PUBLICATIONS DE L'INSTITUT MATHÉMATIQUE
Nouvelle série, tome 9 (23), 1969, pp. 93—95.

DIE LÖSUNG EINES FUNKTIONALGLEICHUNGSSYSTEMS

Octavian Em. Gheorghiu

Herrn Prof. D. S. Mitrinović zum 60. Geburtstag gewidmet.

(Eingegangen 29. März 1968)

In seiner Arbeit „Equation fonctionnelle à fonctions inconnues dont toutes ne dépendent pas du même nombre d'arguments" [1] hat D. S. Mitrinović die allgemeine Lösung folgender linearer Funktionalgleichung

$$f_1(x_1, x_2)+f_2(x_2, x_3, x_4)+f_3(x_1, x_3, x_4)=0 \tag{1}$$

angegeben; die unbekannten Funktionen sind: $f_1: S^2 \rightarrow M$, f_2; $f_3: S^3 \rightarrow M$, wobei S eine beliebige nichtleere Menge, und M ein Modul ist, in dem die Gleichung $px=a$, (x, $a \in M$ und $p=$natürliche Zahl) als einzige Lösung $x=\frac{a}{p}$ hat,

Die allgemeine Lösung der Funktionalgleichung (1) ist

$$\begin{aligned} &f_1(x_1, x_2)=H(x_1)-F(x_2),\ f_2(x_2, x_3, x_4)=F(x_2)-G(x_3, x_4), \\ &f_3(x_1, x_3, x_4)=-H(x_1)+G(x_3, x_4) \end{aligned} \tag{2}$$

wobei F, G, H beliebige Funktionen sind mit dem Wertevorrat M.

In dieser Arbeit wird folgendes Funktionalgleichungssystem angenommen

$$\begin{aligned} &f_1(x_1, x_2)+f_2(x_2, x_3, x_4)=g(x_1, x_3, x_4) \\ &F_1(x_1, x_2)+2f_1(x_1, x_2)f_2(x_2, x_3, x_4)+F_2(x_2, x_3, x_4)=G(x_1, x_3, x_4) \\ &\Phi_1(x_1, x_2)+3F_1(x_1, x_2)f_2(x_2, x_3, x_4)+3f_1(x_1, x_2)F_2(x_2, x_3, x_4) \\ &\qquad +\Phi_2(x_2, x_3, x_4)=\Gamma(x_1, x_3, x_4) \end{aligned} \tag{3}$$

wobei: f_1; F_1; $\Phi_1: S^2 \rightarrow M$, f_2; F_2; Φ_2; g; G; Γ; $S^3 \rightarrow M$; S ist eine beliebige nichtleere Menge und M ist ein kommutativer Ring mit Addition und Multiplikation als Grundoperationen.

Die allgemeine Lösung des Funktionalgleichungssystems (3) findet man wie folgt: 1) Die erste Funktionalgleichung hat nach D. S. Mitrinović folgende allgemeine Lösung

$$\begin{aligned} &f_1(x_1, x_2)=A(x_1)-B(x_2) \\ &f_2(x_2, x_3, x_4)=B(x_2)+C(x_3, x_4) \\ &g(x_1, x_3, x_4)=A(x_1)+C(x_3, x_4) \end{aligned} \tag{4}$$

wobei A, B, C beliebige Funktionen sind.

2) Die zweite Funktionalgleichung des Systems (3) kann durch das Einführen der Funktionen

$$
\begin{aligned}
&\alpha(x_1, x_2) = F_1(x_1, x_2) - f_1^2(x_1, x_2)\\
(5)\qquad &\beta(x_2, x_3, x_4) = F_2(x_2, x_3, x_4) - f_2^2(x_2, x_3, x_4)\\
&\gamma(x_1, x_3, x_4) = G(x_1, x_3, x_4) - g^2(x_1, x_3, x_4)
\end{aligned}
$$

auf die erste zurückgeführt werden uzw: das Quadrat der ersten Gleichung wird von der zweiten Gleichung abgezogen. Für die Funktionen α, β, γ kann als Lösung (4) angegeben werden.

3) Die letzte Gleichung des Systems (3) wird auf die Form der ersten Gleichung gebracht, indem man von ihr das dreifache Produkt der beiden ersten Gleichungen abzieht und den doppelten Kubus der ersten Gleichung zu ihr addiert.

Daraus ergeben sich folgende Substitutionen:

$$
\begin{aligned}
&\lambda = \Phi_1 - 3 f_1 F_1 + 2 f_1^3\\
(6)\qquad &\mu = \Phi_2 - 3 f_2 F_2 + 2 f_2^3\\
&\rho = \Gamma - 3 g G + 2 g^3
\end{aligned}
$$

aus denen sich die Beziehung

$$\lambda(x_1, x_2) + \mu(x_2, x_3, x_4) = \rho(x_1, x_3, x_4)$$

ableiten lässt.

Für die Funktionen des Systems (3) gelangt man zu folgendem:

L e h r s a t z. *Die allgemeine Lösung des Funktionalgleichungssystems ist*

$$
\begin{aligned}
&f_1(x_1, x_2) = A(x_1) - B(x_2);\quad f_2(x_2, x_3, x_4) = B(x_2) + C(x_3, x_4);\\
&g(x_1, x_3, x_4) = A(x_1) + C(x_3, x_4)\\
&F_1(x_1, x_2) = D(x_1) - E(x_2) + [A(x_1) - B(x_2)]^2\\
&F_2(x_2, x_3, x_4) = E(x_2) + H(x_3, x_4) + [B(x_2) + C(x_3, x_4)]^2\\
&G(x_1, x_3, x_4) = D(x_1) + H(x_3, x_4) + [A(x_1) + C(x_3, x_4)]^2\\
(7)\quad &\Phi_1(x_1, x_2) = L(x_1) - K(x_2) + [A(x_1) - B(x_2)]^3 +\\
&\qquad + 3[A(x_1) - B(x_2)][D(x_1) - E(x_2)]\\
&\Phi_2(x_2, x_3, x_4) = K(x_2) + P(x_3, x_4) + [B(x_2) + C(x_3, x_4)]^3 +\\
&\qquad + 3[B(x_2) + C(x_3, x_4)][E(x_2) + H(x_3, x_4)]\\
&\Gamma(x_1, x_3, x_4) = L(x_1) + P(x_3, x_4) + [A(x_1) + C(x_3, x_4)]^3\\
&\qquad + 3[A(x_1) + C(x_3, x_4)][D(x_1) + H(x_3, x_4)]
\end{aligned}
$$

wobei $A(x_1)$, $B(x_2)$, $C(x_3, x_4)$, $D(x_1)$, $E(x_2)$, $H(x_3, x_4)$, $L(x_1)$, $K(x_2)$, $P(x_3, x_4)$ *neun beliebige Funktionen darstellen mit* M *als Wertevorrat.*

Anmerkung: Im Sonderfall

$$
\begin{aligned}
D(x) &= A(x); & L(x) &= 2A(x)\\
E(x) &= B(x); & K(x) &= 2B(x)\\
H(x, y) &= C(x, y); & P(x, y) &= 2C(x, y)
\end{aligned}
$$

erhält Lösung (7) folgende interessante Form:

$$f_1 = A - B;\quad f_2 = B + C;\quad g = A + C;$$
$$F_1 = f_1[1 + f_1];\quad F_2 = f_2[1 + f_2];\quad G = g[1 + g];$$
$$\Phi_1 = f_1[1 + f_1][2 + f_1];\quad \Phi_2 = f_2[1 + f_2][2 + f_2];$$
$$\Gamma = g[1 + g][2 + g];$$

in der Produkte der Form $t(t+1)$ bzw. $t(t+1)(t+2)$ auftreten, welche eine Ähnlichkeit mit der Differenzentheorie oder der Stirlingschenzahlen aufweisen.

Eine Verallgemeinerung des Systems (3) wird das Thema einer anderen Arbeit sein.

LITERATURVERZEICHNIS

[1] D. S. Mitrinović: Publikacije Elektrotehničkog Fakulteta, Univerzitet u Beogradu, Srbija: Mat. i Fiz. Nr. 120 (1963), S. 29—30

Str. Tr. Lalescu 1, Timisoara,
R. S. Romaniá