PUBLICATIONS DE L'INSTITUT MATHÉMATIQUE
Nouvelle série, tome 8 (22), 1969, p. 138–142.

AREOLÄRE EXPONENTIALFUNKTION ALS LÖSUNG EINER KLASSE DIFFERENTIALGLEICHUNGEN

Stanimir Fempl

Analog dem von Théodoresco eingeführten Begriffe „areoläres Polynom" [1]

$$P(z, \bar{z}) = \sum_{\nu=0}^{n} \varphi_\nu(z)\bar{z}^\nu \quad (z = x + yi,\ \bar{z} = x - yi),$$

wo $\varphi_\nu(z)$ $(\nu = 0, 1, 2, \ldots, n)$ beliebige analytische Funktionen darstellen, definiere ich die areoläre Exponentialfunktion

$$E(z, \bar{z}) \stackrel{\text{def}}{=} \varphi(z)e^{r\bar{z}}, \tag{1}$$

wo $r = \text{const.}$ und $\varphi(z)$ eine beliebige analytische Funktion ist. Diese Funktionenklasse besitzt eine interessante Eigenschaft. Nämlich, wenn die nichtanalytische Funktion

$$w(x, y) = u(x, y) + iv(x, y)$$

von der Gestalt

$$w = f(z) + \varphi(z)\, e^{\frac{\bar{z}}{2}} \qquad (f,\ \varphi \text{ analytisch})$$

ist, so erhält man eine analytische Funktion, indem man von w ihre Abweichung B von der Analytizität subtrahiert [2]. Dabei ist

$$B(w) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial w}{\partial x} + i\frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} + i\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right).$$

Für die reellen Funktionen u und v gelten folgende Voraussetzungen

1° sie sind eindeutig und endlich in den Punkten eines Bereiches D_z,

2° stetig in diesem Bereich,

3° sie besitzen endliche partielle Ableitungen von solcher Ordnung, die man speziell verlangt; jedenfalls sollen die ersten partiellen Ableitungen existieren (wenn notwendig ist, seien sie auch stetig).

Wenn man Punkte in denen die erwähnten Bedingungen nicht erfüllt sind als singulär betrachtet, so setze man voraus dass die Anzahl dieser Punkte abzählbar ist.

In Bezug auf die Verbindungen die man zwischen Funktionen u und v aufstellen kann, sollen

1° durch jeden regulären Punkt des Bereiches D_z zwei und nur zwei equiskalare Linien

$$u(x, y) = C_1, \qquad v(x, y) = C_2 \qquad (C_1,\ C_2 \text{ Konstanten})$$

gehen,

2° $\operatorname{grad} u \times \operatorname{grad} v \neq 0$.

In dieser Arbeit weise ich auf andere Eigenschaften der Funktionen (1) hin.

Führen wir vorerst einige Eigenschaften des Operators

$$B \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y}$$

an, die wir, in dem was folgt, benutzen werden:

$$B(w_1 + w_2) = B(w_1) + B(w_2)$$

$$B(w_1 w_2) = w_1 B(w_2) + w_2 B(w_1)$$

$$B[\varphi(z)] = 0 \qquad (\varphi(z) \text{ analytisch})$$

$$B(\bar{z}) = 2$$

$$B[f(w)] = f'(w) B(w).$$

Diese Eigenschaften kann man leicht verifizieren.

Es wird noch der Begriff der n^{ten} Abweichung von der Analytizität benutzt:

$$B_u(w) \stackrel{\text{def}}{=} \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y}\right) B_{n-1}(w) \equiv \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y}\right)^{(n)} B(w).$$

Dabei gilt

$$B_n\left[\sum_{\nu=1}^{m} w_\nu(x, y)\right] = \sum_{\nu=1}^{m} B_n[w_\nu(x, y)]$$

$$B_n[f(z)\, w(x, y)] = f(z)\, B_n[w(x, y)] \qquad (f(z) \text{ analytisch})$$

$$B_n[f(z)] = 0.$$

Auch diese Eigenschaften kann man leicht verifizieren.

Ich beweise folgenden

Satz. *Die allgemeine Lösung der partiellen Differentialgleichung*

$$B_n(w) + a_1 B_{n-1}(w) + \cdots + a_{n-1} B_1(w) + a_n w = 0 \qquad (a_\nu = \text{const.},\ B_1 = B) \tag{2}$$

hat die Gestalt

$$w = \sum_{\nu=1}^{n} E_\nu(z, \bar{z}) = \sum_{\nu=1}^{n} \varphi_\nu(z)\, e^{\frac{r_\nu}{2} \bar{z}}, \tag{3}$$

wo φ_ν $(\nu = 1, \ldots, n)$ *beliebige analytische Funktionen darstellen, während* r_ν $(\nu = 1, \ldots, n)$ *die Wurzeln der algebraischen Gleichung*

$$\xi^n + a_1 \xi^{n-1} + \cdots + a_{n-1} \xi + a_u = 0 \tag{4}$$

sind.

Man setze zuerst voraus, dass die Wurzeln $r_\nu (\nu = 1, \ldots, n)$ sämtlich verschieden sind.

Die letzte Gleichung ist ein Analogon der charakteristischen Gleichung einer linearen homogenen Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten.

Die Gleichung (2) zerfällt in ein System von zwei partiellen Differentialgleichungen n^{ter} Ordnung mit zwei unbekannten Funktionen.

Beweis des Satzes. Durch Anwendung der erwähnten Eigenschaften der Operatoren B und B_n, folgt

$$B_1(w) = \sum_{\nu=1}^{n} r_\nu \varphi_\nu(z) e^{\frac{r_\nu}{2}\bar{z}}$$

$$B_2(w) = \sum_{\nu=1}^{n} r_\nu^2 \varphi_\nu(z) e^{\frac{r_\nu}{2}\bar{z}}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$B_{n-1}(w) = \sum_{\nu=1}^{n} r_\nu^{n-1} \varphi_\nu(z) e^{\frac{r_\nu}{2}\bar{z}}$$

$$B_n(w) = \sum_{\nu=1}^{n} r_\nu^n \varphi_\nu(z) e^{\frac{r_\nu}{2}\bar{z}}.$$

Nach Multiplikation dieser Gleichungen resp. mit $a_{n-1}, a_{n-2}, \ldots, a_1, a_0 \, (a_0 = 1)$ und Addition erhält man

$$B_n + a_1 B_{n-1} + \cdots + a_{\nu-1} B_1 + a_n w =$$

$$= \sum_{\nu=1}^{n} a_n \varphi_\nu(z) e^{\frac{r_\nu}{2}\bar{z}} + \sum_{\nu=1}^{n} a_{n-1} r_\nu \varphi_\nu(z) e^{\frac{r_\nu}{2}\bar{z}} + \cdots + \sum_{\nu=1}^{n} a_0 r_\nu^n \varphi_\nu(z) e^{\frac{r_\nu}{2}\bar{z}}.$$

Wenn man die Glieder auf der rechten Seite umordnet, so erhält diese rechte Seite die Form

$$\varphi_1(z) e^{\frac{r_1}{2}\bar{z}} \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu r_1^{n-\nu} + \varphi_2(z) e^{\frac{r_2}{2}\bar{z}} \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu r_2^{n-\nu} + \cdots + \varphi_n(z) e^{\frac{r_n}{2}\bar{z}} \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu r_n^{n-\nu}.$$

Da die Grössen $r_1, \ldots, r_n$ die Gleichung (4) befriedigen, sind sämtliche Summenwerte gleich 0. Deshalb hat die rechte Seite der letzten Gleichung den Wert 0.

Hiermit ist der Satz bewiesen.

Beispielsweise löse man das System partieller Differentialgleichungen

$$(5) \qquad \begin{aligned} &\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + k^2 u = 0 \\ &\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + k^2 v = 0 \end{aligned}$$

wo u und v unbekannte Funktionen sind, und k eine reelle Konstante darstellt.

Die zweite Gleichung multipliziert mit i und addiert mit der ersten Gleichung gibt, wenn man noch $u + vi = w$ setzt,

$$B_2(w) + k^2 w = 0.$$

Die Wurzeln der charakteristichen Gleichung sind für diesen Fall $r_1 = ki$, $r_2 = -ki$, so dass die allgemeine Lösung lautet

$$w = \varphi_1(z)\, e^{\frac{ki}{2}\bar{z}} + \varphi_2(z)\, e^{-\frac{ki}{2}\bar{z}}.$$

Wenn noch die reelle und imaginäre Teile der Funktionen $\varphi_\nu(z)\,(\nu = 1, 2)$ mit α_ν und $\beta_\nu\,(\nu = 1, 2)$ bezeichnet, so folgt

$$u(x, y) = \left[\alpha_1(x, y)\, e^{\frac{ky}{2}} + \alpha_2(x, y)\, e^{-\frac{ky}{2}}\right] \cos\frac{kx}{2} - \left[\beta_1(x, y)\, e^{\frac{ky}{2}} - \beta_2(x, y)\, e^{-\frac{ky}{2}}\right] \sin\frac{kx}{2},$$

$$v(x, y) = \left[\alpha_1(x, y)\, e^{\frac{ky}{2}} - \alpha_2(x, y)\, e^{-\frac{ky}{2}}\right] \sin\frac{kx}{2} + \left[\beta_1(x, y)\, e^{\frac{ky}{2}} + \beta_2(x, y)\, e^{-\frac{ky}{2}}\right] \cos\frac{kx}{2}.$$

Da die Funktionen α_ν und $\beta_\nu\,(\nu = 1, 2)$ die Cauchy-Riemann Bedingungen befriedigen müssen, so stellen diese Lösungen reguläre Lösungen [3] des Systems (5) dar.

Befinden sich unter den Wurzeln der charakteristischen Gleichung (4) auch m gleiche Wurzeln, sagen wir $r_1 = r_2 = \cdots = r_m = r$, so wird der entsprechende Teil in der allgemeinen Lösung

$$[\varphi_1(z) + \bar{z}\,\varphi_2(z) + \cdots + \bar{z}^{m-1}\,\varphi_m(z)]\, e^{\frac{r}{2}\bar{z}} \tag{6}$$

lauten. Der Ausdruck in der eckigen Klammer ist ein areoläres Polynom $(m-1)^{\text{ten}}$ Grades.

Um diese Behauptung zu bestätigen, genügt eine Gleichung zweiten Grades ins Auge zu fassen, nämlich

$$B_2(w) + aB_1(w) + bw = 0.$$

Es seien die Wurzeln der charakteristischen Gleichung $r_1 = r_2 = r$. Das allgemeine Integral, nach der obigen Behauptung, wäre

$$w = [\varphi_1(z) + \bar{z}\,\varphi_2(z)]\, e^{\frac{r}{2}\bar{z}}.$$

Tatsächlich, wegen

$$B_1(w) = e^{\frac{r}{2}\bar{z}}\,(r\varphi_1 + r\bar{z}\varphi_2 + 2\varphi_2),$$

$$B_2(w) = e^{\frac{r}{2}\bar{z}}\,(r^2\varphi_1 + r^2\bar{z}\varphi_2 + 4r\varphi_2),$$

ist

$$B_2(w) + aB_1(w) + bw = [(r^2 + ar + b)(\varphi_1 + \bar{z}\varphi_2) + 2(2r + a)\varphi_2]\, e^{\frac{r}{2}\bar{z}}$$

Der erste Faktor des ersten Gliedes in der eckigen Klammer hat den Wert Null, und wegen der Gleichheit beider Wurzeln ist $r=-a/2$, so dass die rechte Seite den Wert O hat.

Aus den erwähnten ersieht man den Weg der zum allgemeinen Fall m gleicher Wurzeln führt. Wenn man nämlich die Gleichung (2) mit einer gewöhnlichen Differentialgleichung

$$y^{(n)}+a_1 y^{(n-1)}+\cdots+a_n y=0 \tag{7}$$

vergleicht, sowie die Lösung (3) mit der Lösung der Gleichung (7) d. h.

$$y=\sum_{\nu-1}^{n} C_\nu e^{r_\nu x} \tag{8}$$

so ist folgendes zu bemerken. Wenn an Stelle von y. $y^{(\nu)}$, C_ν und x in den Gleichungen (7) und (8) die Grössen resp. w, $B_\nu(w)$, $\varphi_\nu(z)$ und $\bar{z}/2$ auftreten, so erhält man die Lösung (3) der Gleichung (2). Zwischen diesen Grössen besteht ein Parallelismus. Auf Grund dessen, im Falle m gleicher Wurzeln der charakteristischen Gleichung, da der entsprechende Teil der Lösung (8) die Form

$$(C_1+C_2 x+\cdots+C_m x^{m-1})\,e^{rx}$$

hat, gelangt man zum Ausdruck

$$\left[\varphi_1(z)+\varphi_2(z)\frac{\bar{z}}{2}+\cdots+\varphi_m(z)\frac{\bar{z}^{m-1}}{2^{m-1}}\right]e^{\frac{r}{2}\bar{z}}$$

als dem entsprechenden Teil der Lösung (3) der Diffe·entialgleichung (2). Dies ist aber gleichbedeutend mit dem Ausdruck (6).

LITERATUR

[1] N. Théodoresco, *La dérivée aréolaire. Annales roumaines de mathématiques*, Cah. 3. Bucarest 1936.

[2] S. Fempl, *O jednoj klasi neanalitičkih funkcija*. Matematički vesnik 3 (18). Sv. 1. 1966, 52—54.

[3] И. Н. Векуа *Системи дифференциалных уравнений первого порядка эллиптического типа и граничные задачи с применением к теории оболочек*, Математический сборник 31. Москва 1952. Стр. 217—314.