PUBLICATIONS DE L'INSTITUT MATHÉMATIQUE
Nouvelle série, tome 8 (22), 1968, p. 143—148.

UNE CLASSE D'ÉQUATIONS MATRICIELLES ET L'ÉQUATION FONCTIONNELLE $f^2=f$

Slaviša B. Prešić

(Présenté le 6 décembre 1967)

1. Soit S un ensemble non vide et f une application de S dans S. Il existe alors entre les équations

$$f(f(x))=f(x) \quad \text{et} \quad x=f(x)$$

la connexion caractéristique suivante.

Proposition 1. *Soit l'application f telle que l'on ait $f(f(x))=f(x)$ pour tout $x \in S$. Alors:*

1° *Si Π est un élément arbitraire de S, $x=f(\Pi)$ est une solution de l'équation $x=f(x)$ en x.*

2° *Si x est une solution de l'équation $x=f(x)$ en x, il existe dans S un élément Π tel que $x=f(\Pi)$.*

Cette assertion-là résulte immédiatement de

$$(\forall x)\,(f(f(x))=f(x)) \wedge (x=f(\Pi)) \;\Rightarrow\; x=f(x);$$

$$x=f(x) \;\Rightarrow\; (\exists y)\,(x=f(y)).$$

On peut s'exprimer aussi de la manière suivante:

En supposant la condition $f^2=f$ remplie, la solution générale de l'équation $x=f(x)$ est donnée par la formule

$$x=f(\Pi) \qquad (\Pi \in S).$$

Sous la condition $f^2=f$, appelons l'équation $x=f(x)$ reproductive (Löwenheim [1]).

Dans ce qui suit, nous allons citer quelques exemples des applications de la proposition précédente.

Nous allons établir tout d'abord une connexion entre les équations $x=f(x)$ et $x=g(x)$, avec une application $g: S \to S$.

Disons que les équations $x=f(x)$ et $x=g(x)$ sont *équivalentes* si les ensembles de leurs solutions sont égaux, c'est-à-dire si

$$x=f(x) \Leftrightarrow x=g(x)$$

pour tout $x \in S$.

Proposition 2. *Pour toute équation*

$$x = g(x) \qquad (g : S \to S)$$

qui admet au moins une solution, il existe au moins une équation reproductive $x = f(x)$ *équivalente à* $x = g(x)$.

Démonstration. Désignons par R l'ensemble de toutes les solutions de $x = g(x)$. On a, donc,

$$\emptyset \neq R \subseteq S \quad \text{et} \quad x \in R \Leftrightarrow x = g(x).$$

Soit h: $S \setminus R \to R$ une application arbitraire et définissons l'applications $f: S \to S$ comme il suit:

$$\begin{aligned} f(x) &= h(x), \quad \text{si} \quad x \in S \setminus R, \\ &= x, \qquad \text{si} \quad x \in R. \end{aligned}$$

On conclut immédiatement que l'on a

1° $f^2 = f$,

2° $x = f(x) \Leftrightarrow x = g(x)$.

La proposition démontrée donne l'idée de la possibilité de l'application des équations reproductives à la résolution des équations quelconques.

Les équations que nous allons traiter dans ce qui suit possèdent des propriétés supplémentaires; elle sont linéaries, booliennes. Les méthodes des solutions de ces classes d'équations sont semblables puisque pour chacune d'elle est valable la proposition prouvée, sous forme correspondante.

2. Soit donnée une matrice carrée A d'ordre n sur le corps commutatif F. Il existe alors une matrice carrée B telle que l'on a $ABA = A$, ce qui résulte immédiatement du fait suivant: Si r est le rang de la matrice A, il existent deux matrices réguliers P et Q telles que $A = PDQ$, la matrice D étant diagonale et avec r éléments égaux à 1 et tous les autres égaux à 0.

Evidemment, les équations en X

$$AX = 0, \qquad X = (I - BA)X$$

(I matrice unité) sont alors équivalentes.

D'autre part, la seconde équation est reproductive, puisque

$$(I - BA)^2 = I - BA$$

Donc, on a:

Proposition 3. *La solution générale de l'équation* $AX = 0$ *est donnée par la formule*

$$X = (I - BA)\Pi,$$

où Π *est une matrice carrée d'ordre* n *sur* F *arbitraire.*

C'est en profitant du résultat précédent que l'on a obtenu la méthode exposée dans [4], où la matrice B, satisfait aussi à la condition de *compatibilité* avec un certain groupe G. Dans le présent article le même résultat sera utilisé pour aboutir à la solution générale d'une équation matricielle.

3. Soit P et Q deux matrices carrées d'ordre n données et soient $\alpha_{ij}(0\leqslant i\leqslant p-1;\ 0\leqslant j\leqslant q-1)$ les scalaires donnés. Nous allons déterminer, sous certaines conditions, la solution générale de l'équation matricielle

$$\sum_{i=0}^{p-1}\sum_{j=0}^{q-1}\alpha_{ij}P^iXQ^j=0. \tag{1}$$

Désignons par

$$\mu(P)=x^p-\alpha_{p-1}x^{p-1}-\cdots-\alpha_0,$$
$$\mu(Q)=x^q-\beta_{q-1}x^{q-1}-\cdots-\beta_0$$

les polynômes minimaux des matrices P et Q, respectivement. En multipliant l'équation (1) par $P^\rho(0\leqslant\rho\leqslant p-1)$ de droite et par Q^σ $(0\leqslant\sigma\leqslant q-1)$ de gauche et profitant des égalités

$$P^p=\alpha_{p-1}P^{p-1}+\cdots+\alpha_0 I,$$
$$Q^q=\beta_{q-1}Q^{q-1}+\cdots+\beta_0 I,$$

on obtient un système linéaire $\mathcal{S}$ en P^iXQ^j, où $0\leqslant i\leqslant p-1$, $0\leqslant j\leqslant q-1$.

Soit, par example, $\mu(P)=x^2-x$, $\mu(Q)=x^2-x$, les matrices P et Q étant réelles et d'ordre n, et soit (2) l'équation

$$PX-XQ=0.$$

Le système $\mathcal{S}$ est alors

$$\begin{array}{rrrl}
PX & -XQ & =0 & P^0;\ Q^0\\
PX & & -PXQ=0 & P^1;\ Q^0\\
 & -XQ & +PXQ=0 & P^0;\ Q^1\\
 & & 0=0 & P^1;\ Q^1.
\end{array}$$

Désignons par $\bar{P}$ et $\bar{Q}$ les „*companion-matrices*" [3] des polynômes $\mu(P)$ et $\mu(Q)$ respectivement, c'est-à-dire

$$\bar{P}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix},\ \bar{Q}=\bar{P}.$$

La multiplication de Kronecker [2] étant désignée par $\times$. La matrice du système $\mathcal{S}$ est

$$I\times\bar{\bar{P}}-\bar{Q}\times I.$$

Considérons de nouveau le système $\mathcal{S}$ dans le cas général. C'est un système $P^0XQ^0,\ \ldots.\ P^{p-1}XQ^0,\ P^0XQ^1,\ldots,P^{p-1}XQ^1,\ldots,P^0XQ^{q-1},\ldots,P^{p-1}XQ^{q-1}$. Désignons par P^ρ; Q^σ, où $0\leqslant\rho\leqslant p-1$, $0\leqslant\sigma\leqslant q-1$, l'équation que l'on obtient de l'équation (1) en la multipliant par P^ρ de droite et par Q^σ de gauche.

Supposons que les équations dans le système $\mathcal{S}$ soient données dans l'ordre suivant

$$\begin{array}{llll}
P^0;\ Q^0, & P^1;\ Q^0, & \ldots, & P^{p-1};\ Q^0\\
P^0;\ Q^1, & P^1;\ Q^1, & \ldots, & P^{p-1};\ Q^1\\
\cdot & \cdot & \cdots & \cdot\\
P^0;\ Q^{q-1}, & P^1;\ Q^{q-1}, & \ldots, & P^{p-1};\ Q^{q-1}.
\end{array}$$

La matrice A du système $\mathcal{S}$ est alors

$$A=\sum_{i=0}^{p-1}\sum_{j=0}^{q-1}\alpha_{ij}\,\overline{Q}^{j}\times\overline{P}^{i}, \tag{2}$$

les matrices P et Q étant „companion-matrices" des polynômes $\mu(P)$ et $\mu(Q)$, c'est-à-dire

$$\overline{P}=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \alpha_0 & \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_{p-1} \end{pmatrix}, \qquad \overline{Q}=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \beta_0 & \beta_1 & \beta_2 & \cdots & \beta_{q-1} \end{pmatrix}$$

le symbôle X désignant la multiplication de Kronecker.

Remarque. On démontre la formule (2) par un calcul facile pour les équations de la forme

$$P^i X Q^j = 0.$$

Elle est aussi valable pour l'équation (1), étant donné que l'addition et la multiplication par scalaire conservent la validité de (2).

Étendons l'ensemble de toutes les matrices sur le corps commutatif considéré en introduisant les „matrices" possédant une colonne et pq lignes et dont les éléments sont des matrices d'ordre n. Appelons telles „matrices" — *matrices matricielles.* Introduisons ensuite le produit d'une matrice arbitraire d'ordre pq avec une matrice matricielle d'après la règle ligne-colonne (de la manière „habituelle"). Le résultat est aussi une matrice matricielle.

Par exemple, on a

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} L \\ M \\ N \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} M \\ L+N \\ L+M \end{pmatrix}$$

aves les matrices L, M, N arbitraires sur le corps commutatif F.

La matrice matricielle de la forme

$$\begin{vmatrix} \Pi \\ P\Pi \\ \vdots \\ P^{p-1}\Pi \\ \Pi Q \\ P\Pi Q \\ \vdots \\ P^{p-1}\Pi Q \\ \vdots \\ \Pi Q^{q-1} \\ P\Pi Q^{q-1} \\ \vdots \\ P^{p-1}\Pi Q^{q-1} \end{vmatrix},$$

où Π est une matrice quelconque d'ordre n, sera appelée *matrice exceptionnelle.* Disons que la matrice C d'ordre pq est *stable* si le produit de C et une matrice exceptionnelle est toujours une matrice exceptionnelle.

Exemple. La matrice A du système $\mathcal{S}$ est une matrice stable.

On établit immédiatement que la somme et le produit des matrices stables, de même que le produit d'un scalaire et une matrice stable, sont matrices stables.

Désignons par

$$\mu(A)=x^m+\gamma_{m-1}x^{m-1}+\cdots+\gamma_0$$

le polynôme minimal de la matrice A. Définissons la matrice B comme il suit:

1° Si $\gamma_0\neq 0$, alors $B=-\gamma_0^{-1}(A^{m-1}+\gamma_{m-1}A^{m-2}+\cdots+\gamma_1 I)$.

2° Si $\gamma_0=0$, $\gamma_1\neq 0$, alors $B=-\gamma_1^{-1}(A^{m-2}+\gamma_{m-1}A^{m-3}+\cdots+\gamma_2 I)$.

La matrice B satisfait aux conditions:

1° $ABA=A$.

2° B est une matrice stable.

En s'appuyant sur ce fait-là et sur la proposition 3 on obtient le théorème suivant:

Théorème. *La solution générale en X de l'équation*

$$\sum_{i=0}^{p-1}\sum_{j=0}^{q-1}\alpha_{ij}P^iXQ^j=0$$

est donnée par la formule

$$\begin{vmatrix} X \\ PX \\ \vdots \\ P^{p-1}X \\ XQ \\ PXQ \\ \vdots \\ P^{p-1}XQ \\ \vdots \\ XQ^{q-1} \\ PXQ^{q-1} \\ \vdots \\ P^{p-1}XQ^{q-1} \end{vmatrix} = (I-BA) \begin{vmatrix} \Pi \\ P\Pi \\ \vdots \\ P^{p-1}\Pi \\ \Pi Q \\ P\Pi Q \\ \vdots \\ P^{p-1}\Pi Q \\ \vdots \\ \Pi Q^{q-1} \\ P\Pi Q^{q-1} \\ \vdots \\ P^{p-1}\Pi Q^{q-1} \end{vmatrix}, \tag{3}$$

où Π est une matrice arbitraire d'ordre n sur le corps commutatif F sous l'hypothèse suivante:

$$\gamma_0\neq 0 \quad \text{ou} \quad \gamma_0=0,\quad \gamma_1\neq 0.$$

Corollaire. Si $\gamma_0\neq 0$, alors l'équation (1) n'admet que la solution triviale $X=O$.

Exemple. Pour l'équation $PX=QX$, avec $\mu(P)=x^2-x$, $\mu(Q)=x^2-x$, nous avons

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\quad \mu(A)=x^3-x,\quad B=A.$$

La formule (3) conduit à la solution générale de l'équation considérée sous la forme

$$X=\Pi-P\Pi-\Pi Q+2P\Pi Q$$

avec une matrice Π arbitraire.

3. L'équation fonctionnelle $f^2=f$, c'est-à-dire la proposition 1 peut être appliquée à la résolution des équations booliennes.

Nous citons ici un exemple pour illustrer ce point-là.

Soient $\cup$, $\cap$ les opérations de l'algèbre de Boole B, et soit $\mathcal{E}$ le système suivant d'équations en $x_1, x_2, \ldots, x_n$

$$\begin{aligned} x_1 &= x_1 \cap (x_2 \cup x_3 \cup \ldots \cup x_n) \\ x_2 &= x_2 \cap (x_3 \cup x_4 \cup \ldots \cup x_1) \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n &= x_n \cap (x_1 \cup x_2 \cup \ldots \cup x_{n-1}). \end{aligned}$$

En introdusant les désignations

$$X=(x_1, x_2, \ldots, x_n), \ F(X)=$$
$$=(x_1 \cap (x_2 \cup x_3 \cup \ldots \cup x_n), \ldots, x_n \cap (x_1 \cup x_2 \cup \ldots \cup x_{n-1}))$$

on remplace $\mathcal{E}$ par

$$X=F(X). \tag{4}$$

L'équation (4) est reproductive ce qui est aisé à vérifier, et par suite la solution générale du système $\mathcal{E}$ est donnée par

$$\begin{aligned} x_1 &= \xi_1 \cap (\xi_2 \cup \xi_3 \cup \ldots \cup \xi_n) \\ x_2 &= \xi_2 \cap (\xi_3 \cup \xi_4 \cup \ldots \cup \xi_1) \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n &= \xi_n \cap (\xi_1 \cup \xi_2 \cup \ldots \cup \xi_{n-1}) \end{aligned}$$

(ξ_i éléments arbitraires de B).

On a les résultats analogues dans le cas d'une treille distributive.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Löwenheim L. *Über die Auflösungen von Gleichungen im logischen Gebietskalkul*, Math. Ann. 68, 169—207, 1919.

[2] Mac Duffee C. C., *The theory of matrices*, New York, 1946.

[3] Perlis S., *Theory of matrices*, Addison Wesley, Cambridge, Mass. 1952.

[4] Prešić S. B., *Méthode de résolution d'une classe d'équations fonctionnelles linéaires* Publ. Elek. Fak. Univ. u Beogradu, 119, p. 21—28, 1963.