PUBLICATIONS DE L'INSTITUT MATHÉMATIQUE
Nouvelle série, tome 9 (23), 1969. p. 97—106.

РИМАНОВЫ ПРОСТРАНСТВА, СОДЕРЖАЩИЕ ГЕОДЕЗИЧЕСКОЕ ПОЛЕ НАПРАВЛЕНИЙ II

М. Прванович

(Поступило 6-ого мая 1968)

1. Понятие геодезического поля направлений введено Я. Л. Шапиро [1] следующим образом: Рассмотрим поле m-мерных площадок E_m в пространстве связности A_{n+m} определяемых m линейно независимыми аффинной векторными полями $\overset{\omega}{v^i}$ $(\omega = 1,2, \ldots, m)$ и предположим, что поле E_m является голономным, т. е. существует система поверхностей X_m огибающая поле площадок E_m. Голономное поле площадок E_m называется геодезическим, если всякое многообразие $m+1$ измерения, образованное поверхностями X_m, проходящими через точки любой геодезической пространства A_{n+m}, является вполне геодезическим. Субпроективные и частично проективные пространства [2] являются частным случаем пространств, содержащих геодезическое поле направлений, а именно случаем, в котором упомянутое многообразие $m+1$ измерения является не только вполне геодезическим, но и плоским.

Канонический вид метрики риманова пространства, содержащего геодезическое поле направлений, рассмотривался в [1] и [2]. В работе [1] показано, что в случае, когда геодезическое поле направлений не является изотропным, пространство V_{n+m} полуприводимо. Дело обстоит совсем иначе, если геодезическое поле направлений вполне изотропно, а именно: в этом случае оно является и полем параллельных площадок благодаря чему в [3] нам удалось получить канонический вид метрики этого пространства. Но если геодезическое поле площадок частично изотропно, то оно не будет, в то же время, и полем параллелных площадок. Таким образом, римановы пространства, содержащие частично изотропное геодезическое поле направлений, следует изучать особо. В этом состоит цель настоящей работы.

2. В пространстве A_{n+m}, содержащем геодезическое поле m-мерных направлений, можно выбрать специальную систему координат, связанную с заданным голономным полем m-мерных направленый. Возьмем с этой целью вышеупомянутые поверхности X_m в качестве координатных многообразий. Обозначим через x^ω $(\omega = 1,2, \ldots, m)$ координаты точки этого m-мерного многообразия. Если числа x^a $(a = m+1, \ldots, m+n)$ фиксируют положение этой поверхности в A_{n+m}, то $n+m$ чисел x^ω, x^a будут координатами точки пространства A_{n+m} в специальной системе координат.

Векторы $\overset{\omega}{v}{}^i$, определяющие геодезическое поле направлений, определяются, в специальной системе координат, уравнениями

$$(2.1) \qquad \overset{\omega}{v}{}^i = \delta^i_\omega .$$

Коэффициенты связности пространства A_{n+m} имеют, в той же системе координат, вид [1]

$$(2.2) \qquad \begin{cases} \Gamma^a_{ij} = \Pi^a_{ij}(x^b) + \varphi_{(i}\,\delta^a_{j)} \\ \Pi^a_{\omega j} = 0 \end{cases}$$

$$i, j, k = 1,2, \ldots n+m; \quad \omega = 1,2, \ldots, m; \quad a, b, c = m+1, \ldots, m+n.$$

При этом, величины Π^a_{ij} не зависят от координат x^ω.

Рассмотрим теперь пространство A_{n+m}, облодающее римановой метрикой, т. е. пространство V_{n+m}, и пусть g_{ij} его метрический тензор. Предположим далее, что геодезическое поле направлений частично изотропно с r-мерной изотропной и ρ-мерной неизотропной частью $(r+\rho=m)$. Возьмем базись $\overset{\omega}{v}{}^i$ геодезического поля направлений, так чтобы векторы $\overset{\alpha}{v}{}^i$ $(\alpha, \beta, \gamma = 1, 2, \ldots, r)$ определяли изотропную, а векторы $\overset{\lambda}{v}{}^i$ $(\lambda, \mu, \nu = r+1, \ldots, m)$ — неизотропную часть. Площадки, натянутые на векторы $\overset{\alpha}{v}{}^i$ и $\overset{\lambda}{v}{}^i$ обозначим соответственно через E_r и E_ρ.

Благодаря римановой метрике, в каждой точке пространства V_{n+m} можно рассматривать вполне определенную площадку E_n ортогональную к геодезической площадке E_m. Так как последняя частично изотропна, то у E_n и E_m есть общая часть — r-мерная площадка E_r.

Предположим что поле площадок E_n голономно; семейство подпространств огибающих это поле обозначим через $\overline{X}_n$. В этом случае в пространстве V_{n+m} есть система m-мерных поверхностей X_m, огибающих геодезическое поле направлений и система n-мерных поверхностей $\overline{X}_n$. Через каждую точку пространства V_{n+m} проходит одно подпространство X_m и одно подпространство $\overline{X}_n$. Так как у их касательных плоскостей E_m и E_n есть общая r-мерная часть E_r, то эти две системы подпространств, пересекаясь, определяют еще одну систему подпространств — систему r-мерных подпространств, огибающих поле площадок E_r.

Уже введенную специальную систему координат можно уточнить, выбирая эти системы поверхностей в качестве координатных многообразий в V_{n+m}. Обозначим через x^α $(\alpha, \delta, \beta = 1,2, \ldots, r)$ координаты точки r-мерного многообразия, через x^α, x^λ $(\lambda, \mu, \nu = r+1, \ldots, m)$ координаты точки многообразия X_m, а через x^α, x^s $(s, t, p, q = m+1, \ldots, n+\rho)$ координаты точки многообразия $\overline{X}_n$. Если числа $x^{\alpha'}$ $(\alpha' = n+\rho+\alpha)$ фиксируют положение подпространства $X_m + \overline{X}_n$, то $n+m$ чисел $x^\alpha, x^\lambda, x^s, x^{\alpha'}$ будут координатами в пространстве V_{n+m}. Такую систему координат будем в дальнейшем называть специальной.

Таким образом, в специальной системе координат площадки E_r, E_m и E_n натянуты, соответственно, на векторы

$$\delta^i_\alpha; \qquad \delta^i_\alpha,\ \delta^i_\lambda; \qquad \delta^i_\alpha,\ \delta^i_s,$$

пока матрицу метрического тензора можно разбить на клетки следующим образом

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} g_{\alpha\beta} & g_{\alpha\lambda} & g_{\alpha s} & g_{\alpha\beta'} \\ g_{\mu\beta} & g_{\mu\lambda} & g_{\mu s} & g_{\mu\beta'} \\ g_{t\beta} & g_{t\lambda} & g_{ts} & g_{t\beta'} \\ g_{\alpha'\beta} & g_{\alpha'\lambda} & g_{\alpha' s} & g_{\alpha'\beta} \end{pmatrix}$$

$$i, j, k = 1,2, \ldots, n+m \qquad s, t, p, q = m+1, \ldots, n+\rho$$

$$\alpha, \beta, \gamma = 1,2, \ldots, r \qquad \alpha' = n+\rho+\alpha.$$

$$\lambda, \mu, \nu = r+1, \ldots, m$$

Так как площадки E_r вполне изотропны, то

$$g_{ij}\,\delta^i_\alpha\,\delta^i_\beta = g_{\alpha\beta} = 0.$$

Так же из ортогональности площадок E_r и E_m, E_r и E_n, E_m и E_n, следует

$$(2.3) \qquad g_{ij}\,\delta^i_\alpha\,\delta^j_\lambda = g_{\alpha\lambda} = 0; \qquad g_{ij}\,\delta^i_\alpha\,\delta^j_s = g_{\alpha s} = 0; \qquad g_{ij}\,\delta^i_\lambda\,\delta^j_s = g_{\lambda s} = 0.$$

Поэтому, обозначая через $[ij, k]$ символы Христоффеля 1-ого, а через $\left\{ {k \atop ij} \right\}$ символы Христоффеля 2-ого рода, имеем

$$[ij, \alpha] = g_{\alpha k} \left\{ {k \atop ij} \right\} = g_{\alpha\beta'} \left\{ {\beta' \atop ij} \right\},$$

и учитывая (2.2), получаем

$$(2.4) \qquad \frac{\partial g_{i\alpha}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{j\alpha}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^\alpha} = 2\, g_{\alpha\beta'}\, \Pi^{\beta'}_{ij} + g_{\alpha j}\,\varphi_i + g_{\alpha i}\,\varphi_j.$$

Если здесь положить $i=\beta$, $j=\gamma'$ то имеем:

$$(2.5) \qquad \frac{\partial g_{\gamma'\alpha}}{\partial x^\beta} - \frac{\partial g_{\beta\gamma'}}{\partial x^\alpha} = g_{\alpha\gamma'}\,\varphi_\beta.$$

При $\alpha=\beta$ эта формула дает:

$$g_{\alpha\gamma'}\,\varphi_\alpha = 0,$$

где α фиксированный индекс. Так как для любого индекса α найдется такой индекс γ', что $g_{\alpha\gamma'} \neq 0$ (ибо в противном случае метрика была бы вырожденной), то должно быть

$$(2.6) \qquad \varphi_\alpha = 0.$$

Но тогда (2.5) принимает вид

$$\frac{\partial g_{\gamma'\alpha}}{\partial x^{\beta}}-\frac{\partial g_{\beta\gamma'}}{\partial x^{\alpha}}=0,$$

откуда следует, чво существует r функций $f_{\gamma'}$ таких что

$$g_{\alpha\gamma'}=\frac{\partial f_{\gamma'}}{\partial x^{\alpha}}.$$

Эти функции можно взять за переменные x^{α}. В самом деле, специальная система координат определяется не однозначно, а с точностью до преобразований

$$\bar{x}^{\alpha}=\bar{x}^{\alpha}(x^{i}),\quad \bar{x}^{s}=\bar{x}^{s}(x^{t},x^{\alpha'}),\quad \bar{x}^{\lambda}=\bar{x}^{\lambda}(x^{\mu},x^{\alpha'}),\quad \bar{x}^{\alpha'}=\bar{x}^{\alpha'}(x^{\beta'}).$$

Но если функции $f_{\gamma'}$ взяты за переменные x^{α}, то

$$g_{\alpha\gamma'}=\delta^{\alpha}_{\gamma}. \tag{2.7}$$

Полагая, что в (2.4) $i=t$, $j=\gamma'$ и учитывая (2.3) и (2.7), получаем

$$-\frac{\partial g_{t\gamma'}}{\partial x^{\alpha}}=2\,\Pi^{\alpha'}_{t\gamma'}+\delta^{\alpha}_{\gamma}\varphi_{t}. \tag{2.8}$$

Уравнения (2.4), при $i=\lambda$, $j=\mu$ дают

$$\frac{\partial g_{\lambda\mu}}{\partial x^{\alpha}}=0. \tag{2.9}$$

Положив, что в (2.4) $i=\lambda$, $j=\gamma'$ получаем

$$-\frac{\partial g_{\lambda\gamma'}}{\partial x^{\alpha}}=\varphi_{\lambda}\,\delta^{\gamma}_{\alpha}, \tag{2.10}$$

а положив, что $i=\beta'$, $j=\gamma'$, имеем

$$-\frac{\partial g_{\beta'\gamma'}}{\partial x^{\alpha}}=2\,\Pi^{\alpha'}_{\beta'\gamma'}+\delta^{\alpha}_{\beta}\varphi_{\gamma'}+\delta^{\alpha}_{\gamma}\varphi_{\beta'}. \tag{2.11}$$

Принимая во внимание (2.3), можно написать

$$[ij,t]=g_{ts}\begin{Bmatrix} s \\ ij \end{Bmatrix}+g_{t\gamma'}\begin{Bmatrix} \gamma' \\ ij \end{Bmatrix},$$

т.е.

$$\frac{\partial g_{it}}{\partial x^{j}}+\frac{\partial g_{jt}}{\partial x^{i}}-\frac{\partial g_{tj}}{\partial x^{t}}=2\,(g_{ts}\,\Pi^{s}_{ij}+g_{t\gamma'}\,\Pi^{\gamma'}_{ij})+$$

$$+g_{tp}(\varphi_{i}\,\delta^{p}_{j}+\varphi_{j}\,\delta^{p}_{i})+g_{t\gamma'}\,(\varphi_{i}\,\delta^{\gamma'}_{j}+\varphi_{j}\,\delta^{\gamma'}_{i}). \tag{2.12}$$

Эта формула для $i=\beta$, $j=s$ и $i=\beta$, $j=\gamma'$ записывается в виде

$$(2.13)\qquad \frac{\partial g_{st}}{\partial x^{\alpha}}=0, \qquad\qquad (2.14)\qquad \frac{\partial g_{\gamma' t}}{\partial x^{\beta}}=0,$$

а для $i=s$, $j=\lambda$, в виде

$$(2.15)\qquad \frac{\partial g_{st}}{\partial x^{\lambda}}=g_{st}\,\varphi_{\lambda}.$$

Для $i=p$, $j=\gamma$ (2.12) дает

$$(2.16)\qquad \frac{\partial g_{pt}}{\partial x^{\gamma'}}+\frac{\partial g_{\gamma' t}}{\partial x^{p}}-\frac{\partial g_{p\gamma'}}{\partial x^{t}}=2\,(g_{ts}\,\Pi^{s}_{p\gamma'}+g_{t\alpha'}\,\Pi^{\alpha'}_{p\gamma'})+g_{tp}\,\varphi_{\gamma'}+g_{t\gamma'}\,\varphi_{p},$$

а для $i=\mu$, $j=\lambda$ и $i=\mu$, $j=\gamma'$ имеем соответственно

$$(2.17)\qquad \frac{\partial g_{\mu\lambda}}{\partial x^{\alpha}}=0, \qquad\qquad (2.18)\qquad \frac{\partial g_{\gamma' t}}{\partial x^{\mu}}-\frac{\partial g_{\mu\gamma'}}{\partial x^{t}}=g_{t\gamma'}\,\varphi_{\mu}.$$

Наконец, пологая, что в (2.12) $i=\alpha'$, $j=\beta'$, получаем

$$(2.19)\qquad \frac{\partial g_{\alpha' t}}{\partial x^{\beta'}}+\frac{\partial g_{\beta' t}}{\partial x^{\alpha'}}-\frac{\partial g_{\alpha'\beta'}}{\partial x^{t}}=2\,(g_{ts}\,\Pi^{s}_{\alpha'\beta'}+g_{t\gamma'}\,\Pi^{\gamma'}_{\alpha'\beta'})+g_{t\beta'}\,\varphi_{\alpha'}+g_{t\alpha'}\,\varphi_{\beta'}.$$

Условия (2.9), (2.13) и (2.14) показывают, что компоненты g_{st}, $g_{t\gamma'}$ и $g_{\lambda\mu}$ метрического тензора не зависят от координат x^{α}, а условия (2.17) — что компоненты $g_{\lambda\mu}$ не зависят и от координат x^{t}. Из (2.8) и (2.14) получаем

$$(2.20)\qquad \varphi_{t}=-2\,\Pi^{\alpha'}_{t\alpha'},$$

откуда следует, что величины φ_{t} не зависят от координат x^{α}, x^{λ}.

Дифференцируя уравнение (2.15) по x^{t} имеем

$$g_{pt}\,\frac{\partial \varphi_{\lambda}}{\partial x^{\alpha}}=0.$$

Так как все компоненты g_{pt} метрического тензора не могут быт равным нулю, ибо в этом случае метрика была бы вырожденной, то должно быть

$$\frac{\partial \varphi_{\lambda}}{\partial x^{\alpha}}=0,$$

т. е. величины φ_{λ} не зависят от координат x^{α}. Они не зависят и от координат x^{t}. В самом деле, из (2.10), дифференцируя по x^{t}, получим

$$\frac{\partial^{2} g_{\lambda\gamma'}}{\partial x^{\alpha}\,\partial x^{t}}=-\delta^{\alpha}_{\gamma}\,\frac{\partial \varphi_{\lambda}}{\partial x^{t}}.$$

С другой стороны, дифференцируя (2.18) по x^{α} и учитывая, что $g_{t\gamma'}$ и φ_{μ} не зависят от координат x^{α}, имеем

$$\frac{\partial^{2} g_{\lambda\gamma'}}{\partial x^{\alpha}\,\partial x^{t}}=0.$$

Таким образом,

$$\frac{\partial \varphi_\lambda}{\partial x^t} = 0,$$

что и требовалось доказать.

Так как величины φ_λ не зависят от координат x^α, то из (2.10), интегрируя, имеем

$$g_{\lambda\alpha'} = -\varphi_\lambda x^\alpha + a_{\lambda\alpha'}. \tag{2.21}$$

При этом, $a_{\lambda\alpha'}$ какие-то функции, не зависящие от координат x^α. Так как $a_{\lambda\alpha'}$ произвольные функции, их можно выбрать так чтобы они не зависили от координат x^t. Тогда величины $g_{\lambda\alpha'}$ тоже не зависят от координат x^t и (2.18) можно выразить в виде

$$\frac{\partial g_{\gamma' t}}{\partial x^\mu} = g_{\gamma t'} \varphi_\mu .$$

Таким образом,

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} (\log g_{t\gamma'}) = \varphi_\mu ,$$

а это значит, что существует такая функция φ, не зависящая от x^α и x^t, что

$$\varphi_\mu = \frac{\partial \varphi}{\partial x^\mu} \quad \text{и} \quad g_{t\gamma'} = e^\varphi a_{t\gamma'} . \tag{2.22}$$

При этом $a_{t\gamma'}$ — произвольные функции, которые можно выбрыть и так, что $a_{t\gamma'} = 0$ т.е. так, что

$$g_{t\gamma'} = 0. \tag{2.23}$$

Из (2.15) и (2.22) следует

$$\frac{\partial}{\partial x^\lambda} \log g_{pt} = \frac{\partial \varphi}{\partial x^\lambda} ,$$

т.е.

$$g_{pt} = e^\varphi a_{pt} , \tag{2.24}$$

где a_{pt} функции, не зависящие от координат x^α и x^λ. Их нельзя взять так, чтобы было $a_{tp} = 0$, т.е. чтобы было $g_{pt} = 0$, ибо в этом случае метрика пространства V_{n+m} была бы вырожденной.

Дифференцируя (2.16) по x^α, получим

$$g_{tp} \frac{\partial \varphi_{\gamma'}}{\partial x^\alpha} = 0,$$

откуда

$$\frac{\partial \varphi_{\gamma'}}{\partial x^\alpha} = 0,$$

т.е. величины $\varphi_{\gamma'}$ не зависят от x^α. Так как величины Π^a_{ij} также не зависят от координат x^α, то интеграция уравнения (2.11) дает:

$$g_{\gamma'\beta'} = -\sum_\alpha (2\,\Pi^{\alpha'}_{\beta'\gamma'} + \delta^\alpha_\beta \varphi_{\gamma'} + \delta^\alpha_\gamma \varphi_{\beta'})\, x^\alpha + a_{\beta'\gamma'} , \tag{2.25}$$

где $a_{\beta'\gamma'}$ произвольные функции, не зависящие от x^α. Их всегда можно представить не зависящими и от координат x^t.

Из (2.11) также имеем

$$\frac{\partial^2 g_{\beta'\gamma'}}{\partial x^\alpha \partial x^t} = \frac{\partial}{\partial x^t} [2\,\Pi^\alpha_{\beta'\gamma'} + \delta^\alpha_\beta \varphi_{\gamma'} + \delta^\alpha_\gamma \varphi_{\beta'}].$$

с другой стороны, дифференцирование (2.19) по x^γ дает:

$$\frac{\partial^2 g_{\alpha'\beta'}}{\partial x^\alpha \partial x^t} = 0,$$

откуда следует

$$\frac{\partial}{\partial x^t} [2\,\Pi^{\alpha'}_{\beta'\gamma'} + \delta^\alpha_\beta \varphi_{\gamma'} + \delta^\alpha_\gamma \varphi_{\gamma'}] = 0. \tag{2.26}$$

Таким образом матрица метрического тензора риманова пространства, допускающего m-мерное геодезическое поле направлений с r-мерной изотропной частью, выражается, в специальной системе координат, в виде

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & E \\ 0 & g_{\lambda\mu} & 0 & -\varphi_\mu x^\alpha + a_{\mu\alpha'} \\ 0 & 0 & e^\varphi a_{st} & 0 \\ E & -\varphi_\lambda x^\beta + a_{\lambda\beta'} & 0 & -\sum\limits_\gamma [2\,\Pi^{\gamma'}_{\alpha'\beta'} + \delta^\gamma_\alpha \varphi_{\beta'} + \delta^\gamma_\beta \varphi_{\alpha'}] x^\gamma + a_{\alpha'\beta'} \end{pmatrix} \tag{2.27}$$

При этом удовлетворены условия (2.26) и величины $g_{\lambda\mu}$, φ, φ_μ, $a_{\mu\alpha'}$ и $a_{\alpha'\beta'}$ не зависят от координат x^α, x^t, a_{st} не зависят от координат x^α, x^λ а $\varphi_{\alpha'}$ не зависит от x^α.

И наоборот, если матрица метрического тензора риманова пространства выражается, в какой то системе координат, в виде (2.27), это пространство допускает m-мерное геодезическое поле направлений. Чтобы доказать это, достаточно установить, что удовлетворены соотношения (2.2). В самом деле, в [1] показано, что если для коэффициентов связности пространства A_{n+m} имеют место соотношения (2.2), то A_{n+m} содержит геодезическое поле m-мерных направлений, определяемое векторами $\overset{\alpha}{v}{}^i = \delta^i_\alpha$, $\overset{\lambda}{v}{}^i = \delta^i_\lambda$.

Для метрики (2.27) имеем

$$\left\{\begin{aligned} &\begin{Bmatrix}\alpha' \\ \beta\gamma\end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix}\alpha' \\ \beta\lambda\end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix}\alpha' \\ \beta s\end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix}\alpha' \\ \beta\gamma'\end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix}\alpha' \\ t\lambda\end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix}\alpha' \\ ts\end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix}\alpha' \\ t\gamma'\end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix}\alpha' \\ \lambda\mu\end{Bmatrix} = 0, \\ &\begin{Bmatrix}\alpha' \\ \lambda\gamma'\end{Bmatrix} = -\phi_\lambda \delta^\alpha_\gamma, \\ &\begin{Bmatrix}\alpha' \\ \beta'\gamma'\end{Bmatrix} = -2\,(\Pi^{\alpha'}_{\beta'\gamma'} + \delta^\alpha_\beta \varphi_{\gamma'} + \delta^\alpha_\gamma \varphi_{\beta'}), \\ &\begin{Bmatrix}s \\ \alpha\beta\end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix}s \\ \alpha\lambda\end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix}s \\ \alpha t\end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix}s \\ \alpha\gamma'\end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix}s \\ t\lambda\end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix}s \\ \lambda\mu\end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix}s \\ \lambda\gamma'\end{Bmatrix} = 0. \end{aligned}\right. \tag{2.28}$$

Так как $g_{st}=e^{\varphi}a_{st}$ и φ не зависит от x^t, то

$$(2.29)\qquad \begin{cases} \left\{ {s \atop pq} \right\} = \dfrac{1}{2} a^{st}\left(\dfrac{\partial a_{pt}}{\partial x^q}+\dfrac{\partial a_{qt}}{\partial x^p}-\dfrac{\partial a_{pq}}{\partial x^t}\right), \\ \left\{ {s \atop p\gamma'} \right\} = \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial \varphi}{\partial x^{\gamma'}}\delta^s_p+\dfrac{1}{2}a^{st}\dfrac{\partial a_{pt}}{\partial x^{\gamma'}}. \end{cases}$$

Наконец

$$\left\{ {s \atop \alpha'\beta'} \right\} = -\frac{1}{2} g^{st}\frac{\partial g_{\alpha'\beta'}}{\partial x^t}=0,$$

в силу (2.16) и предположения, что $a_{\alpha'\beta'}$ не зависит от координат x^t. Принимая

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x^{\alpha'}}=\varphi_{\alpha'},$$

и вводя обозначения

$$\frac{1}{2}a^{st}\left(\frac{\partial a_{pt}}{\partial x^q}+\frac{\partial a_{qt}}{\partial x^p}-\frac{\partial a_{pq}}{\partial x^t}\right)=\Pi^s_{pq},$$

$$\frac{1}{2}a^{st}\frac{\partial a_{pt}}{\partial x^{\gamma'}}=\Pi^s_{p\gamma'}.$$

перепишем уравнения (2.29) в виде

$$\left\{ {s \atop pq} \right\}=\Pi^s_{pq}, \qquad \left\{ {s \atop p\gamma'} \right\}=\frac{1}{2}\varphi_{\gamma'}\delta^s_p+\Pi^s_{p\gamma'}.$$

Эти уравнения, вместе с (2.28) и (2.30) показывают, что для метрики (2.27) условия (2.2) удовлетворены. Из (2.27) сразу видно, что удовлетворены также и условия (2.3), т. е. геодезическое поле направления частично изотропно и с r-мерной изотропной частью, натянутой на r линейно независимых вектора δ^i_α.

3. *Специальные случаи*

а) Если геодезическое поле направлений вполне изотропно, то $r=m$ и метрика (2.27) принимает вид

$$(g_{ij})=\begin{pmatrix} g_{\alpha\beta} & g_{\alpha s} & g_{\alpha\beta'} \\ g_{t\beta} & g_{ts} & g_{t\beta'} \\ g_{\alpha'\beta} & g_{\alpha's} & g_{\alpha'\beta'} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & E \\ 0 & e^{\varphi}a_{st} & 0 \\ E & 0 & -\sum\limits_{\gamma}(2\Pi^{\gamma'}_{\alpha'\beta'}+\delta^{\gamma}_{\alpha}\varphi_{\beta'}+\delta^{\gamma}_{\beta}\varphi_{\alpha'})x^{\gamma'}+a_{\beta'\gamma'} \end{pmatrix}$$

При этом φ, $a_{\alpha'\beta'}$ не зависят от координат x^α, x^t а a_{st}, $\Pi^{\alpha'}_{\beta'\gamma'}$ и $\varphi_{\alpha'}$ не зависят от координат x^α. Это является дальнейшей специализацией канонического вида метрики, полученной в работе [3].

б) Предположим, что геодезическое поле направлений неизотропно. В этом случае $r=0$, и метрика (2.27) записывается в виде

$$(g_{ij})=\begin{pmatrix} g_{\lambda\mu} & 0 \\ 0 & e^{\varphi} a_{st} \end{pmatrix},$$

где $g_{\lambda\mu}$ и φ не зависят от координат x^t, а a_{st} не зависят от координат x^λ. Но это полуприводимая метрика уже получена Я. Л. Шапиро [1].

в) В случае вполне изотропных поверхностей X_n, $m=n+\rho$, и мы имеем

$$(g_{ij})=\begin{pmatrix} g_{\alpha'\beta} & g_{\alpha\lambda} & g_{\alpha\beta'} \\ g_{\mu\beta} & g_{\mu\lambda} & g_{\mu\beta'} \\ g_{\alpha'\beta} & g_{\alpha'\lambda} & g_{\alpha'\beta'} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & E \\ 0 & g_{\mu\lambda} & -\varphi_\mu x^\beta+a_{\mu\beta'} \\ E & -\varphi_\lambda x^\alpha+a_{\lambda\alpha'} & -\Sigma\,[2\,\Pi^{\alpha'}_{\beta'\gamma'}+\delta^\alpha_\beta\varphi_{\gamma'}+\delta^\alpha_\gamma\varphi_{\beta'}]\,x^\alpha+a_{\beta'\gamma'} \end{pmatrix}$$

г) Рассмотрим теперь случай частично проективных пространств. Тогда все величины Π^a_{ij} равны нулю и (2.26) дает

$$\delta^\alpha_\beta\frac{\partial\varphi_{\gamma'}}{\partial x^t}+\delta^\alpha_\gamma\frac{\partial\varphi_{\beta'}}{\partial x^t}=0,$$

откуда

$$\frac{\partial\varphi_{\beta'}}{\partial x^t}=0,$$

т. е. $\varphi_{\alpha'}$ не зависят от x^t. Кроме того, из (2.20) имеем

$$\varphi_t=0 \tag{3.1}$$

в то время как (2.16) принимает вид

$$\frac{\partial g_{pt}}{\partial x^{\gamma'}}=g_{pt}\,\varphi_{\gamma'}, \tag{3.2}$$

откуда

$$g_{pt}=e^{\psi}\,b_{pt}. \tag{3.3}$$

При этом ψ не зависят от x^α, x^t а b_{pt} произвольные функции, не зависящие от x^α, x^t и $x^{\alpha'}$. Если сравнить (3.3) с (2.24), можно написать

$$g_{pt}=e^{\varphi}\,c_{pt},$$

где c_{pt} константы, а φ фунция, не зависящая от x^α и x^t и при этом такая, что

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x^\lambda}=\varphi_\lambda,\qquad \frac{\partial\varphi}{\partial x^{\alpha'}}=\varphi_{\alpha'}. \tag{3.4}$$

Итак, матрица метрического тензора частично проективного пространства, геодезическое поле направлений которого частично изотропно, выражается, с специальной системе координат, в виде

$$
(g_{ij}) = \left| \begin{matrix} 0 & 0 & 0 & E \\ 0 & g_{\lambda\mu} & 0 & -\dfrac{\partial\varphi}{\partial x^{\mu}} x^{\alpha} + a_{\mu\alpha'} \\ 0 & 0 & e^{\varphi} c_{st} & 0 \\ E & -\dfrac{\partial\varphi}{\partial x^{\lambda}} x^{\beta} + a_{\lambda\beta'} & 0 & -\sum\limits_{\gamma} \left(\delta_{\alpha}^{\gamma} \dfrac{\partial\varphi}{\partial x^{\beta'}} + \delta_{\beta}^{\gamma} \dfrac{\partial\varphi}{\partial x^{\alpha'}} \right) x^{\gamma} + a_{\alpha'\beta'} \end{matrix} \right|
$$

где c_{st} -константы а φ, $a_{\mu\alpha'}$ и $a_{\alpha'\beta'}$ не зависят от x^{α}, x^{t}. А это и есть канонический вид метрики частично проективного пространства, полученный Г. Врэнчану [4] и, в случае $r=m$, Г. И. Кручковичем [5].

Из (2.6), (3.1) и (3.4) видно, что для частично проективного пространства вектор φ_i является градиентом. Но в случае когда поверхности $\overline{X}_n$ вполне изотропны, уравнений (3.2) нет и второе уравнение (3.4) нельзя доказать. Таким образом, приходим к результату, уже полученому другим путем в работе [5], а именно, что у частично проективных пространств вектор φ_i является градиентом, исключая случай, когда поверхности $\overline{X}_n$ вполне изотропны.

Это утверждение действительно и в случае общих римановых пространств, содержащих геодезическое поле направлений. В самом деле, в случае (2.27) имеем (2.23) и (2.6). Из первого уравнения (2.29) следует $\varphi_t=0$, а из второго уравнения (2.29) $-\varphi_{\gamma'}=\dfrac{\partial\varphi}{\partial x^{\gamma'}}$. Но в специальном случае в), уравнений (2.29) нет, нет соотношения $\varphi_{\gamma'}=\dfrac{\partial\varphi}{\partial x^{\gamma'}}$, и нельзя утверждать, что φ_i является градиентом.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Я. Л. Шапиро, *Геодезическое поле направлений и проективные системы путей*, Мат. сбор. 36 (78):1 (1955), 123—148

[2] G. Vranceanu, *Leçon de géométrie différentielle*, v. II, Bucuresti, 1957

[3] М. Прванович, *Римановы пространства, содержащие геодезическое поле направлений* I, Publ. Inst. Math. T. 8 (22) 1968. p. 76—86.

[4] Г. Врєнчану, *Метрика частично проективнных римановых пространств*, Revue de mathématiques pures et appliquées, Acad. R. P. R. 5 (1960), № 2, 211—227).

[5] Г. И. Кручкович, *Пространства Кагана и нетранзитивные группы движения*, Труды сем. по вект. и тенз. анализу, вып. XIV, 144—153

Institut Mathématique
Beograd