PUBLICATIONS DE L'INSTITUT MATHÉMATIQUE
Nouvelle série, tome 8 (22), 1968, p. 37—50

GÉNÉRALISATIONS DE QUELQUES THÉORÈMES DE A. ZYGMUND, B. SZ.-NAGY ET R. P. BOAS (II)

*(Suite)**

Dušan Adamović

(Communiqué le 17 juin 1966)

2. Généralisations des théorèmes de Zygmund et B. Sz.-Nagy

On suppose dans ce paragraphe que les fonctions $g(x)$ et $f(x)$ soient non croissantes et inférieurement bornées pour $x \in (0, \pi)$ et que l'on ait

$$xg(x) \in \mathscr{L}(0, \pi), \quad f(x) \in \mathscr{L}(0, \pi).$$

On désigne par $b_n\,(n=1,2,3, \ldots)$ les coefficients de la série de sinus de la fonction $g(x)$ et par $a_n\,(n=0,1,2, \ldots)$ les coefficients de la série de cosinus de la fonction $f(x)$, c'est-à-dire

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi g(x) \sin nx \qquad (n=1,2,3, \ldots),$$

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x) \cos nx\, dx \qquad (n=0,1,2, \ldots).$$

Ici les nombres a_n sont les coefficients de *Fourier* de la fonction $f(x)$ et les nombres b_n ne le sont pas nécessairement pour la fonction $g(x)$.

Les deux théorèmes suivants sont dûs à *A. Zygmund* [14] et à *B. Sz.-Nagy* [7]:

(A) *Soit* $0<\gamma\leqslant 1$. *La série*

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\gamma} b_n$$

converge absolument si et seulement si

$$x^{\gamma-1} g(x) \in \mathscr{L}(0, \pi).$$

(B) *La série*

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\gamma} a_n \tag{32}$$

* La première partie de cet article, sous le même titre, a été publiée dans ces „Publications", t. 7 (21), 1967.

converge absolument si et seulement si

(33) $$x^{\gamma-1} f(x) \in \mathscr{L}(0, \pi)$$

ou bien si et seulement si

(34) $$f(x) \log x \in \mathscr{L}(0, \pi),$$

suivant que l'on a $0<\gamma<1$ *ou* $\gamma=1$.

Zygmund a obtenu ces résultats pour le cas $\gamma=1$ et *B. Sz.-Nagy* dans le cas général.

De plus, *B. Sz.-Nagy* a démontré que *déjà la sommabilité* (C, 1) *de la série* (32) *entraîne* (33) *ou* (34), *selon le cas.*

Les résultats précédents peuvent être généralisés par les théorèmes suivants, où intervient la fonction à croissance lente $L(x)$:

Théorème III. *Soit* $0<\gamma\leqslant 1$. *La série*

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\gamma} L(n)\, b_n$$

converge absolument si et seulement si

$$x^{\gamma-1} L\left(\frac{1}{x}\right) g(x) \in \mathscr{L}(0, \pi).$$

Théorème IV. *Soit* $0<\gamma<1$. *La série*

(35) $$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\gamma} L(n)\, a_n$$

converge absolument si et seulement si

(36) $$x^{\gamma-1} L\left(\frac{1}{x}\right) f(x) \in \mathscr{L}(0, \pi).$$

Théorème V. *Soit* $0<\gamma<1$.

Si $x^{-1-\gamma} L(x) \searrow$ *pour* x *suffisamment grand, de la convergence de la série* (35) *résulte* (36).

Si $x^{-\gamma} L(x) \searrow$ *pour* x *suffisamment grand, de la sommabilité* (C, 1) *de la série* (35) *résulte* (36).

Théorème VI. *La série*

$$\sum_{n-1}^{\infty} n^{-1} L(n)\, a_n$$

converge absolument si et seulement si

(37) $$S\left(\frac{1}{x}\right) f(x) \in \mathscr{L}(0, \pi).$$

Théorème VII. *La relation* (37) *résulte de la convergence ou de la sommabilité* (C, 1) *de la série* (35) *suivant que l'on a, pour* x *suffisamment grand, seulement* $x^{-2} L(x) \searrow$ *ou déjà* $x^{-1} L(x) \searrow$.

Pour $L(x)\equiv 1$ le théorème III se réduit à (A), les théorèmes IV et VI se réduisent à (B) et les théorèmes V et VII à la remarque supplémentaire de *B. Sz.-Nagy.*

On peut ajouter aux théorèmes précédents le théorème suivant, relatif au cas de la série de sinus et de $\gamma=0$, non compris dans les résultats de *Zygmund — B. Sz.-Nagy.*

Théorème VIII. *Soit* $L(x)$ *convexe et tel que* $\Sigma<+\infty$. *Alors la série*

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n L(n)$$

converge absolument si et seulement si

$$x^{-1} L\left(\frac{1}{x}\right) g(x) \in \mathscr{L}(0, \pi).$$

En 1958 nous avons donné dans [1] une généralisation des théorèmes (A) et (B) différente de la précédente. A savoir, cette généralisation-là contenaient les mêmes énoncés des théorèmes IV, V et VIII et l'énoncé du théorème III avec l'intervalle plus large (0,2) pour γ; les énoncés suivants y figuraient au lieu des théorèmes VI et VIII, respectivement:

(VI') *Soit*

$$0<A\,L(x)\log x>\int_0^x t^{-1} L(t)\,dt<B\,L(x)\log x \quad (x>1) \tag{38}$$

(A *et* B *constantes*). *Alors la série*

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1} L(n)\, a_n \tag{39}$$

converge absolument si et seulement si

$$f(x)\, L\left(\frac{1}{x}\right) \log\frac{1}{x} \in \mathscr{L}(0, \pi). \tag{40}$$

(VII') *Soit*

$$\int_1^x t^{-1} L(t)\,dt>A\,L(x)\log x \qquad (x>1). \tag{41}$$

Alors (40) *résulte de la convergence ou de la sommabilité* (C, 1) *de la série* (39) *suivant que, pour x suffisamment grand, la fonction* $x^{-2}L(x)$ *seulement ou déjà la fonction* $x^{-1}L(x)$ *est non croissante.*

Ici, dans le théorème III nous nous limitons à l'intervalle (0,1] pour γ, en vertu du résultat concernant l'intervalle (1,2) obtenu en 1962 par *R. P. Boas* (théorèmes (C) et (D) dans 3), qui est, pour $L(x)\equiv 1, 1<\gamma<2$, plus générale que l'ancienne variante de notre théorème III et que nous avons, d'ailleurs, réussi à généraliser au moyen de fonctions à croissance lente (théorèmes IX et X). — Les théorèmes VI et VII sont plus généraux que les théorèmes (VI') et (VII'), puisque les premiers ne contiennent pas les conditions restrictives (38) et (41) et puisqu'on a (37) $\Leftrightarrow$ (40) sous la condition (38) et (37) $\Rightarrow$ (40) sous la condition (41).

Pour compléter l'exposé sur notre sujet, nous avons cités tous les théorèmes III — VIII. Les démonstrations des théorèmes III — V étant contenues dans [1], nous nous limitons ici à exposer les démonstrations des théorèmes VI — VIII, celle du dernier puisque sa démonstration dans [1] n'était pas correcte.

2.1 Démonstrations des théorèmes VI—VIII

2.1.1 *Démonstration des théorèmes* VI *et* VII. D'après l'assertion 1° de (VIII), avec $L(x)\equiv 1$, $f(x)\in\mathcal{L}(0,\pi)$ entraîne l'existence de l'intégrale $\int_0^\pi x\,df(x)$ et que $xf(x)\to 0$ $(x\to+0)$ et, par conséquent, l'existence de $\int_0^\pi \sin nx\cdot df(x)$ et que $f(x)\sin nx\to 0$ $(x\to+0)$. de sorte qu'une intégration par parties donne

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\cos nx\,dx=\frac{2}{\pi n}\left[-\lim_{x\to+0} f(x)\sin nx-\int_0^\pi \sin nx\cdot df(x)\right]$$

$$=-\frac{2}{\pi n}\int_0^\pi \sin nx\cdot df(x);$$

donc,

$$a_n=-\frac{2}{\pi n}\int_0^\pi \sin nx\cdot df(x)\qquad (n=1,2,3,\ldots). \tag{42}$$

Nous allons démontrer d'abord que (37) entraîne la convergence absolue de la série (39). Nous démontrerons ensuite la seconde, puis la première assertion du théorème VII et, enfin, que la convergence absolue de la série (39) entraîne (37). Toutes les assertions des théorèmes VI et VII étant triviales si $\Sigma<+\infty$, nous allons supposer jusqu'à la fin de la démonstration que l'on ait $\Sigma=+\infty$.

D'après (42) et la majoration effectuée dans la démonstration du théorème II, on a, avec une constante positive M,

$$\sum_{n=1}^\infty n^{-1}L(n)\,|a_n|\leqslant\frac{2}{\pi}\int_0^\pi\sum_{n=1}^\infty n^{-2}L(n)\,|\sin nx|\,d[-f(x)]$$

$$\leqslant M\int_0^\pi x\,S\left(\frac{1}{x}\right)d[-f(x)].$$

On en conclut, d'après (VIII), que (37) entraîne la convergence absolue de la série (39).

Supposons que la série (39) soit sommable (C, 1), c'est-à-dire que la suite

$$\sum_{\nu=1}^{n}\left(1-\frac{\nu}{n}\right)\nu^{-1}L(\nu)\,a_\nu=-\frac{2}{\pi}\int_0^\pi\sum_{\nu=1}^{n}\left(1-\frac{\nu}{n}\right)\nu^{-2}L(\nu)\sin\nu x\cdot df(x)$$

$$=-\frac{2}{\pi}\int_0^\pi P_n(x)\,df(x)$$

tende vers une limite finie lorsque $n\to\infty$ et que l'on ait $x^{-1}L(x)\searrow$ pour $x\geqslant m$ (m nombre naturel). Soit

$$s_\nu(x)\overset{\text{def}}{=}\frac{1-\cos(2\nu+1)\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}}\qquad(\nu=1,2,3,\ldots).$$

Alors

$$P_n(x)=\sum_{\nu=1}^{n}\left(1-\frac{\nu}{n}\right)\nu^{-2}L(\nu)\sin\nu x$$

$$=\sum_{\nu=1}^{n-1}\left[\left(1-\frac{\nu}{n}\right)\nu^{-2}L(\nu)-\left(1-\frac{\nu+1}{n}\right)(\nu+1)^{-2}L(\nu+1)\right][s_\nu(x)-s_0(x)]$$

$$=\sum_{\nu=1}^{n-1}\left[\left(1-\frac{\nu}{n}\right)\nu^{-2}L(\nu)-\left(1-\frac{\nu+1}{n}\right)(\nu+1)^{-2}L(\nu+1)\right]s_\nu(x)$$

$$-\left(1-\frac{1}{n}\right)L(1)\,s_0(x)\geqslant\sum_{\nu=m}^{n-1}+\left[\sum_{\nu=1}^{m-1}-L(1)\,s_0(x)\right]=P_n^{(1)}(x)+P^{(1)}(x).\tag{43}$$

La suite

$$\omega_{n,\nu}\overset{\text{def}}{=}\left(1-\frac{\nu}{n}\right)\nu^{-2}L(\nu)-\left(1-\frac{\nu+1}{n}\right)(\nu+1)^{-2}L(\nu+1)$$

$$=[\nu^{-2}L(\nu)-(\nu+1)^{-2}L(\nu+1)]-\frac{1}{n}[\nu^{-1}L(\nu)-(\nu+1)^{-1}L(\nu+1)]\qquad(\nu\leqslant n-1)$$

est positive pour $\nu\geqslant m$ et, pour un $\nu\geqslant m$ fixé, non décroissante par rapport à n; en outre,

$$\omega_{n,\nu}\to\nu^{-2}L(\nu)-(\nu+1)^{-2}L(\nu+1)=\omega_\nu\qquad(n\to\infty).$$

En profitant du fait que $s_\nu(x)\geqslant 0$ $(0\leqslant x\leqslant\pi)$, on en conclut que les fonctions de la suite $P_n^{(1)}(x)$ sont non négatives et que cette suite tend vers

$$P(x)=\lim_{n\to\infty}\sum_{\nu=m}^{n-1}\omega_{n,\nu}\,s_\nu(x)=\sum_{\nu=m}^{\infty}\omega_\nu\,s_\nu(x).$$

(La dernière égalité, d'après ce qui précède, se justifie par le fait suivant, aisé à démontrer: si $0\leqslant\alpha_{n,\nu}\nearrow\alpha_\nu$ $(n\to\infty;\ \nu=m,m+1,\ldots)$, alors

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{\nu=m}^{\infty}\alpha_{n,\nu}=\sum_{\nu=m}^{\infty}\alpha_\nu.\Big)$$

On obtient de (43)

$$(44)\qquad \int_0^\pi P_n^{(1)}(x)\,d[-f(x)] \leqslant \left|\int_0^\pi P_n(x)\,df(x)\right| + \left|\int_0^\pi P^{(1)}(x)\,df(x)\right|.$$

Comme, d'après l'hypothèse, $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^\pi P_n(x)\,df(x)$ est fini et que la fonction $P^{(1)}(x)$ est, selon (VIII), intégrable par rapport à $f(x)$ dans $(0, \pi)$, on déduit de (44), tenant compte de la non negativité des fonctions $P_n^{(1)}(x)$, que la fonction $P(x)$ est intégrable par rapport à $f(x)$ dans $(0, \pi)$.

Or, comme nous allons le montrer tout de suite,

$$(45)\qquad P(x) \geqslant M_1\, x\, S\left(\frac{1}{x}\right) \qquad (M_1 \text{ constante positive}),$$

d'où résulte que l'intégrale $\int_0^\pi x\, S\left(\frac{1}{x}\right) df(x)$ est finie; donc, d'après (VIII),

$$S\left(\frac{1}{x}\right) f(x) \in \mathscr{L}\ (0, \pi).$$

Pour achever cette partie de la démonstration, il suffit, donc, de démontrer (45).

Pour $\nu + \frac{1}{2} \leqslant \frac{\pi}{x}$ on a

$$s_\nu(\alpha) \geqslant \frac{2}{x}\left(\frac{2\nu+1}{2\pi}x\right)^2 = \frac{2}{\pi^2} x\left(\nu + \frac{1}{2}\right)^2$$

et, pour x suffissamment petit, d'après (I) et (V),

$$P(x) = \sum_{\nu=m}^{\infty} s_\nu(x)\,[\nu^{-2} L(\nu) - (\nu+1)^{-2} L(\nu+1)]$$

$$\geqslant \frac{2}{\pi^2} x \sum_{m+\frac{1}{2} \leqslant \nu+\frac{1}{2} \leqslant \frac{\pi}{x}} \left(\nu + \frac{1}{2}\right)^2 [\nu^{-2} L(\nu) - (\nu+1)^{-2} L(\nu+1)]$$

$$\geqslant \frac{2}{\pi^2} x \int_m^{\frac{\pi}{x}-1} \left(t - \frac{1}{2}\right)^2 d[-t^{-2} L(t)]$$

$$= \frac{2}{\pi^2} x \left[\left(t - \frac{1}{2}\right)^2 t^{-2} L(t)\Big|_{\frac{\pi}{x}-1}^{m} + 2\int_m^{\frac{\pi}{x}-1} \left(t - \frac{1}{2}\right) t^{-2} L(t)\,dt)\right]$$

$$\geqslant \frac{2}{\pi^2} x \left[\left(m - \frac{1}{2}\right)^2 m^{-2} L(m) - \left(\frac{\pi}{x} - \frac{3}{2}\right)^2 \left(\frac{\pi}{x} - 1\right)^{-2} L\left(\frac{\pi}{x} - 1\right) \right.$$

$$\left. + M_2 \int\limits_m^{\frac{\pi}{x}-1} t^{-1} L(t)(dt) \right] \geqslant \frac{2}{\pi^2} x \left[M_3 S\left(\frac{1}{x}\right) - M_4 L\left(\frac{1}{x}\right) \right] \geqslant M_5 x S\left(\frac{1}{x}\right),$$

avec les constantes positives M_2, M_3, M_4, M_5. Ici on a mis à profit la relation 2° de (VII).

Si l'on suppose que la série (39) converge, c'est-à-dire que la suite

$$\sum_{\nu=1}^{n} \nu^{-1} L(\nu) a_\nu = -\frac{2}{\pi} \int\limits_0^{\pi} \sum_{\nu=1}^{n} \nu^{-2} L(\nu) \sin \nu x \, df(x)$$

tende vers une limite finie lorsque $n \to \infty$, et que $\nu^{-2} L(\nu) \searrow$ pour $\nu \geqslant l$ (l nombre naturel), on obtient, d'une manière analogue que ci-dessus,

$$Q_n(x) \overset{\text{def}}{=} \sum_{\nu=1}^{n} \nu^{-2} L(\nu) \sin \nu x$$

$$= \sum_{\nu=1}^{n-1} [\nu^{-2} L(\nu) - (\nu+1)^{-2} L(\nu+1)] \, s_\nu(x) - L(1) s_0(x) + n^{-2} L(n) s_n(x)$$

$$\geqslant \sum_{\nu=l}^{n-1} + \left[\sum_{\nu=1}^{l-1} - L(1) s_0(x) \right] = Q_n^{(1)}(x) + Q^{(1)}(x),$$

où $Q_n^{(1)}(x)$ est une suite de fonctions non négatives, et l'on en déduit l'intégrabilité de la fonction $P(x)$ par rapport à $f(x)$ dans $(0, \pi)$. On en obtient de nouveau (37).

Soit enfin

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1} L(n) \, |a_n| = K < +\infty.$$

Alors, d'après (V),

$$K \geqslant \sum_{\nu=1}^{n} \nu^{-1} L(\nu) \, |a_\nu| \geqslant \sum_{\nu=1}^{n} \inf_{0 \leqslant t \leqslant \nu} \{t^{-1} L(t)\} \, |a_\nu|$$

$$= \sum_{\nu=1}^{n} \nu^{-1} \underline{L_1}(\nu) \, |a_\nu| = \sum_{\nu=1}^{n} \nu^{-1} \underline{L_1}(\nu) \left| \frac{2}{\pi \nu} \int\limits_0^{\pi} \sin \nu x \cdot d[-f(x)] \right|$$

$$\geqslant \frac{2}{\pi} \left| \int\limits_0^{\pi} \left[\sum_{\nu=1}^{n} \nu^{-2} \underline{L_1}(\nu) \sin \nu x \right] d[-f(x)] \right|$$

$$= \frac{2}{\pi} \left| \int\limits_0^{\pi} R_n(x) \, d[-f(x)] \right|.$$

On a $x^{-1}\underline{L}_1(x)\searrow(x>0)$ et par suite

$$\begin{aligned}R_n(x)&=\sum_{\nu=1}^{n}\nu^{-2}\underline{L}_1(\nu)\sin\nu x\\&=\sum_{\nu=1}^{n-1}[\nu^{-2}\underline{L}_1(\nu)-(\nu+1)^{-2}L_1(\nu+1)]\,s_\nu(x)-\underline{L}_1(1)\,s_0(x)\\&=R_n^{(1)}(x)-\underline{L}_1(1)\,s_0(x),\end{aligned}$$

où $R_n^{(1)}(x)$ est une suite de fonctions non négatives et la fonction $s_0(x)$ est intégrable par rapport à $f(x)$ dans $(0,\ \pi)$. Par un procédé semblable à celui employé plus haut, on obtient

$$R_0(x)\geqslant M_6\,x\underline{S}_1\left(\frac{1}{x}\right),\quad R_0(x)=\lim_{n\to\infty}R_n^{(1)}(x)\ (M_6 \text{ constante positive}), \text{ avec}$$

$$\underline{S}_1(x)\overset{\text{def}}{=}\int_1^x t^{-1}\underline{L}_1(t)\,dt.$$

Etant donné que, d'après l'assertion 3° de (VI), $\underline{S}_1\left(\frac{1}{x}\right)\sim S\left(\frac{1}{x}\right)(x\to+0)$, on en déduit

$$R_0(x)\geqslant M_7\,x\,S\left(\frac{1}{x}\right)\qquad (M \text{ constante positive}).$$

On en obtient (37) en s'appuyant sur (VIII).

2.1.2. *Démonstration du théorème VIII.*

Il résulte des propriétés supposées de la fonction $L(x)$ que $L(x)\to 0$ $(x\to+\infty)$ et aussi que, d'après (VII),

$$\int_0^1 t^{-1}L\left(\frac{1}{t}\right)dt=\int_1^{+\infty}t^{-1}L(t)\,dt<+\infty,$$

c'est-à-dire que

$$x^{-1}L\left(\frac{1}{x}\right)\in\mathscr{L}(0,\ \pi).$$

On en conclut que les deux conditions dont le théorème VIII établit l'équivalence sont pour $g(x)=\text{const}$ automatiquement satisfaites, et l'on peut supposer, sans restreindre la généralité, que $g(\pi-0)=0$. Les coefficients b_n sont alors donnés par

$$b_n=-\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(1-\cos nx)\,dg(x)\geqslant 0.$$

En effet, d'après l'assertion 1° de (VIII) (avec $L(x)\equiv 1$), $xg(x)\in(0,\ \pi)$ entraîne l'existence de l'intégrale $\int_0^{\pi}x^2\,dg(x)$ et que $x^2g(x)\to 0\,(x\to+0)$, et par conséquent l'existence de $\int_0^\pi (1-\cos nx)\, dg(x)$ et que $(1-\cos nx)\cdot g(x)\to 0$ $(x\to +0)$. Donc, en tenant compte de $g(\pi-0)$, une intégration par parties donne

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi g(x)\sin nx\,dx=\frac{2}{\pi n}\Big[-\lim_{x\to+0} g(x)(1-\cos nx)\Big]-\int_0^\pi (1-\cos nx)\,dg(x)$$

$$=-\frac{2}{\pi n}\int_0^\pi (1-\cos nx)\,dg(x).$$

Par conséquent, $b_n\geqq 0$ $(n=1, 2, 3, \ldots)$ et, d'après le théorème de *Beppo-Levi*, la série

$$\sum_{n=1}^\infty L(n)\,b_n=-\frac{2}{\pi}\int_0^\pi\left[\sum_{n=1}^\infty n^{-1}L(n)(1-\cos nx)\right]dg(x)$$

converge (absolument) si et seulement si l'intégrale au second membre est fini. Or, d'après le théorème I,

$$\sum_{n=1}^\infty n^{-1}L(n)(1-\cos nx)\sim R\left(\frac{1}{x}\right)\qquad (x\to+0),$$

de manière que l'application de (VIII) conduit à l'assertion du théorème VIII.

3. Généralisation des théorèmes de Boas

Dans ses travaux [8] et [9], *R. P. Boas* a démontré les théorèmes (*C*)—(*G*), qui étendent le théorème (*A*) à l'intervalle [1, 2], en affaiblissant les conditions pour $1<\gamma\leqq 2$ et pour l'assertion dans une direction dans le cas $\gamma=1$, et donnent un analogue du théorème (*B*) pour la série de cosinus généralisée, définie par *Boas*, sous l'hypothèse

$$x^2 f(x)\in\mathscr{L}(0, \pi),$$

comme la série de cosinus aux coefficients

$$\text{(46)}\qquad a_n=-2\pi^{-1}\int_0^\pi (1-\cos nx)\,f(x)\,dx\qquad (n=1, 2, 3, \ldots)$$

(pour l'explication voir [8, 9]). On n'y suppose pas la monotonie des fonctions $g(x)$ et $f(x)$.

(C) *Soit* $1<\gamma<2$ *et*

$$\text{(47)}\qquad b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi g(x)\sin nx\,dx\qquad (n=1, 2, 3, \ldots).$$

Alors

$$\text{(48)}\qquad x^{\gamma-1}g(x)\in\mathscr{L}\quad(0, \pi)$$

entraîne la convergence absolue de la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\gamma} b_n. \tag{49}$$

(D) *Soit* $1<\gamma<2$, $g(x)\geqslant 0$ *pour* $x\in(0, \pi)$ *et* (47). *Alors la convergence de* (49) *entraîne* (48).

(E) *Soit* $g(x)\geqslant 0$ *pour* $x\in(0, \pi)$ *et* (47). *Alors la convergence de la série* $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1} b_n$ *entraîne* $g(x)\in\mathscr{L}(0, \pi)$.

(F) *Avec la formule* (47):

1°

$$xg(x)\log\frac{1}{x}\in\mathscr{L}(0, \pi) \tag{50}$$

entraîne la convergence absolue de la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-2} b_n. \tag{51}$$

2° *Si* $g(x)\geqslant 0$ $(0<x<\pi)$, *la convergence de* (51) *entraîne* (50).

(G) *Soit* $1<\gamma<3$, $x^2 f(x)\in\mathscr{L}(0, \pi)$, $f(x)\geqslant 0$ $(0<x<\pi)$ *et les coefficients* a_n *soient donnés par* (46). *Alors la série* $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\gamma} a_n$ *converge absolument si et seulement si* $x^{\gamma-1} f(x)\in\mathscr{L}(0, \pi)$.

Nous généralisons ici les théorèmes (C)—(G) par les théorèmes suivants, dont le dernier est pour (G) généralisation dans deux directions: introduction de fonction à croissance lente et élargissement de l'intervalle pour γ:

Théorème IX. *Soit* $1<\gamma<2$ *et* (47). *Alors*

$$x^{\gamma-1} L\left(\frac{1}{x}\right) g(x)\in\mathscr{L}(0, \pi) \tag{52}$$

entraîne la convergence absolue de la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\gamma} L(n)\, b_n. \tag{53}$$

Théorème X. *Soit* $1<\gamma<2$, $g(x)\geqslant 0$ $(0<x<\pi)$, $x\,g(x)\in\mathscr{L}(0, \pi)$, (47) *et* $x^{1-\gamma} L(x)\searrow$. *Alors la convergence de la série* (53) *entraîne* (52).

Théorème XI. *Soit* $g(x)\geqslant 0$ $(0<x<\pi)$, (47) *et* $L(x)\searrow$. *Alors la convergence de la série* $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1} L(n)$ *entraîne* $L\left(\frac{1}{x}\right) g(x)\in\mathscr{L}(0, \pi)$.

Théorème XII. *Avec la formule* (47):

1°

$$x\,S\left(\frac{1}{x}\right) g(x)\in\mathscr{L}(0, \pi) \tag{54}$$

entraîne la convergence absolue de la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-2} L(n) b_n. \tag{55}$$

2° *Si* $g(x) \geqq 0$ $(0 < x < \pi)$, $x^{-1} L(x) \searrow$ *et* $\sum = +\infty$, *la convergence de* (55) *entraîne* (54).

Théorème XIII. *Soit* $x^2 f(x) \in \mathscr{L}$ $(0, \pi)$, $f(x) \geqq 0$ $(0 < x < \pi)$ *et* (46). *Alors:*

1° *Pour* $1 < \gamma < 3$ *la série*

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\gamma} L(n) a_n$$

converge absolument si et seulement si

$$x^{\gamma-1} L\left(\frac{1}{x}\right) f(x) \in \mathscr{L} \ (0, \pi).$$

2° *Sous une des conditions* (C_2) *et* (C_1') *(l'énoncé du théorème* I) *et sous l'hypothèse* $\Sigma = +\infty$, *la série*

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-3} L(n) a_n \tag{56}$$

converge absolument si et seulement si

$$x^2 S\left(\frac{1}{x}\right) f(x) \in \mathscr{L} \ (0, \pi).$$

3° *Sous l'hypothèse* $\sum < \infty$: *la série* (56) *converge absolument, et la série*

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1} L(n) a_n \tag{57}$$

converge absolument si et seulement si

$$R\left(\frac{1}{x}\right) f(x) \in \mathscr{L} \ (0, \pi).$$

3.1. Démonstration des théorèmes IX—XIII

3.1.1. *Démonstration du théorème* IX. D'après le théorème de *Beppo-Levi* et l'estimation (31),

$$\frac{1}{2} \pi \sum_{n=1}^{\infty} n^{-\gamma} L(n) |b_n| \leqq \sum_{n=1}^{\infty} n^{-\gamma} L(n) \int_0^{\pi} |g(x)| \, |\sin nx| \, dx$$

$$= \int_0^{\pi} |g(x)| \sum_{n=1}^{\infty} n^{-\gamma} L(n) |\sin nx| \, dx \leqq M \int_0^{\pi} x^{\gamma-1} L\left(\frac{1}{x}\right) |g(x)| \, dx,$$

avec M constant, d'où le théorème.

3.1.2. *Démonstration du théorème* X. Mettant à profit le fait que toutes les sommes partielles de la série $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1} \sin nx$ sont positives pour $0<x<\pi$ (pour la démonstration voir, par exemple, [35], I, p. 106) et l'hypothèse $x^{1-\gamma} L(x) \searrow$, on obtient, au moyen d'une sommation par parties,

$$\sum_{n=1}^{p} n^{-\gamma} L(n) \sin nx > 0 \qquad (0<x<\pi;\ p=1, 2, 3, \ldots). \tag{58}$$

Comme

$$\int_0^\pi g(x) \sum_{n=1}^{p} n^{-\gamma} L(n) \sin nx \, dx = \sum_{n=1}^{p} n^{-\gamma} L(n) \int_0^\pi g(x) \sin nx \, dx$$

$$= \frac{\pi}{2} \sum_{n=1}^{p} n^{-\gamma} L(n) b_n,$$

on obtient, d'après le lemme de *Fatou* et (58),

$$\int_0^\pi g(x) \left[\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\gamma} L(n) \sin nx \right] dx \leqslant \varliminf_{p\to\infty} \frac{1}{2} \pi \sum_{n=1}^{p} n^{-\gamma} L(n) b_n < +\infty.$$

Cette intégralité-là et la relation (théorème I)

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\gamma} L(n) \sin nx \sim C x^{\gamma-1} L\left(\frac{1}{x}\right) \qquad (x\to+0;\ C \text{ constante positive})$$

entraînent le théorème,

3.1.3. *Démonstration du théorème* XI. D'après l'hypothèse $L(x)\searrow$, on a (58) avec $\gamma=1$. On en déduit, de la même manière que dans la démonstration précédente,

$$\int_0^\pi g(x) \left[\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1} L(n) \sin nx \right] dx \leqslant \varliminf_{p\to\infty} \frac{1}{2} \pi \sum_{n=1}^{p} n^{-1} L(n) b_n < +\infty.$$

Cette inégalité-là et la relation (théorème I)

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1} L(n) \sin nx \sim \frac{\pi}{2} L\left(\frac{1}{x}\right) \qquad (x\to+0)$$

entraînent le théorème.

3.1.4. *Démonstration du théorème* XII. 1° D'après le théorème de *Beppo-Levi* et les théorèmes I et II,

$$\frac{1}{2} \pi \sum_{n=1}^{\infty} n^{-2} L(n) |b_n| \leqslant \frac{1}{2} \pi \int_0^\pi |g(x)| \left[\sum_{n=1}^{\infty} n^{-2} L(n) |\sin nx| \right] dx$$

$$\leqslant M \int_0^\pi x S\left(\frac{1}{x}\right) |g(x)| \, dx \qquad (M \text{ constante}),$$

ce qui entraîne l'assertion 1°.

2° On a, d'après l'hypothèse sur $L(x)$,

$$\sum_{n=1}^{p} n^{-2} L(n) \sin nx > 0 \qquad (0 < x < \pi;\ p = 1, 2, 3, \ldots).$$

Par conséquent, de

$$\int_0^\pi g(x) \left[\sum_{n=1}^{p} n^{-2} L(n) \sin nx \right] dx = \frac{1}{2} \pi \sum_{n=1}^{p} n^{-2} L(n) b_n$$

on déduit, d'après le lemme de *Fatou*,

$$\text{(59)} \qquad \int_0^\pi g(x) \left[\sum_{n=1}^{\infty} n^{-2} L(n) \sin nx \right] dx \leqslant \varliminf_{p \to \infty} \frac{1}{2} \pi \sum_{n=1}^{p} n^{-2} L(n) b_n.$$

Puisque $\sum = +\infty$, on a (théorème I)

$$\text{(60)} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} n^{-2} L(n) \sin nx \sim x S\left(\frac{1}{x}\right) \qquad (x \to +0).$$

De (59) et (60) résulte l'assertion 2°.

3.1.5. *Démonstration du théorème* XIII. 1° On a, en vertu de $1 - \cos nx \geqslant 0$ et d'après le théorème de *Beppo-Levi*,

$$\frac{1}{2} \pi \sum_{n=1}^{\infty} n^{-\gamma} L(n) \,|\, a_n \,| = \int_0^\pi \left[\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\gamma} L(n) (1 - \cos nx) \right] f(x)\, dx.$$

L'assertion 1° résulte de cette égalité et de l'inégalité double

$$A x^{\gamma-1} L\left(\frac{1}{x}\right) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} n^{-\gamma} L(n) (1 - \cos nx) \leqslant B x^{\gamma-1} L\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$(1 < \gamma < 3;\quad A, B \text{ constantes positives}),$$

démontrée dans notre article [1] (p. 88, double inégalité (11)).

2° De même que dans le cas précédent,

$$\text{(61)} \qquad \frac{1}{2} \pi \sum_{n=1}^{\infty} n^{-3} L(n) \,|\, a_n \,| = \int_0^\pi \left[\sum_{n=1}^{\infty} n^{-3} L(n) (1 - \cos nx) \right] f(x)\, dx.$$

Sous les hypothèses correspondantes, on a, d'après le théorème I,

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-3} L(n) (1 - \cos nx) \sim \frac{1}{2} x^2 S\left(\frac{1}{x}\right) \qquad (x \to +0),$$

d'où l'assertion.

3° La partie de l'assertion relative à la série (56) résulte de (61) et de la relation (théorème I), valable si $\Sigma < +\infty$,

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-3} L(n) (1 - \cos nx) \sim \frac{1}{2} x^2 \sum \qquad (x \to +0),$$

et celle concernant la série (57) de l'égalité

$$\frac{1}{2}\pi\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1} L(n)\,|a_n| = \int_0^{\pi}\left[\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1} L(n)(1-\cos nx)\right] f(x)\,dx$$

et de la relation (théorème I)

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1} L(n)(1-\cos nx) \sim R\left(\frac{1}{x}\right) \qquad (x \to +0).$$

3.2. On peut remarquer, d'après les démonstrations correspondantes exposées, que la convergence des séries dans les énoncés des théorèmes X et XI et de l'assertion 2° du théorème XII peut être remplacée par la condition que les limites inférieures de leurs suites de sommes partielles sont $< +\infty$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] D. D. Adamović — *Généralisations de deux théorèmes de Zygmund — B. Sz.-Nagy*, Publications de l'Institut mathématique de l'Académie serbe des Sciences, t. XII (1958), 81—100.

[2] D. D. Adamović — *Sur quelques propriétés des fonctions à croissance lente de Karamata*, Matematički vesnik, 2 (17), 1965, sv. 2—3.

[3] S. Aljančić, R. Bojanić et M. Tomić — *Sur la valeur asymptotique d'une classe des intégrales définies*, Publications de l'Institut Mathématique de l'Académie serbe des Sciences, t. VII (1954), 81—94.

[4] S. Aljančić, R. Bojanić et M. Tomić — *Dva stava o asimptotskom ponašanju trigonometrijskih redova*, Zbornik radova S. A. N., 4 (1955), 15—26.

[5] S. Aljančić, R. Bojanić et M. Tomić — *Sur l'intégrabilité de certaines séries trigonométriques*, Publications de l'Institut Mathématique de l'Académie serbe des Sciences, t. VII (1954), 81—94.

[6] S. Aljančić, R. Bojanić et M. Tomić — *Sur le comportement asymptotiques au voisinage de zéro des séries trigonométriques de sinus à coefficients monotones*, Publications de l'Institut Mathématique de l'Académie serbe des Sciences, t. X (1958), 101—120.

[7] Béla Sz.-Nagy — *Séries et intégrales de Fourier des fonctions non bornées*, Acta Sci. math., Szeged, XIII (1949), 118—135.

[8] R. P. Boas — *Integrability of nonnegative trigonometric series*, Tôhoku Math. Journal, 14 (1962), 363—368.

[9] R. P. Boas — *Integrability of nonnegative trigonometric series, II*, Tôhoku Math. Journal, 16 (1964), 368—373.

[10] G. H. Hardy — *A theorem concerning trigonometric series*, Journal London Math. Society, 3 (1928), 12—13.

[11] P. Heywood — *A note on a theorem of Hardy on trigonometric series*, Journal London Math. Society, 29 (1954), 373—378.

[12] J. Karamata — *Sur un mode de croissance régulière des fonctions*, Mathematica (Cluj), 4 (1930), 38—53.

[13] J. Karamata — *Sur un mode de croissance régulière, théorèmes fondamentaux*, Bull. Soc. Math. France, 61 (1933), 55—62.

[14] A. Zygmund — *Sur les fonctions conjuguées*, Fundamenta Math., 13, (1929), 284—303.

[15] А. Зигмунд — *Тригонометрические ряды*, Москва, 1965.