PUBLICATIONS DE L'INSTITUT MATHÉMATIQUE
Nouvelle série, tome 9 (23), 1969. p. 107—114.

SUR UN SYSTÈME INFINI D'INÉGALITÉS FONCTIONNELLES

P. M. Vasić — D. D. Adamović

(Communiqué le 17 Mai 1968)

0. L'inégalité de Hlawka

$$\text{(H)} \qquad |a_2+a_3|+|a_3+a_1|+|a_1+a_3| \leqslant |a_1|+|a_2|+|a_3|+|a_1+a_2+a_3|$$

(a_1, a_2, a_3 éléments d'un espace préhilbertien, $|a|$ demi norme de a) a été généralisée en 1963 dans [1] par l'inégalité

$$\text{(A)} \qquad \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} |a_i+a_j| \leqslant (n-2)\sum_{i=1}^{n}|a_i| + \left|\sum_{i=1}^{n} a_i\right| \qquad (n=3,\ 4,\ \ldots).$$

Après, D. Ž. Đoković [2] a généralisé le dernier résultat par l'inégalité

$$\text{(D)} \qquad \sum_{1\leqslant i_1<\cdots<i_k\leqslant n} |a_{i_1}+\cdots+a_{i_k}| \leqslant \binom{n-2}{k-1}\sum_{i=1}^{n}|a_i| + \binom{n-2}{k-2}\left|\sum_{i=1}^{n} a_i\right|$$

$$(1\leqslant k\leqslant n-1;\ n=3,\ 4,\ \ldots).$$

Les résultats (A) et (D) sont aussi valables dans tout espace préhilbertien.

On a établi en 1964 dans [3] que si l'inégalité (D) avec $n=3$, $k=2$ (c'est-à-dire l'inégalité (H)) n'est pas valable dans tout l'espace demi normé considéré, alors il en est ainsi de (D) pour tout $n\geqslant 3$ et pour tout $2\leqslant k\leqslant n$.

Un des résultats de [4] (1968) peut être énoncé comme il suit:

(V) Soit f une fonction réelle convexe du troisième ordre (pour la définition voir [5]) dans l'intervalle $[0, a)$ $(a>0)$ et soit $a_i \in [0, a)$ $(i=1, \ldots, n)$ et $\sum_{i=1}^{n} a_i \in [0, a)$. Alors

$$\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} f(a_i+a_j) + \binom{n-1}{2} f(0) \leqslant (n-2)\sum_{i=1}^{n} f(a_i) + f\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right) \qquad (n\geqslant 3).$$

Les résultats (A) et (V) contiennent les inégalités à peu près de même forme, mais les conditions sous lesquelles ces inégalités sont valables sont incomparables (on peut dire même: disparates). En outre, le résultat (A) et le résultat (D) plus général sont déduits des identités correspondantes, et cela pour tout n et k, tandis que (V) est démontré d'abord pour $n=3$ et étendu ensuite, par induction mathématique, à tout $n\geqslant 3$.

Inspirés par tous les faits précédents, nous avons obtenu le théorème suivant de caractère assez général, lequel, entre autre, met en évidence (partiellement au moins), la structure logique et la connexion mutuelle des résultats (H), (A), (D), [3], (V) et rend possible une démonstration de (D) différente de celle exposée dans [2] et [1]. Il faut noter, cependant, que ce théorème ne contient pas (et ne fournit pas de moyen pour obtenir) les conditions nécessaires et suffisantes pour que l'inégalité en question devienne égalité, lesquelles sont formulées et démontrées pour chacun des cas (A), (D) et (V), dans les travaux correspondants [2], [1] et [4], d'une manière particulière.

1. Théorème. *Soient: D un demi groupe additif et commutatif à l'élément neutre O, $E \subset D$ un ensemble aux propriétés:*

α) $0 \in E$;

β) $\left(a_i \in E \ (i=1, \ldots, n) \ \wedge \sum_{i=1}^{n} a_i \in E\right) \Rightarrow \sum_{\nu=1}^{m} a_{i_\nu} \in E \ (1 \leqslant i_1 < \cdots < i_m \leqslant n)$

et G un groupe additif, commutatif et totalement ordonné (le dernier signifie que G est muni d'une relation d'ordre total $\leqslant$ avec la propriété

$$(a, b, c \in G \wedge a < b) \Rightarrow a + c < b + c).$$

Pour une fonction $f\colon E \to G$ désignons par $(C_{n,k})$ la condition

$$\sum_{1 \leqslant i_1 < \cdots < i_k \leqslant n} f(a_{i_1} + \cdots + a_{i_k}) + \binom{n-1}{k}(k-1) f(0)$$

$$\leqslant \binom{n-2}{k-1} \sum_{i=1}^{n} f(a_i) + \binom{n-2}{k-2} f\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)$$

$$\left(a_i \in E \ (1 \leqslant i \leqslant n), \quad \sum_{i=1}^{n} a_i \in E\right).$$

Alors les deux implications suivantes sont valables:

$$(C_{3,2}) \Rightarrow (C_{n,k}) \ (2 \leqslant k \leqslant n-1;\ n \geqslant 3), \tag{1}$$

$$non\,(C_{3,2}) \Rightarrow non\,(C_{n,k}) \ (2 \leqslant k \leqslant n-1;\ n \geqslant 3). \tag{2}$$

Autrement dit, toutes les conditions

$$(C_{n,k}) \qquad (2 \leqslant k \leqslant n;\ n \geqslant 3) \tag{3}$$

sont remplies si et seulement si une quelconque d'entr'elles est remplie; ou bien: chacune des conditions (3) *est équivalente à toute autre de ces conditions.*

Avant de passer à la démonstration, notons que l'on peut considérer l'implication (1) comme l'énoncé du fait que la „solution générale" du „système infini d'inégalités fonctionnelles" (3) est donnée (déterminée) par l'inégalité

$(C_{3,2})$, dans le sens que la fonction f $(:E\to G)$ est une solution du système (3) si et seulement si f satisfait à $(C_{3,2})$.

Démonstration. On peut supposer que

$$f(0)=0. \tag{4}$$

En effet, supposons que l'on ait déjà démontré le théorème sous l'hypothèse (4) et appliquons-le à la fonction $f(x)-f(0)$. Étant donné que l'inégalité dans $(C_{n,k})$ devient alors

$$\sum_{1\leqslant i_1<\cdots<i_k\leqslant n} f(a_{i_1}+\cdots+a_{i_k})-\binom{n}{k}f(0)$$

$$\leqslant\binom{n-2}{k-2}\sum_{i=1}^{n}f(a_i)+\binom{n-2}{k-2}f\left(\sum_{i=1}^{n}a_i\right)-\left[\binom{n-2}{k-1}n+\binom{n-2}{k-2}\right]f(0)$$

et que l'on a

$$\binom{n-2}{k-1}n+\binom{n-2}{k-2}-\binom{n}{k}=\binom{n-2}{k-2}\left[\frac{n(n-k)}{k-1}+1\right]-\binom{n-1}{k-1}\frac{n}{k}$$

$$=\binom{n-2}{k-2}\frac{(n-1)(n+1-k)}{k-1}-\binom{n-1}{k-1}\frac{n}{k}$$

$$=\binom{n-1}{k-1}\frac{(n-k)(k-1)}{k}$$

$$=\binom{n-1}{k}(k-1),$$

il en résulte immédiatement le cas général du théorème.

Supposons donc, sous l'hypothèse (4), la condition $(C_{3,2})$ remplie. Avant de démontrer, par induction, que l'on a alors (3), nous allons prouver, de la même manière, les cas particuliers suivants: $(C_{n,2})$ $(n\geqslant 3)$ et $(C_{n,n-1})$ $(n\geqslant 3)$, c'est-à-dire que l'on a

$$\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} f(a_i+a_j)\leqslant(n-2)\sum_{i=1}^{n}f(a_i)+f\left(\sum_{i=1}^{n}a_i\right) \tag{5}$$

$$\left(a_i\in E\ (i=1,\ldots,n),\quad \sum_{i=1}^{n}a_i\in E;\ n\geqslant 3\right)$$

et

$$\sum_{1\leqslant i_1<\cdots<i_{n-1}\leqslant n} f(a_{i_1}+\cdots+a_{i_{n-1}})\leqslant\sum_{i=1}^{n}f(a_i)+(n-2)f\left(\sum_{i=1}^{n}a_i\right) \tag{6}$$

$$\left(a_i\in E\ (i=1,\ldots,n),\quad \sum_{i=1}^{n}a_i\in E;\ n\geqslant 3\right).$$

Pour $n=3$ chacune des assertion (5) et (6) se réduit à $(C_{3,2})$ et est donc vraie, selon l'hypothèse. Supposons la proposition (5) vraie pour un nombre naturel $n\,(\geqslant 3)$ et soit

$$a_i \in E \;\; (i=1,\ldots,n+1), \;\; \sum_{i=1}^{n+1} a_i \in E. \tag{7}$$

En applicant (5) aux éléments

$$a_i \;\; (i=1,\ldots,n-1), \;\; a_n+a_{n+1}, \tag{8}$$

on obtient

$$\begin{aligned} &\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n-1} f(a_i+a_j)+\sum_{i=1}^{n-1} f(a_i+a_n+a_{n+1}) \\ &\qquad \leqslant (n-2)\left[\sum_{i=1}^{n-1} f(a_i)+f(a_n+a_{n+1})\right]+f\left(\sum_{i=1}^{n+1} a_i\right) \end{aligned} \tag{9}$$

et en applicant $(C_{3,2})$ aux éléments a_i, a_n et a_{n+1}, pour tout $i=1,\ldots,n-1$ à part, on obtient

$$\begin{aligned} -f(a_i+a_n+a_{n+1}) &\leqslant -f(a_i+a_n)-f(a_i+a_{n+1}) \\ &\quad -f(a_n+a_{n+1})+f(a_i)+f(a_n)+f(a_{n+1}) \qquad (i=1,\ldots,n-1), \end{aligned}$$

ou bien, après addition,

$$\begin{aligned} -\sum_{i=1}^{n-1} f(a_i+a_n+a_{n+1}) &\leqslant -\sum_{i=1}^{n-1}[f(a_i+a_n)+f(a_i+a_{n+1})]-(n-1)\,f(a_n+a_{n+1}) \\ &\quad +\sum_{i=1}^{n-1} f(a_i)+(n-1)\,[f(a_n)+f(a_{n+1})]. \end{aligned} \tag{10}$$

L'addition des inégalités (9) et (10) donne

$$\begin{aligned} &\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n-1} f(a_i+a_j)+\sum_{i=1}^{n-1}[f(a_i+a_n)+f(a_i+a_{n+1})]+f(a_n+a_{n+1}) \\ &\qquad \leqslant (n-1)\left[\sum_{i=1}^{n-1} f(a_i)+f(a_n)+f(a_{n+1})\right]+f\left(\sum_{i=1}^{n+1} a_i\right), \end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n+1} f(a_i+a_j)\leqslant[(n+1)-2]\sum_{i=1}^{n+1} f(a_i)+f\left(\sum_{i=1}^{n+1} a_i\right),$$

ce qui achève la démonstration inductive de (5).

Supposons maintenant l'assertion (6) vraie pour $n\,(\geqslant 3)$ et que l'on ait de nouveau (7). L'application de (6) aux éléments (8) donne

$$(11)\qquad f\Big(\sum_{i=1}^{n-1} a_i\Big)+f\Big(\sum_{i=1}^{n-2} a_i+a_n+a_{n+1}\Big)+\cdots+f\Big(\sum_{i=2}^{n-1} a_i+a_n+a_{n+1}\Big)$$
$$\leqslant \sum_{i=1}^{n-1} f(a_i)+f(a_n+a_{n+1})+(n-2)\,f\Big(\sum_{i=1}^{n+1} a_i\Big)$$

et l'application de $(C_{3,2})$ aux éléments

$$\sum_{i=1}^{n-1} a_i,\ a_n \text{ et } a_{n+1}$$

conduit à

$$(12)\qquad f\Big(\sum_{i=1}^{n} a_i\Big)+f\Big(\sum_{i=1}^{n-1} a_i+a_{n+1}\Big)+f(a_n+a_{n+1})$$
$$\leqslant f\Big(\sum_{i=1}^{n-1} a_i\Big)+f(a_n)+f(a_{n+1})+f\Big(\sum_{i=1}^{n+1} a_i\Big).$$

On obtient par addition de (11) et (12)

$$\sum_{1\leqslant i_1<\cdots<i_n\leqslant n+1} f(a_{i_1}+\cdots+a_{i_n})\leqslant \sum_{i=1}^{n+1} f(a_i)+[(n+1)-2]\,f\Big(\sum_{i=1}^{n+1} a_i\Big),$$

ce qui termine la démonstration inductive de (6).

L'assertion $(C_{n,k})$ pour $n=3$ (et $k=2$, la seule possibilité pour k) est vraie, d'après l'hypothèse. Supposons $(C_{n,k})$ vrai avec le premier indice variant jusqu'au nombre naturel $n\,(\geqslant 3)$. En supposant (7), l'application de $(C_{n,k})$ aux éléments (8), avec $2\leqslant k\leqslant n-1$, donne (après multiplication par $k-1$)

$$(13)\qquad (k-1)\sum_{1\leqslant i_1<\cdots<i_k\leqslant n-1} f(a_{i_1}+\cdots+a_{i_k})$$
$$+(k-1)\sum_{1\leqslant i_1<\cdots<i_{k-1}\leqslant n-1} f(a_{i_1}+\cdots+a_{i_{k-1}}+a_n+a_{n+1})$$
$$\leqslant (k-1)\left\{\binom{n-2}{k-1}\left[\sum_{i=1}^{n-1} f(a_i)+f(a_n+a_{n+1})\right]+\binom{n-2}{k-2} f\Big(\sum_{i=1}^{n+1} a_i\Big)\right\}.$$

L'application de (6) aux $k+1$ éléments $a_{i_1},\ldots,a_{i_{k-1}},\ a_n,\ a_{n+1}$ et l'addition de toutes ces inégalités donne

$$(14)\qquad -(k-1)\sum_{1\leqslant i_1<\cdots<i_{k-1}\leqslant n-1} f(a_{i_1}+\cdots+a_{i_{k-1}}+a_n+a_{n+1})$$
$$+\sum_{1\leqslant i_1<\cdots<i_{k-1}\leqslant n-1}\ \sum_{\substack{j_1<\cdots<j_k,\\ j_1,\ldots,j_k\in\{i_1,\ldots,i_{k-1},n,n+1\}}} f(a_{j_1}+\cdots+a_{j_k})$$
$$\leqslant \sum_{1\leqslant i_1<\cdots<i_{k-1}\leqslant n-1} [f(a_{i_1})+\cdots+f(a_{i_{k-1}})]$$
$$+\binom{n-1}{k-1}[f(a_n)+f(a_{n+1})].$$

En ajoutant (14) à (13), on obtient

$$(15)\qquad (k-1) \sum_{1 \leqslant i_1 < \cdots < i_k \leqslant n-1} f(a_{i_1} + \cdots + a_{i_k})$$
$$+ \sum_{1 \leqslant i_1 < \cdots < i_{k-1} \leqslant n-1} \ \sum_{\substack{j_1 < \cdots < j_k, \\ j_1, \ldots, j_k \in \{i_1, \ldots, i_{k-1}, n, n+1\}}} f(a_{j_1} + \cdots + a_{j_k});$$
$$\leqslant (k-1) \binom{n-2}{k-1} \sum_{i=1}^{n-1} f(a_i) + \binom{n-1}{k-1} [f(a_n) + f(a_{n+1})]$$
$$+ \sum_{1 \leqslant i_1 < \cdots < i_{k-1} \leqslant n-1} [f(a_{i_1}) + \cdots + f(a_{i_{k-1}})]$$
$$+ (k-1) \binom{n-2}{k-1} f(a_n + a_{n+1}) + (k-1) \binom{n-2}{k-2} f\Bigl(\sum_{i=1}^{n+1} a_i\Bigr).$$

En ajoutant à (15) toutes les inégalités de même type où le rôle des éléments a_n et a_{n+1} est joué par toutes les autres paires des éléments a_i $(i = 1, \ldots, n+1)$, on obtient

$$(16)\qquad A_n \sum_{1 \leqslant i_1 < \cdots < i_k \leqslant n+1} f(a_{i_1} + \cdots + a_{i_k})$$
$$\leqslant B_n' \sum_{i=1}^{n+1} f(a_i) + C_n' f\Bigl(\sum_{i=1}^{n+1} a_i\Bigr) + (k-1) \binom{n-2}{k-1} \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n+1} f(a_i + a_j);$$

on va donner les expressions pour A_n, B_n' et C_n'.

On a, d'après (5) appliqué aux éléments a_i $(i = 1, \ldots, n+1)$,

$$(17)\qquad (k-1) \binom{n-2}{k-1} \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n+1} f(a_i + a_j)$$
$$\leqslant (k-1) \binom{n-2}{k-1} (n-1) \sum_{i=1}^{n+1} f(a_i) + (k-1) \binom{n-2}{k-1} f\Bigl(\sum_{i=1}^{n+1} a_i\Bigr).$$

L'addition de (16) et (17) donne

$$(18)\qquad A_n \sum_{1 \leqslant i_1 < \cdots < i_k \leqslant n+1} f(a_{i_1} + \cdots + a_{i_k}) \leqslant B_n \sum_{i=1}^{n+1} f(a_i) + C_n f\Bigl(\sum_{i=1}^{n+1} a_i\Bigr).$$

Ici on a:

$$A_n = \binom{n+1}{2} \left[(k-1) \binom{n-1}{k} + (k+1) \binom{n-1}{k-1} \right] : \binom{n+1}{k}$$
$$= \frac{(n+1)\,n}{2} \cdot \frac{k!}{(n+1)\,n \ldots (n-k+2)} \binom{n-1}{k} \left[(k-1) + \frac{(k+1)\,k}{n-k} \right]$$
$$= \frac{1}{2} (n-k+1)(nk-n+2k),$$

$$B_n = B_n' + (k-1)\binom{n-2}{k-1}(n-1) \tag{19}$$

$$= \binom{n+1}{2}\left[\binom{n-2}{k-1}(k-1)(n-1) + 2\binom{n-1}{k-1} + (k-1)\binom{n-1}{k-1}\right]\frac{1}{n+1}$$

$$+ (k-1)\binom{n-2}{k-1}(n-1)$$

$$= \frac{(n+1)n}{2}\,\frac{1}{n+1}\binom{n-1}{k-1}[(k-1)(n-k)+k+1] + \binom{n-1}{k-1}(k-1)(n-k)$$

$$= \frac{1}{2}\binom{n-1}{k-1}[(n-k+1)(nk-n+2k-2)+n(k+1)]$$

$$= \frac{1}{2}\binom{n-1}{k-1}(n-k+1)(nk-n+2k)$$

$$= \binom{n-1}{k-1}A_n,$$

$$C_n = C_n' + (k-1)\binom{n-2}{k-1} \tag{20}$$

$$= (k-1)\left[\binom{n+1}{2}\binom{n-2}{k-2} + \binom{n-2}{k-1}\right]$$

$$= \binom{n-1}{k-2}\left[\frac{(n+1)n}{2}(k-1)\frac{n-k+1}{n-1} + \frac{(n-k+1)(n-k)}{n-1}\right]$$

$$= \binom{n-1}{k-2}\frac{(n-k+1)(n-1)(nk-n+2k)}{2(n-1)}$$

$$= \binom{n-1}{k-2}A_n.$$

D'après (19), (20) et le fait que dans un groupe totalement ordonné

$$ma \leqslant mb \Rightarrow a \leqslant b \qquad (m \text{ nombre naturel}),$$

l'inégalité (18) devient

$$\sum_{1\leqslant i<\cdots<i_k\leqslant n+1} f(a_{i_1}+\cdots+a_{i_k}) \leqslant \binom{(n+1)-2}{k-1}\sum_{i=1}^{n+1} f(a_i) + \binom{(n+1)-2}{k-2} f\left(\sum_{i=1}^{n+1} a_i\right)$$

$$(2 \leqslant k \leqslant n-1).$$

Tenant compte de (6), on a ainsi démontré la validité de $(C_{n,k})$ pour le nombre $n+1$ au lieu de n, ce qui achève la démonstration inductive de (3), c'est-à-dire la démonstration de (1).

L'assertion (2) est évidemment équivalente à l'assertion que la validité de $(C_{n,k})$ pour un n $(\geqslant 3)$ et un k $(2 \leqslant k \leqslant n)$ déterminés entraîne $(C_{3,2})$. Or, il suffit de poser dans l'inégalité $(C_{n,k})$ $a_4 = \cdots = a_n = 0$ pour qu'elle se réduise à $(C_{3,2})$, ce qu'on vérifie aisément (tenant compte de (4)).

Ainsi, notre théorème est complètement démontré.

BIBLIOGRAPHIE

[1] D. D. Adamović, *Généralisation d'une identité de Hlawka et de l'inégalité correspondante*, Matematički vesnik, 1 (16) (1964), 39—43.

[2] D. Ž. Đoković, *Generalizations of Hlawka's inequality*, Glasnik matematičko-fizički i astronomski, 18 (1963), 169—175.

[3] D. D. Adamović, *Quelques remarques relatives aux généralisations des inégalités de Hlawka et de Hornich*, Matematički vesnik, 1 (16) (1964), 241—242.

[4] P. M. Vasić, *Les inégalités pour les fonctions convexes d'ordre n*, Matematički vesnik, 5 (20) (1968), 327—331.

[5] T. Popoviciu, *Les fonctions convexes*, Actualités 992, Paris 1945, pp. 76.

Institut Mathématique
Beograd