{4}$$

besitzt, wo $\varphi(z)\,(z=x+yi)$ beliebige analytische Funktionen sind, während die Grössen $r_\nu\,(\nu=1, 2, \ldots n)$ die Wurzeln der algebraischen Gleichung

$$\sum_{\nu=0}^{n} a_{n-\nu}\, \xi^\nu=0 \tag{5}$$

sind. All dies gilt wenn die Wurzeln r_ν verschieden sind. Im Falle m gleicher Wurzeln $r_1=r_2=\cdots=r_m=r\ (m\leqslant n)$ hat der entsprechender Teil der Lösung die Form

$$[\varphi_1(z)+\bar{z}\varphi_2(z)+\cdots+\bar{z}^{m-1}\varphi_m(z)]\, e^{\frac{r}{2}\bar{z}}. \tag{6}$$

Wie man sieht, stellt der Klammerausdruck ein areoläres Polynom $(m-1)$ -en Grades dar [3].

Das allgemeine Integral w der Gleichung (3) kann man auch durch die rechte Seite von (4) dargestellt denken, wenn man an die Stelle der analytischen Funktionen φ_ν entsprechend bestimmte nichtanalytische Funktionen $w_\nu(x, y)$ bringt, die natürlich die notwendige Anzahl wilkürlicher analytischen Funktionen enthalten müssen, so dass

$$w=\sum_{\nu=1}^{n} w_\nu(x, y)\, e^{\frac{r_\nu}{2}\bar{z}} \tag{7}$$

ist. Eine solche Darstellung wäre noch auf unendlich viele Arten ausführbar. Man kann aber diese Funktionen w_ν einer Anzahl von Bedingungen unterwerfen. Wählt man $n-1$ Bedingungen frei, so kann man $n-1$ Funktionen w_ν durch das noch erübrigende darstellen, und es kommt nur auf die Bestimmung einer Funktion an.

Wenn (7) der Gleichung (3) genügt, so muss

$$B(w)=\sum_{\nu=1}^{n} B(w_\nu)\, e^{\frac{r_\nu}{2}\bar{z}}+\sum_{\nu=1}^{n} w_\nu r_\nu\, e^{\frac{r_\nu}{2}\bar{z}}$$

sein, denn es ist

$$B(\sum w_\nu)=\sum B(w_\nu), \quad B(w_1 w_2)=w_1 B(w_2)+w_2 B(w_1),$$

$$B[f(w)]=f'(w)\, B(w), \quad B(\bar{z})=2,$$

wie man sich leicht überzeugen kann. Jetzt kann man die Grössen w_2 so wählen, dass

$$\sum_{\nu=1}^{n} B(w_\nu)\, e^{\frac{r_\nu}{2}\bar{z}}=0, \tag{8}$$

und es wird

$$B_1(w) = \sum_{\nu=1}^{n} w_\nu r_\nu e^{\frac{r_\nu}{2}\bar{z}}. \tag{9}$$

Auf Grund dessen ist

$$B_2(w) = \sum_{\nu=1}^{n} B(w_\nu) r_\nu e^{\frac{r_\nu}{2}\bar{z}} + \sum_{\nu=1}^{n} w_\nu r_\nu^2 e^{\frac{r_\nu}{2}\bar{z}},$$

und man kann eine zweite Bedingung

$$\sum_{\nu=1}^{n} B(w_\nu) r_\nu e^{\frac{r_\nu}{2}\bar{z}} = 0 \tag{10}$$

aufstellen, so dass

$$B_2(w) = \sum_{\nu=1}^{n} w_\nu r_\nu^2 e^{\frac{r_\nu}{2}\bar{z}}, \tag{11}$$

wird. So fortfahrend kommt man nach $(n-1)$ maligen Anwendung zu

$$B_{n-1}(w) = \sum_{\nu=1}^{n} B(w_\nu) r_\nu^{n-2} e^{\frac{r_\nu}{2}\bar{z}} + \sum_{\nu=1}^{n} w_\nu r_\nu^{n-1} e^{\frac{r_\nu}{2}\bar{z}}$$

und es wird die $(n-1)$—te Bedingung aufgestellt

$$\sum_{\nu=1}^{n} B(w_\nu) r_\nu^{n-2} e^{\frac{r_\nu}{2}\bar{z}} = 0, \tag{12}$$

so dass

$$B_{n-1}(w) = \sum_{\nu=1}^{n} w_\nu r_\nu^{n-1} e^{\frac{r_\nu}{2}\bar{z}} \tag{13}$$

wird. Da jetzt die zulässige Anzahl der Bedingungen erschöpft ist, ergibt sich aus der letzten Gleichung

$$B_n(w) = \sum_{\nu=1}^{n} B(w_\nu) r_\nu^{n-1} e^{\frac{r_\nu}{2}\bar{z}} + \sum_{\nu=1}^{n} w_\nu r_\nu^{n} e^{\frac{r_\nu}{2}\bar{z}}. \tag{14}$$

Trägt man die Werte: für w aus (7), für $B_1(w), B_2(w), \ldots B_{n-1}(w)$ die eben gefundenen Werte (9), (11), . . (13), (14) in die Gleichung (3), so entsteht

$$a_0 \sum_{\nu=1}^{n} w_\nu r_\nu^n e^{\frac{r_\nu}{2}\bar{z}} + a_0 \sum_{\nu=1}^{n} B(w_\nu) r_\nu^{n-1} e^{\frac{r_\nu}{2}\bar{z}} + a_1 \sum_{\nu=1}^{n} w_\nu r_\nu^{n-1} e^{\frac{r_\nu}{2}\bar{z}} + \cdots$$

$$+ a_{n-1} \sum_{\nu=1}^{n} w_\nu r_\nu e^{\frac{r_\nu}{2}\bar{z}} + a_n \sum_{\nu=1}^{n} w_\nu e^{\frac{r_\nu}{2}\bar{z}} = W(x, y).$$

Wenn man die Glieder in dieser Gleichung in anderer Weise zusammenfasst, so folgt

$$
\begin{aligned}
(15) \qquad & w_1 e^{\frac{r_1}{2}\bar{z}} \sum_{\nu=0}^{n} a_{n-\nu} r_1^{\nu} + w_2 e^{\frac{r_2}{2}\bar{z}} \sum_{\nu=0}^{n} a_{n-\nu} r_2^{\nu} + \cdots + w_n e^{\frac{r_n}{2}\bar{z}} \sum_{\nu=0}^{n} a_{n-\nu} r_n^{\nu} \\
& + a_0 \sum_{\nu=1}^{n} B(w_\nu) r_\nu^{n-1} e^{\frac{r_\nu}{2}\bar{z}} = W(x, y).
\end{aligned}
$$

Da r_ν $(\nu=1, 2, \ldots n)$ die Wurzeln der Gleichung (5) bedeuten, so entfallen links alle Glieder bis auf das letzte, so dass

$$
a_0 \sum_{\nu=1}^{n} B(w_\nu) r_\nu^{n-1} e^{\frac{r_\nu}{2}\bar{z}} = W(x, y)
$$

verbleibt (ohne Beschränkung der Allgemeinheit setze man $a_0=1$).

Die Gleichungen (8), (10), ... (12), und die letzte Gleichung geben das System

$$
(16) \qquad \begin{cases}
B(w_1) e^{\frac{r_1}{2}\bar{z}} + B(w_2) e^{\frac{r_2}{2}\bar{z}} + \cdots + B(w_n) e^{\frac{r_n}{2}\bar{z}} = 0 \\
B(w_1) r_1 e^{\frac{r_1}{2}\bar{z}} + B(\omega_2) r_2 e^{\frac{r_2}{2}\bar{z}} + \cdots + B(w_n) r_n e^{\frac{r_n}{2}\bar{z}} = 0 \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
B(w_1) r_1^{n-2} e^{\frac{r_1}{2}\bar{z}} + B(w_2) r_2^{n-2} e^{\frac{r_2}{2}\bar{z}} + \cdots + B(w_n) r_n^{n-2} e^{\frac{r_n}{2}\bar{z}} = 0 \\
B(w_1) r_1^{n-1} e^{\frac{r_1}{2}\bar{z}} + B(w_2) r_2^{n-1} e^{\frac{r_2}{2}\bar{z}} + \cdots + B(w_n) r_n^{n-1} e^{\frac{r_n}{2}\bar{z}} = W(x, y)
\end{cases}
$$

Dieses System ermöglicht die n Abweichungen $B(w_\nu)$ $(\nu=1, 2, \ldots n)$—da es in Bezug auf diese Abweichungen linear ist—zu bestimmen, wenn nur der Ausdruck

$$
(17) \qquad D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ r_1 & r_2 & \cdots & r_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ r_1^{n-1} & r_2^{n-1} & \cdots & r_n^{n-1} \end{vmatrix} e^{\frac{r_1+\cdots+r_n}{2}\bar{z}}
$$

von Null verschieden ist.

Besitzt die Gleichung (5) keine mehrfache Wurzeln, so ist, wie bekannt,

$$
D = (-1)^{\binom{n}{2}} e^{\frac{r_1+\cdots+r_n}{2}\bar{z}} \prod_{i,k} (r_i - r_k) \quad (i=1, 2, \ldots n-1;\; k=i+1,\; i+2, \ldots n)
$$

und dieser Ausdruck ist von Null verschieden. Bezeichnet man die den Elementen der letzten Zeile von (17) adjungierten Unterdeterminanten mit D_1, $D_2, \ldots D_n$, und da diese denselben Bau zeigen wie die Determinante D, so ist

$$D_1=(-1)^{n-1}(-1)^{\binom{n-1}{2}}e^{\frac{r_2+r_3+\cdots+r_n}{2}\bar z}\prod_{i,k}(r_i-r_k)\quad(i=2,\ldots n-1;\,k=i+1,\ldots n),$$

folglich

$$\frac{D_1}{D}=\frac{e^{-\frac{r_1}{2}\bar z}}{(r_1-r_2)(r_1-r_3)\cdots(r_1-r_n)}.$$

Beachtet man noch dass das Polynom auf der linken Seite (5), bezeichnen wir es mit $\omega(\xi)$, die Gestalt

$$\omega(\xi)=a_0\prod_{\nu=1}^{n}(\xi-r_\nu)=\prod_{\nu=1}^{n}(\xi-r_\nu)$$

besitzt, so kann man den Nenner der rechten Seite auch in der Form $\omega'(r_1)$ schreiben. Demnach ist endgültig

$$\frac{D_1}{D}=\frac{e^{-\frac{r_1}{2}\bar z}}{\omega'(r_1)}.$$

Ähnliche Ausdrücke ergeben sich für die übrigen Quotienten $D_2/D, \ldots D_n/D$. Auf Grund all dessen sind die Lösungen von (16)

$$B(w_\nu)=\frac{D_\nu}{D}W(x,y)\quad(\nu=1,2,\ldots n)$$

d.h.

$$B(w_\nu)=\frac{W(x,y)}{\omega'(r_\nu)}e^{-\frac{r_\nu}{2}\bar z}\quad(\nu=1,2,\ldots n).$$

Die Grössen w_ν erhält man durch Inversionsbildung des Ausdrucks von $B(w_\nu)$. Bezeichnet man

$$\S f(x,y)=w,$$

so soll

$$B(w)=f(x,y)$$

sein. In einer meiner Arbeit [4]* zeigte ich dass sich zwei nichtanalytische Funktionen $w_1(x,y)$ und $w_2(x,y)$ die dieselbe Abweichung B von der Analytizität besitzen, nur um eine willkürliche analytische Funktion unterscheiden. Deshalb, aus

$$B(w)=f(x,y)$$

folgt

$w=f(x,y)+\varphi(z)$ ($\varphi(z)$ beliebig und analytisch). Dadurch erhält man

$$w_\nu=\S\frac{W(x,y)}{\omega'(r_\nu)}e^{-\frac{r_\nu}{2}\bar z}+\varphi_\nu(z)\quad(\nu=1,\ldots n)$$

---

* In [4] benutzte ich das Symbol 𝄞.

oder

$$w_\nu = \frac{1}{\omega'(r_\nu)} \mathfrak{S} W(x, y)\, e^{-\frac{r_\nu}{2}\bar{z}} + \varphi_\nu(z) \quad (\nu = 1, \ldots n),$$

wie man sich überzeugen kann, wenn man Inversionen an beiden Seiten bildet. Trägt man die Werte w_ν in (7) ein, so erhält man die allgemeine Lösung

$$(18) \qquad w = \sum_{\nu=1}^{n} \frac{e^{\frac{r_\nu}{2}\bar{z}}}{\omega'(r_\nu)} \mathfrak{S} W(x, y)\, e^{-\frac{r_\nu}{2}\bar{z}} + \sum_{\nu=1}^{n} \varphi_\nu(z)\, e^{\frac{r_\nu}{2}\bar{z}}.$$

Wie man sieht, besteht ein vollständiger Parallelismus zwischen dem Lösen der gewöhnlichen Differentialgleichung

$$(19) \qquad y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_n y = f(x)$$

und der Gleichung

$$B_n(w) + a_1 B_{n-1}(w) + \cdots + a_n w = W(x, y).$$

An Stelle von $y^{(\nu)}$ $(\nu = 0, 1, \ldots n)$ und $f(x)$ treten die Grössen $B_\nu(w)$ und $W(x, y)$ auf, während in der Lösung an Stelle von Konstanten C_ν analytische Funktionen $\varphi_\nu(z)$ auftreten, und statt des Integrals erscheint das Zeichen $\mathfrak{S}$. Anstatt der unabhängigen Veränderlichen x in (19) tritt die Grösse $\bar{z}$ in (18). Die Gleichung (5) entspricht der charakteristischen Gleichung.

Die angeführte Methode entspricht der Variation der Konstanten.

Enthält die Gleichung (5) auch gleiche Wurzeln, so hat die Vandermondealternante in Ausdruck für D zwar den Wert Null, aber in solchem Falle hat der Ausdruck D in (17), der eine Wronskideterminante darstellt, eine andere Struktur. Die einzelne Glieder in (6) nähmlich sind partikuläre Lösungen von (3) im Falle $W = 0$. Die sind linear unabhängig [5, S.601]. Deshalb bilden sie ein Fundamentalsystem von partikulären Integralen. Dann aber muss der Ausdruck D einen von Null verschiedenen Wert haben.

Als Beispiel nehmen wir die Gleichung

$$(20) \qquad B_2(w) + \alpha B(w) + k^2 w = K \sin\left(\frac{\mu}{2}\bar{z}\right)$$

(α, k, K, μ, reelle Konstanten). Diese Gleichung kann man aus den System

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \alpha \frac{\partial u}{\partial x} - \alpha \frac{\partial u}{\partial y} + k^2 u = K \operatorname{ch}\frac{\mu}{2} y \sin\frac{\mu}{2} x$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \alpha \frac{\partial v}{\partial x} + \alpha \frac{\partial u}{\partial y} + k^2 v = -K \operatorname{ch}\frac{\mu}{2} y \cos\frac{\mu}{2} x$$

erhalten, indem man die mit i multiplizierte zweite Gleichung der ersten addiert

Die Gleichung (20) ist ein Analogon der Differentialgleichung für erzwungene Schwingungen. Nach (18) ist die Lösung der Gleichung (20)

$$(21)\qquad w=\frac{e^{\frac{r_1}{2}\bar z}}{\omega'(r_1)}\,\mathfrak{S}\left(K\sin\frac{\mu}{2}\bar z\, e^{-\frac{r_1}{2}\bar z}\right)+\frac{e^{\frac{r_2}{2}\bar z}}{\omega'(r_2)}\,\mathfrak{S}\left(K\sin\frac{\mu}{2}\bar z\, e^{-\frac{r_2}{2}\bar z}\right)$$

$$+\varphi_1(z)\,e^{\frac{r_1}{2}\bar z}+\varphi_2(z)\,e^{\frac{r_2}{2}\bar z}.$$

Hier sind φ_1 und φ_2 willkürliche analytische Funktionen. Die Wurzeln der charakterischen Gleichung sind

$$(22)\qquad r_{1,2}=\frac{-\alpha\pm\sqrt{\alpha^2-4\,k^2}}{2}.$$

Da noch

$\mathfrak{S}\, f(z)\,\psi(\bar z)=\dfrac{1}{2}f(z)\displaystyle\int\psi(\bar z)\,d\bar z+\Phi(z)$ (f, Φ, analytisch) wie man sich überzeugen kann wenn man die Inversion bildet, so ist

$$\mathfrak{S}\,K\sin\frac{\mu}{2}\bar z\, e^{-\frac{r}{2}\bar z}=\frac{K}{2}\int\sin\frac{\mu}{2}\bar z\, e^{-\frac{r}{2}\bar z}\,d\bar z$$

$$=-\frac{Ke^{-\frac{r}{2}\bar z}}{r^2+\mu^2}\left(r\sin\frac{\mu}{2}\bar z+\mu\cos\frac{\mu}{2}\bar z\right).$$

Wegen $\omega(\xi)=\xi^2+\alpha\xi+k^2$ ist $\omega'(r)=2\,r+\alpha=\pm\sqrt{\alpha^2-4\,k^2}$. Trägt man diese Werte in die Gleichung (21) ein, so folgt, wenn man noch von (22) Rechenschaft führt,

$$w=-\frac{K\left[(\mu^2-k^2)\sin\frac{\mu}{2}\bar z+\mu\alpha\cos\frac{\mu}{2}\bar z\right]}{(\mu^2-k^2)^2+\mu^2\alpha^2}+M,$$

wo

$$M=\Phi_1(z)\,e^{\frac{r_1}{2}\bar z}+\Phi_2(z)\,e^{\frac{r_2}{2}\bar z}$$

Dabei sind Φ_1 und Φ_2 willkürliche analytische Funktionen. Der Ausdruck für M ist der allgemeine Teil der Lösung und er entspricht der Eigenschwingung. Unter gewissen Voraussetzungen in welche ich nicht eingehen werde, kann man $M\to 0$ erreichen, so dass nur die erzwungene Schwingung zum Ausdruck kommt. Setzt man noch $\mu\alpha/(\mu^2-k^2)=\operatorname{tg}\sigma$, so folgt für den erzwungenen Teil

$$-\frac{K}{\sqrt{(\mu^2-k^2)^2+\mu^2\alpha^2}}\sin\left(\frac{\mu}{2}\bar z+\sigma\right).$$

Wenn man auch im komplexen Bereiche den ersten Faktor als Amplitude betrachtet, so kann er für $\mu\to k$ und für kleine Werte α sehr grosse Werte erreichen. Man gelangt zu einem Effekt der der Resonanzerscheinung entspricht.

LITERATUR

[1] Bilimović, A., *Diferencijalni elementi geometriske teorije neanalitičkih funkcija,* Glas SAN CCXLII, knj. 19, Beograd 1960, S. 1—81.

[2] Fempl, S., *Areoläre Exponentialfunktion als Lösung einer Klasse Differentialgleichungen,* Publ. Inst. Math. T. 8 (22), 1968. P. 138—142.

[3] Théodoresco N., *La dérivée aréolaire,* Anales roumaines de mathématiques. Cah. 3, Bucarest 1936. P. 18—20.

[4] Fempl, S., *Areolarni polinomi kao klasa neanalitičkih funkcija čiji su realni i imaginarni delovi poliharmonijske funkcije.* Matematički vesnik 1 (16), 1964. S. 29—38. Beograd.

[5] Kašanin, R., *Viša matematika II.* Beograd. Naučna knjiga 1950.

Institut Mathématique
Beograd