PUBLICATIONS DE L'INSTITUT MATHÉMATIQUE
Nouvelle série, tome 8 (22), 1968, p. 8—22

FORMULATION COVARIANTE DES TRANSFORMATIONS CANONIQUES DANS LA THEORIE DES CHAMPS

Đorđe Mušicki

(Communiqué le 20 octobre 1965)

Les transformations canoniques dans la théorie des champs sont étudiées dans la formulation covariante directe, à la base du calcul des fonctionnelles et des surfaces du genre d'espace. De cette façon les relations générales correspondantes, l'équation d'Hamilton-Jacobi, les crochets de Lagrange et de Poisson et tous les invariants intégraux sont obtenus.

Introduction. — Le formalisme hamiltonien de la théorie des champs peut être donné dans la formulation covariante ou diréctement ou à l'aide des surfaces du genre d'espace et à cette base *de Donder* et *Weyl* [1, 2] ont obtenu les équations covariantes du champ dans la formulation directe et *Juvet* et *Weiss* [3, 4] dans la formulation paramétrique. En utilisant le formalisme paramétrique, *P. Weiss* [5] a introduit les transformations canoniques dans la théorie des champs et *S. Watanabe* [6] et *K. Roberts* [7] les ont étudiées sous la forme générale. Dans le formalisme direct ces transformations sont étudiées seulement pour le cas quand les transformations ont la forme des fonctions par *R. Good* [8] et *R. Liotta* [9]. Cependant, on ne peut pas considérer correct la plupart des résultats du premier auteur. Par exemple, le nombre des équations qui définissent les transformations canoniques n'est pas égal au nombre des variables inconnues, ses crochets de Poisson dans le cas général ne sont pas invariants et n'ont aucune propriété des crochets de Poisson et les formules (44) et (65) sont obtenues par un calcul faux. *H. Freistadt* [10] a introduit les crochets de Poisson à l'aide des surfaces du genre d'espace, qui donne les équations du mouvement et la possibilité pour la quantization des champs.

En s'appuyant au travail précédent [11], nous étudierons les transformations canoniques dans la théorie des champs sous la forme covariante la plus générale. Ces transformations seront définies à la base du calcul des fonctionnelles et du concept de surface du genre d'espace. Leurs propriétés seront étudiées et l'application à la théorie d'Hamilton-Jacobi donnée d'une manière similaire que dans le cas classique. Les conditions des transformations canoniques peuvent être formulées à l'aide des crochets de Lagrange et de Poisson, convenablement définis et leur invariance démontrée. Ensuite, le concept d'espace de phase sera étendu au ce cas comme un espace fonctionnel ou un espace euclidien étendu. A cette base on pourra étudier des invariants intégraux, qui généralisent ceux de Poincaré-Cartan du premier ordre et d'ordre supérieur sous la forme covariante.

A la fin, je voudrais ici remercier le professeur M. A. Lichnerowicz au Collège de France à Paris de sa généreuse hospitalité et de l'intérêt qu'il a porté à mon travail, ainsi que l'UNESCO pour l'octroi d'une bourse, qui a rendu possible mon séjour à Paris pendant l'année scolaire 1964—65.

1. Formalismes de Weyl et de Weiss. — Introduisons d'abord des surfaces du genre d'espace dans l'univers de Minkowski, qui représentent la généralisation des surfaces $t=$const. On peut y employer ou quatre coordonnées d'espace-temps x^α ou un scalaire w qui définit chaque de ces surfaces et trois paramètres u^r. Dans le premier cas à chaque fonction du champ ψ^i on fait correspondre quatre densités d'impulsion π_i^α, équivalent dans le sens covariant. On peut nommer le premier formalisme — formalisme direct ou de Weyl et le second — formalisme paramétrique ou de Weiss.

Définissons exactement le concept de surface du genre d'espace. Imaginons une surface quelconque σ dans l'univers de Minkowski, formons alors dans chaque point M de σ le cône de lumière et désignons par n^α les composantes contravariantes du vecteur-unité de la normale sur cette surface dans un point M. Puisque le long de normale seulement w est variable, on a $\delta x^\alpha = n^\alpha \delta w$ et les n^α sont donnés par

$$n^\alpha = \frac{\partial x^\alpha}{\partial w} \tag{1.1}$$

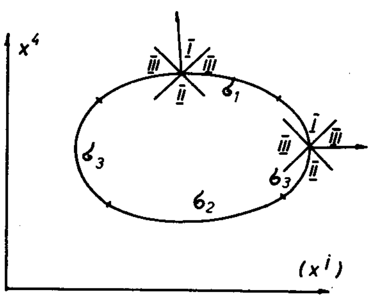

Fig. 1

S'il existe tel ensemble des points M sur σ que la normale dans chaque de ces points est dirigée vers la partie de temps du cône de lumière (I et II), cet ensemble d'après Weiss est nommé — surface du genre d'espace. Les composantes covariantes n_α doivent satisfaire un système, qui exprime l'unité et l'orthogonalité de ce vecteur

$$n_\alpha \frac{\partial x^\alpha}{\partial w} = 1, \qquad n_\alpha \frac{\partial x^\alpha}{\partial u^r} = 0, \tag{1.2}$$

en supprimant désormais le symbole de sommation d'après la convention d'Einstein. Ces équations seront satisfaites si on pose

$$n_\alpha = \frac{\partial w}{\partial x^\alpha}, \tag{1.3}$$

qui donne explicitement la forme de ces composantes.

Dans les autres cas, quand la normale est dirigée vers la partie d'espace du cône lumière (III), l'ensemble des points correspondants est — surface du genre de temps. Si la surface σ est convexe, c'est-à-dire si les n^α sont des fonctions monotones, cette surface peut être toujours décomposée en trois parties: deux surfaces du genre d'espace σ_1 et σ_2 et une surface du genre de temps σ_3 liant ces deux parties. Supposons que toutes les surfaces employées satisfont cette condition.

Le point de départ est le principe variationnel d'Hamilton, d'où on obtient les équations covariantes de Lagrange

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \psi^i} - \frac{d}{dx^\alpha} \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \psi^i_{,\alpha}} = 0 \qquad \left(\psi^i_{,\alpha} = \frac{\partial \psi^i}{\partial x^\alpha}\right), \tag{1.4}$$

Si l'on introduit

$$\pi_i^\alpha = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi^i_{,\alpha}}, \qquad H = \int (\pi_i^\alpha \psi^i_{,\alpha} - \mathcal{L})\, d^4 x \tag{1.5}$$

les équations d'Hamilton sous la forme de Donder-Weyl seront

$$\frac{d\pi_i^\alpha}{dx^\alpha} = -\frac{\delta H}{\delta \psi^i}, \qquad \frac{d\psi^i}{dx^\alpha} = \frac{\delta H}{\delta \pi_i^\alpha}. \tag{1.6}$$

Cependant, si l'on fait un changement des variables

$$x^\alpha = x^\alpha (w, u^r), \qquad w = \text{const sur } \sigma_i \tag{1.7}$$

où σ_i est une de deux surfaces du genre d'espace, en posant

$$\pi_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}^i}, \qquad H' = \int_{\sigma_i} (\pi_i \dot{\psi}^i - \mathcal{L})\, d\sigma, \tag{1.8}$$

on obtient les équations de Juvet-Weiss

$$\frac{d\pi_i}{dw} = -\frac{\delta H'}{\delta \psi^i}, \qquad \frac{d\psi^i}{dw} = \frac{\delta H'}{\delta \pi_i}. \tag{1.9}$$

Trouvons encore les relations entre ces deux formalismes covariants. Puisque

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi^i_{,\alpha}} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}^i} \frac{\partial \dot{\psi}^i}{\partial \psi^i_{,\alpha}} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi^{i(r)}} \frac{\partial \psi^{i(r)}}{\partial \psi^i_{,\alpha}}$$

et

$$\dot{\psi}^i = \frac{\partial \psi^i}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x^\alpha}{\partial w} = n^\alpha \psi^i_{,\alpha}, \qquad \psi^{i(r)} = \frac{\partial \psi^i}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x^\alpha}{\partial u^r} = \frac{\partial x^\alpha}{\partial u^r} \psi^i_{,\alpha},$$

les quantités π_i^α s'expriment en fonctions de π_i sous la forme

$$\pi_i^\alpha = n^\alpha \pi_i + \frac{\partial x^\alpha}{\partial u^r} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi^{i(r)}} \tag{1.10}$$

En multipliant cette équation par n_α et en faisant la sommation par rapport à α

$$n_\alpha \pi_i^\alpha = n_\alpha n^\alpha \pi_i + n_\alpha \frac{\partial x^\alpha}{\partial u^r} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi^{i(r)}},$$

à cause de (1.2) on obtient les relations inverses

$$\pi_i = n_\alpha \pi_i^\alpha \tag{1.11}$$

A la base de ces formules on peut passer en cas de nécessité d'un formalisme à l'autre.

Quant'au calcul des fonctionnelles, dans ce cas toutes les formules conservent la forme similaire que dans le cas classique [11], mais au lieu du volume on a une surface du genre d'espace.

2. Formule aux limites. — Dans le cas covariant l'élément d'action n'a pas la forme linéaire et c'est la raison pourquoi on doit partir de „formule aux limites" correspondante, qui donne la variation générale d'action. Introduisons d'abord les variations différentes

$$\eta^i = \bar{\psi}^i(x^\alpha) - \psi^i(x^\alpha), \quad \delta x^\alpha = \bar{x}^\alpha - x^\alpha \tag{2.1}$$
$$\delta\psi^i = \bar{\psi}^i(\bar{x}^\alpha) - \psi^i(x^\alpha)$$

et en développant $\bar{\psi}^i(x^\alpha + \delta x^\alpha)$ en serie de Taylor, on trouve

$$\delta\psi^i = \eta^i + \psi^i_{,\alpha}\,\delta x^\alpha. \tag{2.2}$$

En vertu de ces relations on peut exprimer explicitement $\delta\psi^i_{,\alpha}$ en termes des fonctions primaires et si l'on pose

$$\delta\psi^i_{,\alpha} = \frac{\partial\bar{\psi}^i}{\partial\bar{x}^\alpha} - \frac{\partial\psi^i}{\partial x^\alpha}, \qquad \frac{\partial\bar{\psi}^i}{\partial\bar{x}^\alpha} = \frac{\partial}{\partial x^\beta}(\psi^i + \delta\psi^i)\frac{\partial x^\beta}{\partial\bar{x}^\alpha}$$

et on transforme $\dfrac{\partial x^\beta}{\partial\bar{x}^\alpha}$ dans ce sens, on obtient une relation entre la variation de dérivée et la dérivée de variation

$$\delta\psi^i_{,\alpha} = \frac{\partial}{\partial x^\alpha}\delta\psi^i - \psi^i_{,\beta}\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\delta x^\beta. \tag{2.3}$$

D'autre part, si l'on fait varier l'élément d^4x dans l'univers aussi, d'après définition de variation on a

$$\delta(d^4x) = d\bar{x}^1\,d\bar{x}^2\,d\bar{x}^3\,d\bar{x}^4 - dx^1\,dx^2\,dx^3\,dx^4$$

et en développant chaque terme $d(x^i + \delta x^i)$ en serie de Taylor, on arrive à

$$\delta(d^4x) = d^4x\,\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\delta x^\alpha. \tag{2.4}$$

Considérons maintenant un champ qui est déterminé par n fonctions du champ $\psi^i(x^\alpha)$ et qui peut être décrit par une densité de Lagrange

$$\mathscr{L} = \mathscr{L}(\psi^i, \psi^i_{,\alpha}; x^\alpha). \tag{2.5}$$

L'action correspondante a la forme

$$W = \int \mathscr{L}(\psi^i, \psi^i_{,\alpha}; x^\alpha)\,d^4x$$

et la variation générale de celle-ci est

$$\delta W = \int \delta\mathscr{L}\,d^4x + \int \mathscr{L}\,\delta(d^4x). \tag{2.6}$$

En vertu de (2.3) et (2.4) cette expression se transforme à

$$\delta W = \int \left\{ \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\psi^i}\delta\psi^i + \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\psi^i_{,\alpha}}\left(\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\delta\psi^i - \psi^i_{,\beta}\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\delta x^\beta\right) + \right.$$
$$\left. + \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial x^\alpha}\delta x^\alpha + \mathscr{L}\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\delta x^\alpha \right\} d^4x$$

et en faisant intégration par parties, on obtient

$$(2.7)\qquad \delta W=\int\Big\{\Big(\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\psi^i}-\frac{d}{dx^\alpha}\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\psi^i_{,\alpha}}\Big)\eta^i+\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\Big[\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\psi^i_{,\alpha}}\delta\psi^i-$$

$$-\Big(\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\psi^i_{,\alpha}}\psi^i_{,\beta}-\delta^\alpha_\beta\mathscr{L}\Big)\delta x^\beta\Big]\Big\}\,d^4x.$$

A cause des équations de Lagrange le premier terme s'annule et en introduisant le tenseur d'énergie-impulsion correspondant

$$(2.8)\qquad T^\alpha_\beta=\pi^\alpha_i\,\psi^i_{,\beta}-\delta^\alpha_\beta\mathscr{L},$$

le deuxième terme à l'aide du théorème de Gauss peut être transformé à

$$(2.9)\qquad \delta W=\int_\sigma(\pi^\alpha_i\,\delta\psi^i-T^\alpha_\beta\,\delta x^\beta)\,d\sigma_\alpha.$$

Parce que la surface σ d'après notre convention est convexe, il est possible décomposer σ en deux surfaces du genre d'espace σ_1 et σ_2 et une surface du genre de temps σ_3. Supposons encore que toutes les variations à σ_3 sont égales à zéro

$$(2.10)\qquad \delta\psi^i=0,\qquad \delta x^\alpha=0\qquad \text{sur } \sigma_3.$$

Sous cette condition l'intégrale est étendue seulement à σ_1 et σ_2 et si l'on renverse encore le sens de normale sur σ_1, on obtient

$$(2.11)\qquad \delta W=\Big|\int(\pi^\alpha_i\,\delta\psi^i-T^\alpha_\beta\,\delta x^\beta)\,d\sigma_\alpha\Big|^{\sigma_2}_{\sigma_1}.$$

C'est la „formule aux limites" dans le formalisme covariant de Weyl, qui est équivalente à la validité des équations de Lagrange ou d'Hamilton. Si l'on transforme cette expression à l'aide de (1.11) et (2.8) au formalisme de Weiss, on obtient

$$(2.12)\qquad \delta W=\Big|\int(\pi_i\,\delta\psi^i-\mathscr{H}\,\delta w)\,d\sigma\Big|^{\sigma_2}_{\sigma_1}.$$

Puisque cette expression a la même forme que l'élément d'action transformé à la forme canonique, d'après les propriétés des formes de Pfaff on peut conclure que toutes les expressions (2.12) qui diffèrent seulement par un multiplicateur $c(u^r)$ ou par la variation d'une fonctionnelle G sont équivalentes, c'est-à-dire donnent les mêmes équations de Lagrange. En passant à l'expression (2.11) et en désignant l'équivalence par $\sim$, on a

$$(2.13)\qquad \begin{aligned}&\int(\pi^\alpha_i\,\delta\psi^i-T^\alpha_\beta\,\delta x^\beta)\,d\sigma_\alpha\sim\int c(u^r)(\pi^\alpha_i\,\delta\psi^i-T^\alpha_\beta\,\delta x^\beta)\,d\sigma_\alpha,\\ &\int(\pi^\alpha_i\,\delta\psi^i-T^\alpha_\beta\,\delta x^\beta)\,d\sigma_\alpha\sim\int(\pi^\alpha_i\,\delta\psi^i-T^\alpha_\beta\,\delta x^\beta)\,d\sigma_\alpha+\delta G.\end{aligned}$$

3. Transformations canoniques covariantes. — Considérons maintenant les transformations des variables canoniques sur une de deux surfaces σ_i du genre d'espace de la forme

$$(3.1)\qquad \overline{\psi}^i=F^i[\psi^k,\pi^\beta_k;\ x^\beta],\quad \overline{\pi}^\alpha_i=G^\alpha_i[\psi^k,\pi^\beta_k;\ x^\beta].$$

Si ces transformations conservent la forme des équations d'Hamilton

$$\frac{d\bar{\pi}_i^\alpha}{dx^\alpha} = -\frac{\delta \bar{H}}{\delta\bar{\psi}^i} \qquad \frac{d\bar{\psi}^i}{dx^\alpha} = \frac{\delta\bar{H}}{\delta\bar{\pi}_i^\alpha}, \tag{3.2}$$

on peut les nommer transformations canoniques covariantes. Ceux-ci sont données dans le formalisme covariant de Weyl.

En s'appuyant à (2.13) on obtient immédiatement la condition nécessaire et suffisante qu'une transformation du type (3.1) soit canonique

$$\int \left(\pi_i^\alpha \delta\psi^i - T_\beta^\alpha \delta x^\beta\right) d\sigma_\alpha = \int c(u)\left(\bar{\pi}_i^\alpha \delta\bar{\psi}^i - \bar{T}_\beta^\alpha \delta x^\beta\right) d\sigma_\alpha + \delta G. \tag{3.3}$$

La génératrice G de ces transformations en vertu de (3.1) peut dépendre seulement de $5n$ variables canoniques, anciennes et nouvelles. Si l'on écrit la condition (3.3) sous la forme

$$\int \pi_i^\alpha \delta\psi^i\, d\sigma_\alpha + \int c\,\bar{\psi}^i \delta\bar{\pi}_i^\alpha\, d\sigma_\alpha + \int \left(c\,\bar{T}_\beta^\alpha - T_\beta^\alpha\right) \delta x^\beta\, d\sigma_\alpha = \delta\left(G + \int c\,\bar{\pi}_i^\alpha \bar{\psi}^i\, d\sigma_\alpha\right)$$

et on pose

$$G_1\left[\psi^i,\ \bar{\pi}_i^\alpha;\ x^\alpha\right] = G + \int c\,\bar{\pi}_i^\alpha \bar{\psi}^i\, d\sigma_\alpha \tag{3.4}$$

et

$$K_\beta = \int T_\beta^\alpha\, d\sigma_\alpha, \tag{3.5}$$

à cause de l'indépendance de $\delta\psi^i$, $\delta\bar{\pi}_i^\alpha$ et δx^β on obtient

$$n_\alpha \pi_i^\alpha = \frac{\delta G_1}{\delta\psi^i}, \qquad c n_\alpha \bar{\psi}^i = \frac{\delta G_1}{\delta\bar{\pi}_i^\alpha}, \qquad \tilde{c}\,\bar{K}_\beta = K_\beta + \frac{\partial G_1}{\partial x^\beta}, \tag{3.6}$$

où $\tilde{c}$ est la valeur moyenne de $c(u)$ sur σ. En introduisant encore

$$G_1^\alpha = n^\alpha G_1, \tag{3.7}$$

on peut transformer ce système à

$$\begin{gathered} \pi_i^\alpha = \frac{\delta G_1^\alpha}{\delta\psi^i}, \qquad c\,\bar{\psi}^i = n^\alpha n_\beta \frac{\delta G_1^\beta}{\delta\bar{\pi}_i^\alpha} \\ \tilde{c}\,\bar{K}_\beta = K_\beta + n_\alpha \frac{\partial G_1^\alpha}{\partial x^\beta}. \end{gathered} \tag{3.8}$$

Si la génératrice G_1^α ne contient pas les dérivées par rapport à x^α, c'est un système de $5n+4$ équations ordinaires à $5n+4$ inconnues $\bar{\psi}^i$, $\bar{\pi}_i^\alpha$ et $\bar{K}_\beta$, et dans le cas général celui-ci représente un système des équations différentielles. En résolvant le premier groupe par rapport aux $\bar{\pi}_i^\alpha$ et en substituant dans le deuxième, on obtient les $\bar{\psi}^i$ et $\bar{\pi}_i^\alpha$ en qualité des fonctionnelles des variables anciennes.

D'une manière similaire, écrivant la condition (3.3) sous la forme

$$-\int \psi^i \,\delta \pi_i^\alpha \, d\sigma_\alpha - \int c\,\bar{\pi}_i^\alpha \,\delta\bar{\psi}^i \, d\sigma_\alpha + \int \left(c\,\bar{T}_\beta^\alpha - T_\beta^\alpha\right) \delta x^\beta \, d\sigma_\alpha =$$

$$= \delta \left(G - \int \pi_i^\alpha \,\psi^i \, d\sigma_\alpha\right)$$

et en introduisant

$$G_2\left[\bar{\psi}^i, \pi_i^\alpha;\ x^\alpha\right] = G - \int \pi_i^\alpha \,\psi^i \, d\sigma_\alpha \tag{3.9}$$

on arrive à

$$\psi^i = -n^\alpha n_\beta \frac{\delta G_2^\beta}{\delta \pi_i^\alpha}, \quad c\,\bar{\pi}_i^\alpha = -\frac{\delta G_2^\alpha}{\delta \bar{\psi}^i}$$
$$\tilde{c}\,\bar{K}_\beta = K_\beta + n_\alpha \frac{\partial G_2^\alpha}{\partial x^\beta}. \tag{3.10}$$

Cependant, les autres types de génératrice n'existent pas, parce qu'elles auraient plus ou moins de variables inconnues que le nombre des équations déterminant ces transformations.

4. Transformations canoniques infinitésimales. — Pour les transformations infinitésimales

$$\bar{\psi}^i = \psi^i + \delta\psi^i, \quad \bar{\pi}_i^\alpha = \pi_i^\alpha + \delta\pi_i^\alpha \tag{4.1}$$

définissons d'abord

$$G_1^0 = \int \psi^k \,\bar{\pi}_k^\alpha \, d\sigma_\alpha, \tag{4.2}$$

qui donne d'après (3.6) pour $c = 1$

$$n_\alpha \pi_i^\alpha = \frac{\delta G_1^0}{\delta \psi^i} = n_\alpha \bar{\pi}_i^\alpha, \quad n_\alpha \bar{\psi}^i = \frac{\delta G_1^0}{\delta \bar{\pi}_i^\alpha} = n_\alpha \psi^i;$$

c'est une transformation identique. La génératrice des transformations infinitésimales alors peut s'écrire sous la forme

$$G_1 = \int \psi^k \,\bar{\pi}_k^\alpha \, d\sigma_\alpha + \varepsilon\, G\left[\psi^k, \bar{\pi}_k^\alpha;\ x^\alpha\right] \tag{4.3}$$

d'où il suit

$$n_\alpha \pi_i^\alpha = n_\alpha \bar{\pi}_i^\alpha + \varepsilon \frac{\delta G}{\delta \psi^i}, \qquad n_\alpha \bar{\psi}^i = n_\alpha \psi^i + \varepsilon \frac{\delta G}{\delta \bar{\pi}_i^\alpha},$$

donc, en posant $\delta G / \delta \bar{\pi}_i^\alpha \approx \delta G / \delta \pi_i^\alpha$

$$\delta \psi^i = \varepsilon\, n^\alpha \frac{\delta G}{\delta \pi_i^\alpha}; \qquad \delta \pi_i^\alpha = -\varepsilon\, n^\alpha \frac{\delta G}{\delta \psi^i}. \tag{4.4}$$

Introduisons maintenant la variation d'une fonctionnelle quelconque

$$\delta F = F\left[\bar{\psi}^i, \bar{\pi}_i^\alpha;\ x^\alpha\right] - F\left[\psi^i, \pi_i^\alpha;\ x^\alpha\right]. \tag{4.5}$$

Dans ce cas, en développant $F\left[\psi^i + \delta\psi^i, \pi_i^\alpha + \delta\pi_i^\alpha;\ x^\alpha\right]$ en une serie de Taylor sur σ_i ([12], p. 25)

$$F\left[\psi^i + \delta\psi^i, \pi_i^\alpha + \delta\pi_i^\alpha;\ x^\alpha\right] = F\left[\psi^i, \pi_i^\alpha;\ x^\alpha\right] + \int \left(\delta\psi^i \frac{\delta F}{\delta \psi^i} + \delta\pi_i^\alpha \frac{\delta F}{\delta \pi_i^\alpha}\right) d\sigma,$$

on obtient

$$\delta F = \varepsilon [F, G], \tag{4.6}$$

où le symbole [ ] représente le crochet correspondant de Poisson.

Cependant, dans ce formalisme covariant on ne peut pas cosidérer l'évolution du champ comme une suite de transformations canoniques, parce que le concept de trajectoire est lié à paramètre w de Weiss.

5. Méthode d'Hamilton-Jacobi. — Effectuons maintenant une telle transformation canonique qui annule identiquement la nouvelle fonction d'Hamilton et choisissons comme génératrice $G_1^{\alpha}[\psi^i, \overline{\pi}_i^{\alpha}; x^{\alpha}]$, que désignons par S^{α}. Dans ce cas les équations d'Hamilton dans les variables nouvelles donnent

$$\frac{d\overline{\pi}_i^{\alpha}}{dx^{\alpha}} = -\frac{\delta \overline{H}}{\delta \overline{\psi}^i} \equiv 0, \qquad \frac{d\overline{\psi}^i}{dx^{\alpha}} = \frac{\delta \overline{H}}{\delta \overline{\pi}_i^{\alpha}} \equiv 0,$$

c'est-à-dire les $\overline{\pi}_i^{\alpha}$ et $\overline{\psi}^i$ sont des constantes du mouvement dans le sens

$$\frac{\partial \overline{\pi}_i^{\alpha}}{\partial x^{\alpha}} = 0, \qquad \frac{\partial \overline{\psi}^i}{\partial x^{\alpha}} = 0. \tag{5.1}$$

Pour établir les équations correspondantes, exprimons $\mathcal{L}$ dans la formule (2.8) par $\mathcal{H}$

$$T_{\beta}^{\alpha} = \pi_i^{\alpha} \psi^i_{,\beta} - \delta_{\beta}^{\alpha} (\pi_i^{\gamma} \psi^i_{,\gamma} - \mathcal{H})$$

et trouvons K_{β} d'après (3.5), d'où suit une relation entre K_{β} et $\mathcal{H}$ sous la forme

$$K_{\beta} = \int \pi_i^{\alpha} (n_{\alpha} \psi^i_{,\beta} - n_{\beta} \psi^i_{,\alpha})\, d\sigma + \int \mathcal{H}\, d\sigma_{\beta}. \tag{5.2}$$

Parce que dans les variables nouvelles $\overline{\mathcal{H}} \equiv 0$ et en vertu de (5.1) $\overline{\psi}^i_{,\alpha} = 0$, $\overline{\psi}^i_{,\beta} = 0$, on obtient

$$\overline{K}_{\beta} = 0. \tag{5.3}$$

Alors, si l'on remplace tous les π_i^{α} dans la fonctionnelle $K_{\beta}[\psi^i, \pi_i^{\alpha}; x^{\alpha}]$ d'après le premier groupe de (3.8) par $\frac{\delta S^{\alpha}}{\delta \psi^i}$, la dernière équation de ce système se réduit à

$$n_{\alpha} \frac{\partial S^{\alpha}}{\partial x^{\beta}} + K_{\beta}\left[\psi^i, \frac{\delta S^{\alpha}}{\delta \psi^i}; x^{\alpha}\right] = 0. \tag{5.4}$$

Ces quatre équations représentent les équations covariantes d'Hamilton-Jacobi sous la forme fonctionnelle. Dans ce cas à chaque coordonnée x^{α} on fait correspondre une équation de ce type, où au lieu de fonctionnelle H figure une des fonctionnelles K_{β} et c'est la différence principale entre le cas classique et le cas covariant.

Supposons que nous avons trouvé d'une manière quelconque une solution de l'équation (5.4) sous la forme

$$S^{\alpha} = S^{\alpha}[\psi^i(x^{\gamma}), a_i^{\beta}(x^{\gamma}); x^{\beta}], \tag{5.5}$$

où a_i^β sont des fonctions de x^γ telles que

$$\frac{\partial a_i^\beta}{\partial x^\beta} = O. \tag{5.6}$$

Si l'on identifie les fonctions a_i^β à $\overline{\pi}_i^\beta$, le système (3.8) passe à

$$\frac{\delta S^\alpha[\psi^i, a_i^\beta;\ x^\beta]}{\delta\psi^i} = \pi_i^\alpha, \qquad n^\alpha n_\beta \cdot \frac{\delta S^\beta[\psi^i, a_i^\beta;\ x^\beta]}{\delta a_i^\alpha} = cb^i. \tag{5.7}$$

C'est un système des équations ordinaires ou différentielles selon que la fonctionnelle S^α contient les dérivées par rapport à x^α ou non. En résolvant le dernier groupe par rapport aux ψ^i et en remplaçant dans le premièr, on obtient toutes les variables canoniques sous la forme

$$\psi^i = F^i[a_k^\beta, b^k; x^\beta], \qquad \pi_i^\alpha = G_i^\alpha[a_k^\beta, b^k; x^\beta]. \tag{5.8}$$

Après avoir déterminer tous les a_k^β et b^k à l'aide des conditions initiales, ces relations deviennent des fonctions ordinaires de x^β. De cette façon on a obtenu le théorème généralisé de Jacobi: si l'on trouve une intégrale complète des équations covariantes d'Hamilton-Jacobi, le système (5.7) donne les solutions des équations correspondantes d'Hamilton.

6. Condition nécessaire et suffisante de forme différentielle. — Exprimons maintenant la condition nécessaire et suffisante pour une transformation canonique (3.3) sous la forme différentielle. En posant

$$\delta\overline{\psi}^i = \int\left\{\frac{\delta\overline{\psi}^i}{\delta\psi^k(x'')}\delta\psi^k(x'') + \frac{\delta\overline{\psi}^i}{\delta\pi_k^\beta(x'')}\delta\pi_k^\beta(x'')\right\}d\sigma'' + \frac{\partial\overline{\psi}^i}{\partial x^\beta}\delta x^\beta$$

on peut l'écrire

$$\begin{aligned}
&\int\left\{\left(n_\alpha\pi_i^\alpha(x) - \int c\, n_\gamma''\, \overline{\pi}_k^\gamma(x'')\, \frac{\delta\overline{\psi}^k(x'')}{\delta\psi^i(x)}\, d\sigma''\right)\delta\psi^i(x) +\right.\\
&+\left(-\int c\, n_\gamma''\, \overline{\pi}_k^\gamma(x'')\, \frac{\delta\overline{\psi}^k(x'')}{\delta\pi_i^\alpha(x)}\, d\sigma''\right)\delta\pi_i^\alpha(x) + n_\alpha\left(c\,\overline{T}_\beta^\alpha -\right.\\
&\left.\left.-T_\beta^\alpha - c\,\overline{\pi}_i^\alpha(x)\,\frac{\partial\overline{\psi}^i(x)}{\partial x^\beta}\right)\delta x^\beta\right\}d\sigma = \int\left\{\frac{\delta G}{\delta\psi^i(x)}\,\delta\psi^i(x) +\right.\\
&\left.+\frac{\delta G}{\delta\pi_i^\alpha(x)}\,\delta\pi_i^\alpha(x)\right\}d\sigma + \frac{\partial G}{\partial x^\beta}\,\delta x^\beta.
\end{aligned} \tag{6.1}$$

Parce que les variations $\delta\psi^i$, $\delta\pi_i^\alpha$ et δx^β sont indépendantes, les coefficients correspondants doivent être égaux, d'où il suit

$$\begin{aligned}
&\frac{\delta}{\delta\psi^j(x')}\left\{n_\alpha\,\pi_i^\alpha(x) - \tilde{c}\int n_\gamma''\,\overline{\pi}_k^\gamma(x'')\,\frac{\delta\overline{\psi}^k(x'')}{\delta\psi^i(x)}\,d\sigma''\right\} =\\
&= \frac{\delta}{\delta\psi^i(x)}\left\{n_\alpha\,\pi_j^\alpha(x') - \tilde{c}\int n_\gamma''\,\overline{\pi}_k^\gamma(x'')\,\frac{\delta\overline{\psi}^k(x'')}{\delta\psi^j(x')}\,d\sigma''\right\}
\end{aligned}$$

$$\frac{\delta}{\delta \pi_j^\beta(x')}\left\{-\tilde{c}\int n_\gamma''\,\overline{\pi}_k^\gamma(x'')\,\frac{\delta\overline{\psi}^k(x'')}{\delta\pi_i^\alpha(x)}\,d\sigma''\right\}=$$

$$(6.2)\qquad =\frac{\delta}{\delta \pi_i^\alpha(x)}\left\{-\tilde{c}\int n_\gamma''\,\overline{\pi}_k^\gamma(x'')\,\frac{\delta\overline{\psi}^k(x'')}{\delta\pi_j^\beta(x')}\,d\sigma''\right\}$$

$$\frac{\delta}{\delta \pi_j^\beta(x')}\left\{n_\alpha\pi_i^\alpha(x)-\tilde{c}\int n_\gamma''\,\overline{\pi}_k^\gamma(x'')\,\frac{\delta\overline{\psi}^k(x'')}{\delta\psi^i(x)}\,d\sigma''\right\}=$$

$$=\frac{\delta}{\delta \psi^i(x)}\left\{-\tilde{c}\int n_\gamma''\,\overline{\pi}_k^\gamma(x'')\,\frac{\delta\overline{\psi}^k(x'')}{\delta\pi_j^\beta(x')}\,d\sigma''\right\}.$$

Si l'on développe la troisième condition, puisque sur la surface du genre d'espace on a

$$\frac{\delta f(x)}{\delta f(x')}=\delta(x-x'),$$

on arrive à

$$\int\left\{\frac{\delta\overline{\psi}^k(x'')}{\delta\psi^i(x)}\,\frac{\delta\overline{\pi}_k^\gamma(x'')}{\delta\pi_j^\beta(x')}-\frac{\delta\overline{\psi}^k(x'')}{\delta\pi_j^\beta(x')}\,\frac{\delta\overline{\pi}_k^\gamma(x'')}{\delta\psi^i(x)}\right\}d\sigma_\gamma''=\frac{1}{\tilde{c}}\,\delta_i^j\,n_\beta\,\delta(x-x').$$

En définissant le crochet de Lagrange par

$$(6.3)\qquad \{u(x),\,v(x')\}=\int\left\{\frac{\delta\psi^k(x'')}{\delta u(x)}\,\frac{\delta\pi_k^\alpha(x'')}{\delta v(x')}-\frac{\delta\psi^k(x'')}{\delta v(x')}\,\frac{\delta\pi_k^\alpha(x'')}{\delta u(x)}\right\}d\sigma_\alpha''$$

et en posant

$$(6.4)\qquad \delta_\beta(x-x')=n_\beta\,\delta(x-x'),$$

on obtient sous la forme concise

$$(6.5)\qquad \{\psi^i(x),\,\pi_j^\beta(x')\}_{\overline{\psi},\,\overline{\pi}}=\frac{1}{\tilde{c}}\,\delta_i^j\,\delta_\beta(x-x').$$

D'une manière semblable, à partir des autres conditions, on peut les écrire

$$(6.6)\qquad \{\psi^i(x),\,\psi^j(x')\}_{\overline{\psi},\,\overline{\pi}}=0,\qquad \{\pi_i^\alpha(x),\,\pi_j^\beta(x')\}_{\overline{\psi},\,\overline{\pi}}=0$$

et ces relations représentent la forme différentielle de condition étudiée (3.3).

7. Crochets de Lagrange et de Poisson. — Introduisons encore le crochet de Poisson

$$(7.1)\qquad [u(x),\,v(x')]=\int\left\{\frac{\delta u(x)}{\delta\psi^k(x'')}\,\frac{\delta v(x')}{\delta\pi_k^\alpha(x'')}-\frac{\delta u(x)}{\delta\pi_k^\alpha(x'')}\,\frac{\delta v(x')}{\delta\psi^k(x'')}\right\}d\sigma''^\alpha$$

et prenons $5n$ fonctions quelconques u_l des variables canoniques. D'une manière similaire comme dans le cas classique, formons la somme

$$S\equiv\int\{u_l(x''),\,u_i(x)\}\,[u_l(x''),\,u_j(x')]\,d\sigma''$$

et décomposons celle-ci en quatre termes. En s'appuyant à (1.10) et (1.11), on peut démontrer que

$$n_\alpha(x'')\, n^\beta(x'')\, \frac{\delta u_j(x')}{\delta \pi^\beta_k(x'')}\, \frac{\delta \pi^\alpha_k(x'')}{\delta u_i(x)} = \frac{\delta u_j(x')}{\delta \pi^\beta_k(x'')}\, \frac{\delta \pi^\beta_k(x'')}{\delta u_i(x)}$$

et à cette base on obtient ces termes dans la forme

$$\text{(7.2)}\qquad \begin{aligned} S_1 &= \int \frac{\delta u_j(x')}{\delta \pi^\beta_k(x''')}\, \frac{\delta \pi^\beta_k(x''')}{\delta u_i(x)}\, d\sigma''', \qquad S_2 = 0 \\ S_3 &= 0, \qquad S_4 = \int \frac{\delta u_j(x')}{\delta \psi^k(x''')}\, \frac{\delta \psi^k(x''')}{\delta u_i(x)}\, d\sigma''', \end{aligned}$$

d'où il suit

$$\text{(7.3)}\qquad \int \{u_l(x''),\, u_i(x)\}\, [u_l(x''),\, u_j(x')]\, d\sigma'' = \delta^j_i\, \delta(x-x').$$

C'est une relation entre les crochets de Lagrange et de Poisson, valable pour tous les systèmes des variables canoniques.

Si l'on pose

$$u_l = \psi^1, \ldots, \psi^n, \pi^1_1, \ldots, \pi^4_n; \quad u_i = \psi^i, \quad u_j = \psi^j,$$

on a

$$\int \{\psi^l(x''),\, \psi^i(x)\}\, [\psi^l(x''),\, \psi^j(x')]\, d\sigma'' + \int \{\pi^\beta_l(x''),\, \psi^i(x)\} \times$$
$$\times \left[\pi^\beta_l(x''),\, \psi^j(x')\right] d\sigma'' = \delta^j_i\, \delta(x-x')$$

d'où on obtient, en vertu de (6.5) et (6.6)

$$\text{(7.4)}\qquad [\psi^i(x),\, \pi^\beta_j(x')]_{\bar\psi,\bar\pi} = \tilde{c}\, \delta^j_i\, \delta^\beta(x-x')$$

et d'une manière similaire

$$\text{(7.5)}\qquad [\psi^i(x),\, \psi^j(x')]_{\bar\psi,\bar\pi} = 0, \qquad [\pi^\alpha_i(x),\, \pi^\beta_j(x')]_{\bar\psi,\bar\pi} = 0.$$

Pour examiner comment se comportent les crochets de Lagrange et de Poisson lors d'une transformation canonique, transformons les dérivées fonctionnelles de $\bar\psi^k$ et $\bar\pi^\alpha_k$ par rapport à $u(x)$ et $v(x')$ et inversement. Par exemple

$$\frac{\delta \bar\psi^k(x'')}{\delta u(x)} = \int \left\{ \frac{\delta \bar\psi^k(x'')}{\delta \psi^i(x''')}\, \frac{\delta \psi^i(x''')}{\delta u(x)} + \frac{\delta \bar\psi^k(x'')}{\delta \pi^\beta_i(x''')}\, \frac{\delta \pi^\beta_i(x''')}{\delta u(x)} \right\} d\sigma'''$$

et de cette façon pour le crochet de Lagrange on obtient

$$\{u(x),\, v(x')\}_{\bar\psi,\bar\pi} = \int\!\!\int \left(\frac{\delta \psi^i(x''')}{\delta u(x)}\, \frac{\delta \psi^j(x'''')}{\delta v(x')}\, \{\psi^i(x'''),\, \psi^j(x'''')\}_{\bar\psi,\bar\pi} + \right.$$

$$\text{(7.6)}\qquad + \frac{\delta \psi^i(x''')}{\delta u(x)}\, \frac{\delta \pi^\gamma_j(x'''')}{\delta v(x')}\, \{\psi^i(x'''),\, \pi^\gamma_j(x'''')\}_{\bar\psi,\bar\pi} + \frac{\delta \pi^\beta_i(x''')}{\delta u(x)}\, \frac{\delta \psi^j(x'''')}{\delta v(x')} \times$$

$$\left. \times \{\pi^\beta_i(x'''),\, \psi^j(x'''')\}_{\bar\psi,\bar\pi} + \frac{\delta \pi^\beta_i(x''')}{\delta u(x)}\, \frac{\delta \pi^\gamma_j(x'''')}{\delta v(x')}\, \{\pi^\beta_i(x'''),\, \pi^\gamma_j(x'''')\}_{\bar\psi,\bar\pi} \right) d\sigma'''\, d\sigma''''$$

et parce que cette expression est réduite aux crochets fondamentals de Lagrange, il suit

$$\{u(x),\ v(x')\}_{\bar{\psi},\bar{\pi}} = \frac{1}{\tilde{c}}\{u(x),\ v(x')\}_{\psi,\pi}. \tag{7.7}$$

De même, pour le crochet de Poisson de deux fonctionnelles on a

$$\begin{aligned}[F,\ G]_{\bar{\psi},\bar{\pi}} = \int\!\!\int\Big(&\frac{\delta F}{\delta\psi^i(x''')}\,\frac{\delta G}{\delta\psi^j(x'''')}\,[\psi^i(x'''),\ \psi^j(x'''')]_{\bar{\psi},\bar{\pi}} + \frac{\delta F}{\delta\psi^i(x''')}\,\frac{\delta G}{\delta\pi_j^\gamma(x'''')}\,\times\\
&\times[\psi^i(x'''),\ \pi_j^\gamma(x'''')]_{\bar{\psi},\bar{\pi}} + \frac{\delta F}{\delta\pi_i^\beta(x''')}\,\frac{\delta G}{\delta\psi^j(x'''')}\,[\pi_i^\beta(x'''),\ \psi^j(x'''')]_{\bar{\psi},\bar{\pi}} +\\
&+\frac{\delta F}{\delta\pi_i^\beta(x''')}\,\frac{\delta G}{\delta\pi_j^\gamma(x'''')}\,[\pi_i^\beta(x'''),\ \pi_j^\gamma(x'''')]_{\bar{\psi},\bar{\pi}}\Big)\,d\sigma'''\,d\sigma'''\end{aligned} \tag{7.8}$$

et on obtient, en vertu de (7.4) et (7.5)

$$[F,\ G]_{\bar{\psi},\bar{\pi}} = \tilde{c}\,[F,\ G]_{\psi,\pi}, \tag{7.9}$$

qui est valable pour les fonctions aussi. Donc, les crochets covariants de Lagrange et de Poisson sont invariants par rapport aux transformations canoniques au facteur $\frac{1}{\tilde{c}}$ respectivement $\tilde{c}$ près.

A l'aide de ces crochets de Poisson on peut exprimer les équations d'Hamilton aussi [10]. Si l'on forme les crochets de Poisson

$$[\psi^i(x),\ H], \qquad [\pi_i^\alpha(x),\ H],$$

d'après leur définition et en employant la fonction de Dirac, on obtient

$$n^\alpha(x)\,\frac{d\psi^i(x)}{dx^\alpha} = [\psi^i(x),\ H], \qquad n^\alpha(x)\,\frac{d\pi_i^\beta(x)}{dx^\beta} = [\pi_i^\alpha(x),\ H]. \tag{7.10}$$

Dans le cas des transformations canoniques (3.1) sous la forme des fonctions, la condition (3.1) ainsi que les crochets de Lagrange et de Poisson se réduisent aux intégrands correspondants, multipliés toujours par n^α.

8. Invariants intégraux du premier ordre. — Dans cette formulation covariante, pour représenter les états du champ, on doit introduire aussi le concept d'espace de phase. Cependant, parce qu'aucune coordonnée x^α ne doit pas être distinguée, l'espace de phase peut être défini seulement par un des ensembles suivants:

$$\text{a) } \big(\psi^i(x),\ \pi_i^\alpha(x)\big), \qquad \text{b) } \big(\psi^i(x),\ \pi_i^\alpha(x);\ x^\alpha\big) \tag{8.1}$$

aves les axes ordinaires pour x^α. Le premier type est un espace fonctionnel et le second, à cause de valeur de x^α, un espace euclidien étendu.

Pour ces espaces de phase on peut définir tous les concepts géométriques à l'aide des paramètres correspondants λ_k, qui doivent être de même nature que les éléments d'espace. Par exemple, dans le premier type une „ligne“ est définie de cette façon qu'à chacun élément de (8.1) on fait correspondre une fonction $\lambda(x)$ et dans le second type une valeur λ. D'une manière similaire, une „surface“ sera définie à l'aide de deu$x$ paramètres etc.

Imaginons maintenant dans l'espace de phase du deuxiéme type, d'une manière semblable que dans le cas classique ([13], p. 115), un contour L_0 arbitraire mais fermé, déterminé à l'aide d'un paramètre λ, et les „trajectoires“ qui passent à travers de chaque „point“ de ce contour. Ces trajectoires peuvent être définies comme les suites des ensembles (8.1) quand on change seulement le paramètre w de Weiss. A chaque valeur de λ correspond un point M sur L_0, ainsi qu'une trajectoire MM' et un point M' sur L_1.

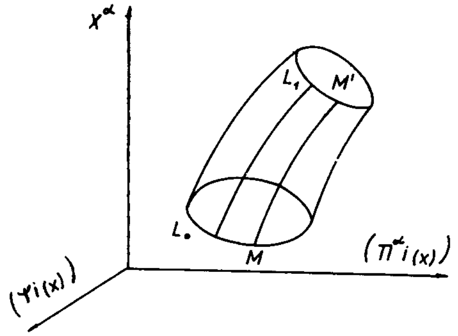

Fig. 2

Si l'on intègre la „formule aux limites“ (2.11) pour toutes les valeurs correspondantes de λ le long de L_0, on obtient

$$\oint \delta W = 0 = \oint_{L_1} \int (\pi_i^\alpha \delta\psi^i - T_\beta^\alpha \delta x^\beta)\, d\sigma_\alpha - \oint_{L_0} \int (\pi_i^\alpha \delta\psi^i - T_\beta^\alpha \delta x^\beta)\, d\sigma_\alpha,$$

d'où il suit

$$J \equiv \oint_{L_0} \int_{\sigma_i} (\pi_i^\alpha \delta\psi^i - T_\beta^\alpha \delta x^\beta)\, d\sigma_\alpha = \oint_{L_1} \int_{\sigma_i} (\pi_i^\alpha \delta\psi^i - T_\beta^\alpha \delta x^\beta)\, d\sigma_\alpha. \tag{8.2}$$

Cette intégrale, qui peut être nommée intégrale covariante généralisée, de Poincaré-Cartan, est donc un invariant le long du manteau des trajectoires dans l'espace de phase.

Pour $\delta x^\beta = 0$ cette intégrale se réduit à

$$J_1 \equiv \oint_{L_0} \int_{\sigma_i} \pi_i^\alpha \delta\psi^i\, d\sigma_\alpha = \oint_{L_1} \int_{\sigma_i} \pi_i^\alpha \delta\psi^i\, d\sigma_\alpha. \tag{8.3}$$

A l'aide du theorème de Stokes, qui dans ce cas prend la forme suivante ([12], p. 158)

$$\oint_L \int A_i \delta\varphi_i\, d\sigma = \int_S\int\int \left\{ \frac{\delta A_i}{\delta\varphi^k(x')} - \frac{\delta A_k}{\delta\varphi^i(x)} \right\} \delta\varphi^i(x)\, \delta\varphi^k(x')\, d\sigma\, d\sigma',$$

on peut la transformer à l'intégrale de surface dans l'espace de phase en posant

$$A_i = \begin{cases} \pi_i^\alpha, & i \leqslant n \\ 0, & i > n \end{cases}, \qquad \varphi_i = \begin{cases} \psi^i, & i \leqslant n \\ \pi_i^\alpha & i > n \end{cases},$$

d'où il suit

$$J_1 \equiv \oint_L \int_{\sigma_i} \pi_i^\alpha \delta\psi^i\, d\sigma_\alpha = \int_S \int_{\sigma_i} \delta\pi_i^\alpha \delta\psi^i\, d\sigma_\alpha \tag{8.4}$$

et c'est l'invariant correspondant de Poincaré.

Quant'aux transformations canoniques, pour trouver les intégrales invariantes, on doit partir de la condition nécessaire et suffisante pour une transformation canonique (3.3). En intégrant cette équation par rapport à λ le long d'un contour L dans l'espace de phase, on obtient

$$\oint_L \int (\pi_i^\alpha \, \delta\psi^i - T_\beta^\alpha \, \delta x^\beta) \, d\sigma_\alpha = \tilde{c} \oint_{\bar{L}} \int (\bar{\pi}_i^\alpha \, \delta\bar{\psi}^i - \bar{T}_\beta^\alpha \, \delta x^\beta) \, d\sigma_\alpha + \oint \delta G$$

et parce que $\oint \delta G = 0$, il suit

$$\bar{J} = \frac{1}{\tilde{c}} J. \tag{8.5}$$

Dans le cas spécial $\delta x^\beta = 0$ cette relation se réduit à

$$\bar{J}_1 = \frac{1}{\tilde{c}} J_1. \tag{8.6}$$

Par conséquent, les intégrales covariantes de Poincaré-Cartan et celles-ci de Poincaré sont invariantes lors d'une transformation canonique au facteur $\frac{1}{\tilde{c}}$ près.

9. Invariants intégraux d'odre supérieur. — Pour étendre ces résultats aux intégrales d'ordre supérieur, divisons la surface du genre d'espace σ_i à un très grand nombre N de cellules, en considérant égales toutes les valeurs des fonctions $\psi^i(x)$ à l'intérieur d'une même cellule. De cette façon le champ considéré est remplacé par un système à nN degrés de liberté, qui donne la possibilité établir une suite des intégrales correspondant à celles de mécanique analytique, d'une manière similaire que dans le cas classique.

Pour une valeur fixe de N formons des intégrales suivantes

$$J_1 = \int_S \int_{\sigma_i} \delta\psi^i(x) \, \delta\pi_i^\alpha(x) \, d\sigma_\alpha$$

$$J_2 = \int_{S'} \int_{S''} \int_{\sigma_i'} \int_{\sigma_i''} \delta\psi^{i_1}(x') \, \delta\psi^{i_2}(x'') \, \delta\pi_{i_1}^{\alpha'}(x') \, \delta\pi_{i_2}^{\alpha''}(x'') \, d\sigma'_{\alpha'} \, d\sigma''_{\alpha''} \tag{9.1}$$

. . . .

$$J_{nN} = \int_{S'} \cdots \int_{S^{(nN)}} \int_{\sigma_i'} \cdots \int_{\sigma_i^{(nN)}} \delta\psi^{i_1}(x') \ldots \delta\psi^{i_{nN}}(x^{(nN)}) \, \delta\pi_{i_1}^{\alpha'}(x') \ldots \delta\pi_{i_{nN}}^{\alpha^{(nN)}}(x^{(nN)}) \times$$
$$\times \, d\sigma'_{\alpha'} \ldots d\sigma^{(nN)}_{\alpha^{(nN)}}.$$

En introduisant les paramètres correspondants, qui définissent des hypersurfaces, par

$$\delta\psi^{i_1}(x') \ldots \delta\psi^{i_k}(x^{(k)}) \, \delta\pi_{i_1}^{\alpha'}(x') \ldots \delta\pi_{i_k}^{\alpha^{(k)}}(x^{(k)}) =$$
$$= \frac{\partial\left(\psi^{i_1}(x'), \ldots, \psi^{i_k}(x^{(k)}), \pi_{i_1}^{\alpha'}(x'), \ldots, \pi_{i_k}^{\alpha^{(k)}}(x^{(k)})\right)}{\partial(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{2k})} \delta\lambda_1 \ldots \delta\lambda_{2k},$$

on peut écrire une intégrale quelconque sous la forme

$$J_k = \int_{S'} \cdots \int_{S^{(k)}} \delta\lambda_1 \ldots \delta\lambda_{2k} \int_{\sigma_i'} \cdots \int_{\sigma_i^{(k)}} \frac{\partial\left(\psi^{i_1}(x'), \ldots, \pi_{i_k}^{\alpha^{(k)}}(x^{(k)})\right)}{\partial(\lambda_1, \ldots, \lambda_{2k})} d\sigma'_{\alpha'} \ldots d\sigma^{(k)}_{\alpha^{(k)}}. \tag{9.2}$$

Si l'on généralise la formule correspondante de mécanique analytique ([14], p. 64) au cas covariant, on a

$$
(9.3)\qquad \int\limits_{\sigma_i'} \cdots \int\limits_{\sigma_i^{(k)}} \frac{\partial\left(\psi^{i_1}(x'), \ldots, \pi_{i_k}^{\alpha(k)}(x^{(k)})\right)}{\partial(\lambda_1, \ldots, \lambda_{2k})} d\sigma_{\alpha'}' \ldots d\sigma_{\alpha(k)}^{(k)} =
$$

$$
= 2^{-k} \Sigma \pm \{\lambda_{\nu_1}, \lambda_{\nu_2}\}\{\lambda_{\nu_3}, \lambda_{\nu_4}\} \cdots \{\lambda_{\nu_{2k-1}}, \lambda_{\nu_{2k}}\},
$$

où la some est étendue à toutes les permutations $(\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_k)$. De cette façon chaque intégrale est exprimée par des crochets de Lagrange et en effectuant une transformation canonique, on obtient en vertu de (7.7)

$$
(9.4)\qquad \bar{J}_k = \frac{1}{\tilde{c}^k} J_k, \qquad 1 \leqslant k \leqslant nN.
$$

Donc, toutes les intégrales covariantes de Poincaré $J_1, J_2, \ldots, J_{nN}$ sont invariantes par rapport aux transformations canoniques au facteur $\frac{1}{\tilde{c}^k}$ près. Cependant, dans ce formalisme on ne peut pas considérer l'évolution du champ comme une suite des transformations canoniques et le théorème de Liouville n'est pas valable.

Notons encore à la fin que si l'on prend pour la surface du genre d'espace la surface $t = \text{const.}$, l'ensemble n^α devient (0, 0, 0, 1) et tous les résultats obtenus passent aux ceux-ci du cas classique. Par exemple, dans ce cas d'après (5.2) on a $K_4 = H$ et la quatrième équation (5.4) se réduit à l'équation d'Hamilton-Jacobi dans la théorie classique des champs.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Th. de Donder: *Théorie invariantive du calcul des variations*, Bull. Acad. Roy. Belg., **15** (1929), 150—9.

[2] H. Weyl: *Observations on Hilbert's independance theorem and Born's quantization of field equations*, Phys. Rev., **46** (1934), 505—8.

[3] G. Juvet: *Sur une équation aux dérivées fonctionnelles partielles et sur une généralisation du théorème de Jacobi* — Thèse, Paris (1926).

[4] P. Weiss: *On the quantization of a theory arising from a variational principle for multiple integrals with application to Born's electrodynamics*, Proc. Roy. Soc. A., **156** (1936), 192—220.

[5] P. Weiss: *On the Hamilton-Jacobi theory and quantization of a dynamical continuum*, Proc. Roy. Soc. A, **169** (1938), 102—19.

[6] S. Watanabe: *On Dirac's general transformation function I*, Progr. Theor. Phys., **2** (1947), 71—88.

[7] K. Roberts: *On the quantum theory of the elementary particles I. Introduction and classical field dynamics*, Proc. Roy. Soc. A, **204** (1950), 123—44.

[8] R. Good: *Hamiltonian mecanics of fields*, Phys. Rev., **93** (1954), 239—43.

[9] R. Liotta: *Covariant canonical equations for a classical field I*, Nuovo Cimento, **3** (1956), 438—46.

[10] H. Freistadt: *Poisson brackets in the field theory*, Can. J. Phys., **37** (1959), 5—9.

[11] Đ. Mušicki: *Transformations canoniques dans la théorie classique des champs*, Publ. Inst. Math. (Beograd), **7 (21)** (1967), 5—24.

[12] V. Volterra: *Theory of functionals and integral and integro-differential equations* (1959).

[13] Ф. Гантмахер: *Лекции по аналитической механике* (1966).

[14] A. Mercier: *Principes de mécanique analytique* (1955).