PUBLICATIONS DE L'INSTITUT MATHÉMATIQUE
Nouvelle série, tome 8 (22), 1968. p. 69—72.

КРИТЕРИЙ ОБ УСТОЙЧИВОСТИ СОСТОЯНИЯ РАВНОВЕСИЯ СИСТЕМЫ ДИНАМИЧЕСКИХ ТОЧЕК

В. А. Вуйичич

(Сообщено 22-ого февраля 1967 г.)

Хотя задачу об устойчивости состояния равновесия системы динамических („материальных") точек частично решили Лагранж [1] и Лежен-Дирихле [2], этим вопросом занимался и ряд других известных ученых. Ляпунов обратил внимание на то, что при доказательстве теоремы Лагранжа можно вместо функции энергии механической системы взять любую непрерывную функцию $V(q^1, \ldots, q^n; \dot{q}^1, \ldots, \dot{q}^n)$ переменных q^α, $\dot{q}^\alpha = \dfrac{dq^\alpha}{dt}$ $(\alpha = 1, \ldots, n)$ с непрерывными частными производными первого порядка, имеющую в состоянию равновесия строгий минимум [3]. Это привело к более легкому решению вопроса устойчивости состояния равновесия неконсервативных систем [4], [5]. Затруднения при решении конкретных задач, в основном, являються в том, что не легко всегда составить дифференциальные уравнения возмущенного состояния равновесия (дифференциальные уравнения движения), и, также, не просто выбрать функцию Ляпунова V.

Нами предложенным критерием не нужно определять дифференциальные уравнения движения системы, и вместо функции Ляпунова $V(q^\alpha, \dot{q}^\alpha)$ достаточно выбрать некоторую определенно-положительную функцию зависящую от переменных $q^\alpha (\alpha = 1, \ldots, n)$. Задача решается определением обобщенных сил $Q_\alpha = Q_\alpha (q^1, \ldots, q^n; \dot{q}^1, \ldots, \dot{q}^n)$ и выбором непрерывной и дифференцируемой функции $W = W(q^1, \ldots, q^n) \geqslant 0$ причем $W = 0$ лишь при $q^1 = \cdots = q^n = 0$.

1. В некоторой непрерывной и ограниченой области H $2n$-мерного фазового пространства рассмотрим голономную склерономную систему динамических точек, состояние равновесия которой определенно через n обобщенных нулевых координат $q^1 = \cdots = q^n = 0$ и через n обобщенных нулевых импулсов $p_1 = \cdots = p_n = 0$. Любое движение системы определяемое через $q^\alpha = q^\alpha (t)$ и $p_\alpha = p_\alpha (t)$ в областы H будет возмущенное состояние равновесия. Устойчивость состояния равновесия системы определяеться по Ляпунову.

Если система динамических точек возмущаеться обобщенными силами $Q_\alpha = Q_\alpha (q^1, \ldots, q^n; \dot{q}^1, \ldots, \dot{q}^n)$ где $\dot{q}^\alpha = \dfrac{dq^\alpha}{dt}$, дифференциальные уравнения движения Лагранжа второго рода

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^\alpha} - \frac{\partial T}{\partial q^\alpha} = a_{\alpha\beta}\,\ddot{q}^\beta + [\gamma\beta, \alpha]\,\dot{q}^\gamma\,\dot{q}^\beta = Q_\alpha, \tag{1.1}$$

не трудно привести к системе $2n$ уравнений первого порядка

$$\dot{q}^\alpha = a^{\alpha\beta} p_\beta \tag{1.2}$$
$$\dot{p}_\alpha = a^{\beta\gamma} \left\{ \begin{matrix} \delta \\ \alpha\,\gamma \end{matrix} \right\} p_\beta p_\delta + Q_\alpha (q^1, \ldots, q^n;\ p_1, \ldots .p_n)$$

где $a^{\alpha\beta} = a^{\beta\alpha}(q^1, \ldots, q^n)$ контравариантные составляющие основного тензора пространства конфигурации, и

$$\left\{ \begin{matrix} \delta \\ \alpha\,\gamma \end{matrix} \right\} = a^{\delta\beta}[\alpha\gamma, \beta] = \frac{1}{2} a^{\delta\beta} \left(\frac{\partial a_{\alpha\beta}}{\partial q^\gamma} + \frac{\partial a_{\beta\gamma}}{\partial q^\alpha} - \frac{\partial a_{\alpha\gamma}}{\partial q^\beta} \right)$$

символы Кристоффеля второго порядка. Система уравнений (1.2) движения системы претставляет дифференциальные уравнения возмущенного состояния равновесия голономной склерономной системы динамических точек.

Чтобы исследовать устойчивость состояния рассматрываемой системы поищем функцию Ляпунова V в виде суммы двух определенно-положительных функций

$$V = T + W = \frac{1}{2} a^{\alpha\beta} p_\alpha p_\beta + W(q^1, \ldots, q^n) \tag{1.3}$$

где $T = \frac{1}{2} a^{\alpha\beta} p_\alpha p_\beta$ кинетическая энергия рассматриваемой системы, и W некоторая определенно-положительная функция обобщенных координат q^α $(\alpha = 1, \ldots n)$.

Если имеем в виду то, что производная $\frac{d}{dt} T$ инварианты T равнается апсолютной производной $\frac{D}{dt} T$ той же инварианты, т.е. в нашем случае

$$\frac{d}{dt}(a^{\alpha\beta} p_\alpha p_\beta) = \frac{D}{dt}(a^{\alpha\beta} p_\alpha p_\beta) = 2\, a^{\alpha\beta} \frac{Dp_\alpha}{dt} p_\beta$$

где

$$\frac{Dp_\alpha}{dt} = \dot{p}_\alpha - a^{\beta\sigma} \left\{ \begin{matrix} \delta \\ \alpha\,\beta \end{matrix} \right\} p_\delta p_\sigma$$

апсолютная производная ковариантного вектора p_α, для производной по времени функции Ляпунова V получим

$$\dot{V} = a^{\alpha\beta} \left(\dot{p}_\alpha - a^{\beta\sigma} \left\{ \begin{matrix} \delta \\ \alpha\,\beta \end{matrix} \right\} p_\delta p_\sigma \right) p_\beta + \frac{\partial W}{\partial q^\alpha} \dot{q}^\alpha,$$

или в силу уравнений (1.2),

$$\dot{V} = a^{\alpha\beta} Q_\alpha p_\beta + \frac{\partial W}{\partial q^\alpha} a^{\alpha\beta} p_\beta = a^{\alpha\beta} \left(Q_\alpha + \frac{\partial W}{\partial q^\alpha} \right) p_\beta . \tag{1.4}$$

На основании теоремы Ляпунова состояние равновесия системы будет устойчиво если $\dot{V}$ отрицательная функция или тождественно равняеться нулю, т.е.

$$a^{\alpha\beta}\left(Q_\alpha+\frac{\partial W}{\partial q^\alpha}\right)p_\beta=\left(Q_\alpha+\frac{\partial W}{\partial q^\alpha}\right)\dot{q}^\alpha \leqq 0. \tag{1.5}$$

Так мы доказали следующую теорему: Если существует определённо-положительная функция W зависащая от обобщенных независимых координат $q^\alpha\,(\alpha=1,\ldots,n)$ такая, что выражение

$$\left(Q_\alpha+\frac{\partial W}{\partial q^\alpha}\right)\dot{q}^\alpha$$

будет отрицательная функция или тождественно равняется нулю, невозмущенное состояние равновесия $q^1=\cdots=q^n=0$; $p_1=\cdots=p_n=0$ устойчиво по Ляпунову; будет ли это определённо-отрицательная функция, состояние равновесия динамической системы асимптотически устойчиво.

2. Следствием этой теоремы для консервативной системы является теорема Лагранжа. Действительно, если $U=U(q^1,\ldots,q^n)$ силовая функция, $Q_\alpha=\dfrac{\partial U}{\partial q^\alpha}$, для функции W можно всегда для устойчивого положения равновесия выбрать потенциаль силы, т.е. $W=-U$. В этом случае все коэффициенты выражения (1.5) будут равняться нулю,

$$Q_\alpha-\frac{\partial W}{\partial q^\alpha}\equiv 0 \Rightarrow \dot{V}\equiv 0$$

3. Если обобщённые силы Q_α складиваються из консервативных $\dfrac{\partial U}{\partial q^\alpha}$ и любых сил зависящих от скоростей или обобщённых импулсов $P_\alpha(\dot{q}^1,\ldots,\dot{q}^n)$ т.е.

$$Q_\alpha=\frac{\partial U}{\partial q^\alpha}+P_\alpha(\dot{q}^1,\ldots,\dot{q}^n)$$

выражение (1.5) упрощаеться и будет

$$P_\alpha\dot{q}^\alpha\leqq 0.$$

Но, так как это также определение для диссипативных и гироскопических сил, следствием предложеного критерия является и теорема об устойчивости диссипативных и гироскопических сил [4].

4. Общие выводы получаем и для случая когда обобщенние силы имеют вид

$$Q_\alpha=f_\alpha(q^1,\ldots,q^n)P(\dot{q}^1,\ldots,\dot{q}^n) \tag{4.1}$$

где функции f_α будут координатами градиента некоторой знако-определённой функции $\Phi(q^1,\ldots,q^n)$. Тогда для функции W можно выбрать функцию $\lambda\Phi$, где λ постоянное число, положительное если $\Phi>0$, или отрицательное если $\Phi<0$.

Выражение (1.5) в этом случае будет

$$\left(Pf_\alpha+\lambda\frac{\partial\Phi}{\partial q^\alpha}\right)\dot{q}^\alpha=(P+\lambda)\frac{\partial\Phi}{\partial q^\alpha}\dot{q}^\alpha=(P+\lambda)\frac{d\Phi}{dt}\leqq 0.$$

Из этога соотношения следует что состояние равновесия системы при наличии сил (4.1) будет устойчиво если:

1. $\dfrac{d\Phi}{dt}=0$, или

2. $\dfrac{d\Phi}{dt}<0$ при $P>\lambda$, или

3. $\dfrac{d\Phi}{dt}>0$ для $P<\lambda$.

5. Заметим ещё, что в пространстве конфигурации возмущённием состояния равновесия можно считать абсолютную производную $\dfrac{D\dot{q}^\alpha}{dt}$ за разницу от ,,обобщенного ускорения" $\ddot{q}^\alpha$, как это широко принято [4] в литературе; в фазовом пространстве возмущенниями надо считать обобщённые независимые координаты Лагранжа и обобщенные импульсы.

ЛИТЕТАТУРА:

[1] Lagrange, I. L. *Mécanique Analytique*, *T. I*, Paris, 1988.
[2] Lejeune-Dirichlet, P. G. — *Sur la stabilité de l'équilibre*, [1].
[3] Ляпунов, А. М. *Общая задача об устойчивости движения*, Харковь, 1892.
[4] Гантмахер, Ф. Р. *Лекции по аналитической механике*, Москва, 1960.
[5] Четаев, Н. Г. *Устойчивость движения*, Москва, 1955.