PUBLICATIONS DE L'INSTITUT MATHEMATIQUE
Nouvelle série, tome 8 (22), 1968, p. 130—137.

PSEUDO-ZWEIDIMENSIONALE UND PSEUDO-ACHSENSYMMETRISCHE STRÖMUNGEN INKOMPRESSIBLER FLÜSSIGKEIT MIT WIRBELPOTENTIAL

Mane Šašić

(Vorgelegt am 7 Juni 1967)

1. Eigenschaften der Strömung mit Wirbelpotential.

Die Untersuchung der Strömung der inkompressibler Flüssigkeit wird auf die Bestimmung des Druckes p und der Projektionen v_x, v_y, v_z der Geschwindigkeit $\vec{v}$ aus der Euler-sche oder Navier-Stokes-sche Gle'chung und der Kontinuitätsgleichung zurückgeführt, abhängig davon, ob man die Strömung einer nichtviskosen oder viskosen Flüssigkeit betrachtet. Die Viskosität ist eingentlich die Eigenschaft jeder Flüssigkeit und die Vorassetzung über die Nichtviskosität, wenn es sich um Strömung handelt, ist nur ausnahmsweise gerechtfertigt. Es ist bekannt, dass sich bei Strömung einer inkompressibler Flüssigkeit die Navier-Stokes-sche Gleichung von der Euler-sche um den Glied $\Delta \vec{v} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{v} - \operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{v}$ unterscheidet, welcher für den Fall der Strömung mit den Wirbelpotential gleich Null ist, denn es ist

$$\operatorname{div} \vec{v} = 0, \qquad \operatorname{rot} \vec{v} = \operatorname{grad} (-\Phi), \tag{1}$$

wobei Φ den Wirbelpotential bedutet. Die Viskosität erscheint also weder in den kinematischen noch in den dynamischen Gleichungen, und es scheint, dass die Strömungen mit Wirbelpotential dieselben Gleichungen beschreiben, abgesehen davon ob die Voraussetzung über die Nichtviskosität der Flüssigkeit gemacht ist oder nicht. Selbstverständlich, die Grenzbedingungen unterscheiden sich und ihre Befriedigung ist einer der schwersten Probleme der Fluidmechanik.

Es lässt sich bemerken, dass das Glied $\Delta \vec{v}$ gleich Null ist auch in dem Fall wenn Geschwindigkeit ein Potential hat, und die Flüssigkeit inkompressibl ist, so dass es auf den ersten Blick aussieht, dass sich die potentialen Strömungen gleichzeitig auf die Strömungen der nichtviskosen wie auch der viskosen Flüssigkeiten beziehen. Unterdessen ist das Potential der Geschwindigkeit eines nichtviskosen Fluidum durch die Laplace-sche Gleichung, wie auch durch die Bedingung, dass die normalen Projektionen der Geschwindigkeit von Fluidteilchen und entsprechenden Pünkten des Körpers auf der Oberfläche des Körpers gegenseitig gleich sind, vollkommen bestimmt. Demgegenüber, kleben sich die Teilchen des viskosen Fluidum an die festen

Flächen und so müssen die normalen und tangenten Projektionen der Geschwindigkeit zwischen den Fluidteilchen und den entsprechenden Pünkten des Körpers gleich sein. Es ist bekannt, das die Laplace-sche Gleichung allgemein genommen keine solche Lösung hat die diese beiden unabhängige Grenzbedingungen befriedigen könnte. Jedoch kann man auf diesem Grund nicht im voraus behaupten, dass auch die Strömungen mit dem Wirbelpotential nicht möglich sind. Bei der Strömung mit dem Wirbelpotential bezieht sich die harmonische Funktion auf den Wirbel und nicht auf die Strömungsgeschwindigkeit. Die Grenzbedingungen sind nicht mehr so scharf, und der Wirbel auf der Oberfläche des Körpers muss nicht gleich Null sein. Im Gegenteil, die gelösten Beispiele zeigen, dass das stärkste Wirbeln des Fluidums in der Nähe des Körpers ist.

Wenn man das Problem nur von der kinematischen Seite betrachtet, ist es offenbar, dass einem Laplace-schen Wirbelfeld unzählige Geschwindigkeitsfelde entsprechen, die sich gegenseitig durch irgendeine potentiale Strömung unterscheiden. Wenn $\vec{v}_1$ die Geschwindigkeit irgendeiner potentialen Strömung ist, kann man sie der Geschwindigkeit $\vec{v}$ hinzufügen und die Gleichungen (1) werden nicht verändert. Diese Eigenschaft der kinematischen Gleichungen kann man für gewisse Vereinfachung der Probleme ausnützen. Der Arbeit [1] ist es nämlich aufgewiesen, dass die Gleichungen (1) mit den Bedingungen der monogenen Quaternionfunktion $W = \Phi + \vec{v}$ übereinstimmen und dass man die Ergänzungsgeschwindigkeit $\vec{v}_1$ bzw. harmonische Funktion, welche sie bestimmt, so auswählen kann, dass eine von den Projektionen der resultierenden Geschwindigkeit $\vec{v}$ gleich Null wird. Hier wird die Bedingung, welche die harmonische Funktion in diesem Fall erfüllen muss, nicht analysiert, weil dies in der kurz vorhin angeführten Arbeit getan wurde, aber es wird erwähnt, dass man dann zu einer reduzierter Quaternionfunktion kommt, d. h. zu einer Quaternionfunktion, wessen Vektorteil nur zwei Projektionen hat, die von aller drei Veränderlichen abhängig sind. Wenn man z. B. die harmonische Funktion, welche die Ergänzungsgeschwindigkeit bestimmt $\vec{v}_1$, so bestimmt, dass die Projektion v_z der resultierenden Geschwindigkeit $\vec{v}$ gleich Null ist, dann hat die reduzierte Quaternionfunktion die folgende Form:

$$W = \Phi + c_x v_x + c_y v_y, \tag{2}$$

wobei 1, c_x, c_y die Quaternioneinheiten darstellen und für welche die Regel der Quaternion-sche Multiplikation gelten. Da v_x und v_y von allen drei Veränderlichen abhängig sind so kann die reduzierte Quaternionfunktion (2) eine gewisse pseudo-zweidimensionale Strömung I Klasse darstellen. Diese Strömungen sind in der Arbeit [2] analysiert und in dieser ist eine ganze Reihe von Beispielen gefunden, welche alle aufgestellten Bedingungen befriedigen.

2. Pseudo-zweidimensionale Strömung II Klasse mit Wirbelpotential.

Das sind die Strömungen, bei welchen die Geschwindigkeit alle drei Projektionen hat, sie sind aber nur von zwei unabhänging Veränderlichen abhänging. Mit

$$v_x = v_x(x, y), \qquad v_y = v_y(x, y), \qquad v_z = v_z(x, y) \tag{3}$$

sind die Geschwindigkeitsprojektionen der pseudo-zweidimensioneler Strömung II Klasse mit dem Wirbelpotential bezeichnet. In diesem Fall die Monogenitäts Bedingungen (1) der Quaternionfunktion

$$W=\Phi+c_x v_x+c_y v_y+c_z v_z$$

zu den folgenden Gleichungen führen:

$$(4)\qquad \begin{aligned} &\frac{\partial \Phi}{\partial x}+\frac{\partial v_z}{\partial y}=0, \qquad \frac{\partial \Phi}{\partial y}-\frac{\partial v_z}{\partial x}=0,\\ &\frac{\partial v_y}{\partial x}-\frac{\partial v_x}{\partial y}+\frac{\partial \Phi}{\partial z}=0, \qquad \frac{\partial v_x}{\partial x}+\frac{\partial v_y}{\partial y}=0. \end{aligned}$$

Die letzte Gleichung (4) ist durch die Strömungsfunktion $\psi(x, y)$ mittels der Verbindung

$$(5)\qquad v_x=\frac{\partial \psi}{\partial y}, \qquad v_y=-\frac{\partial \psi}{\partial x}$$

befriedigt und die dritte wird auf $\frac{\partial \Phi}{\partial z}=\Delta\psi$ zurückgeführt, woraus folgt

$$(6)\qquad \Phi=Cz+f(x, y),$$

da die ersten zwei Gleichungen (4) $\Delta\psi=C$ erfordern, bzw.

$$(7)\qquad \psi=\psi_1(x, y)+\frac{C}{4}(x^2+y^2).$$

Hier ist $\psi_1(x, y)$ die harmonische Funktion, und C die reale Konstante. Wenn das Wirbelfeld zweidimensional ist $(2\omega_z=0)$, ist die Konstante C gleich Null und die Geschwindigkeit hat den Potential in der Ebene Oxy.

Wie das Wirbelpotential die Laplace-sche Gleichung befriedigt, so ist es auch $f(x, y)$ eine harmonische Funktion. Deshalb, ist das Geschwindigkeitsfeld der pseudo-zweidimensionaler Strömung II Klasse, kinematisch betrachtet, durch zwei harmonische Funktionen $\psi_1(x, y)$ und $f(x, y)$ bestimmt. Die Projektionen v_x und v_y ermittelt man aus (5) und (7), und die Projektion v_z durch das Integrieren der ersten zwei Gleichungen (4), die sich mittels der Funktion $f(x, y)$ aufschreiben können wie

$$(8)\qquad \frac{\partial v_z}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial y}, \qquad \frac{\partial v_z}{\partial y}=-\frac{\partial f}{\partial x}.$$

Unterdessen, muss das Geschwindigkeitsfeld auch die dynamischen Gleichungen befriedigen, welche man für den Fall einer pseudozweidimensionalen Strömung II Klasse mit dem Wirbelpotential in der folgender Form aufschreiben kann:

$$(9)\qquad \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{p}{\rho}-U\right)&=-\frac{\partial \psi}{\partial y}\,\frac{\partial^2 \psi}{\partial x\,\partial y}+\frac{\partial \psi}{\partial x}\,\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2},\\ \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{p}{\rho}-U\right)&=\frac{\partial \psi}{\partial y}\,\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}-\frac{\partial \psi}{\partial x}\,\frac{\partial^2 \psi}{\partial x\,\partial y},\\ \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{p}{\rho}-U\right)&=-\frac{\partial \psi}{\partial y}\,\frac{\partial v_z}{\partial x}+\frac{\partial \psi}{\partial x}\,\frac{\partial v_z}{\partial y}. \end{aligned}$$

In diese Gleichungen ist U das Potential der Aussenkräfte. Die rechten Seiten der dynamischen Gleichungen sind von z nicht abhängig so dass auch die linken Seiten die Funktionen nur von x und y sein müssen. Deshalb ist auch

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{p}{\rho}-U\right)=F_1(x, y),$$

bzw.

$$\frac{p}{\rho}-U=C_1 z+F(x, y), \tag{10}$$

denn aus den ersten zwei Gleichungen (9) $F_1(x, y)=C_1$ folgt. Die Funktion $F(x, y)$ wird, durch das Integrieren der ersten zwei Gleichungen (9) erhalten, in denen die rechten Seiten die bekannten Funktionen sind, wenn man vorläufig das $\psi(x, y)$ bestimmt. Die Konstante C_1 kann gleich Null sein und dann hängt der generalisierte Druck nicht von z ab. Im allgemeinen Fall ist $C_1 \neq 0$ und die dritte Gleichung (9) kann man, nach Benützung (7) und (8) in der folgenden Form schreiben:

$$\left(\frac{\partial \psi_1}{\partial x}+\frac{C}{2} x\right)\frac{\partial f}{\partial x}+\left(\frac{\partial \psi_1}{\partial y}+\frac{C}{2} y\right)\frac{\partial f}{\partial y}=-C_1. \tag{11}$$

Hieraus sieht man, dass $f(x, y)$ nicht eine beliebige harmonische Funktion ist. Sie muss auch die lineare partiale Gleichung (11) befriedigen. Im speziellen Fall kann das Wirbelfeld zweidimensional sein, und dann ist $\Delta\psi=0$. Wenn auch der generalisierte Druck nicht von z abhängt, dann ist auch $C_1=0$ und die dritte Gleichung (9) führt zum Ausdruck

$$\frac{D(\psi, v_z)}{D(x, y)}=0 \quad \text{bzw.} \quad v_z=v_z(\psi).$$

Wie v_z eine harmonische Funktion darstellt, so kommt man aus der vorheriger Gleichung, durch die Benützung der Bedingung $\Delta\psi=0$ zu der Abhängigkeit

$$v_z=k\psi, \tag{12}$$

wobei k eine reale Konstante ist. Das Potential Φ wird in diesen Fall durch das Integrieren der Gleichungen (4) erhalten, welche wegen (12) in

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x}=-\frac{dv_z}{d\psi}\frac{\partial \psi}{\partial y}=-kv_x,$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y}=\frac{dv_z}{d\psi}\frac{\partial \psi}{\partial x}=-kv_y,$$

übergehen. Dementsprechend diejenigen monogenen quaternionischen Funktionen, wessen skalarischer Teil die Gleichungen (5), (12) und (13) befriedigt für den Fall, dass ψ eine harmonische Funktion ist, stellt eine gewisse pseudo-zweidimensionale Strömung II Klasse dar. Als Beispiel nimmt man die harmonische Funktion

$$\psi=-\frac{\Gamma}{2\pi}\ln r+C, \quad (r^2=x^2+y^2),$$

welche im Fall potentialer Strömung, die Strömungsfunktion im Feld des vereinsamten Wirbel darstellt. Nach (12) ist

$$v_z = -\frac{k\Gamma}{2\pi}\ln r + kC.$$

Die Konstanten Γ und C werden aus den Grenzbedingungen $v_z = v_0$ für $r = a$ und $v_z = 0$ für $r = b$ bestimmt. Es geht hervor,

$$\frac{k\Gamma}{2\pi} = \frac{v_0}{\ln(b/a)}, \qquad kC = \frac{v_0 \ln b}{\ln(b/a)}.$$

Also, es ist

$$v_z = \frac{\ln b - \ln r}{\ln b - \ln a} v_0 .$$

Die Projektionen v_x und v_y werden durch den Zusammenhang $v_x = -v_\theta \sin\theta$ und $v_y = v_\theta \cos\theta$ gefunden, wobei v_θ die Umfangsgeschwindigkeit darstellt und den Wert

$$v_\theta = -\frac{\partial\psi}{\partial r} = \frac{v_0}{k\ln(b/a)}\,\frac{1}{r}$$

hat. Die Gleichungen (13) geben das Wirbelpotential in der Form

$$\Phi(x,\ y) = \frac{v_0}{\ln(b/a)}\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{y} + \text{const.}$$

Dieses Beispiel bestimmt das Geschwindigkeitsfeld mit dem Wirbelpotential zwischen zwei koaxialen kreisformigen Zylindern, wessen Achsen sich mit der z-Achse decken. Der innere Zylinder, mit dem Halbmesser a, gleitet in Richtung der z-Achse mit der konstanten Geschwindigkeit v_0 und rotiert mit der konstanten Winkelgeschwindigkeit ω_1, solange sich der aussere Zylinder, mit dem Halbmesser b, mit der konstanten Winkelgeschwindigkeit ω_2 dreht.

3. Pseudo-Achsensymmetrische Strömungen II Klasse mit dem Wirbelpotential.

Bei diesen Strömungen sind die Geschwindigkeitsprojektionen von den Veränderlichen r und z, d. h.

$$v_r = v_r(r,\ z), \qquad v_\theta = v_\theta(r,\ z), \qquad v_z = v_z(r,\ z), \tag{14}$$

abhängig. Die monogenen Bedingungen (1) der Quaternionfunktion $W = \Phi + \vec{v}$ die durch den Koordinaten r und z ausgedrückt sind, lauten:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial\Phi}{\partial r} - \frac{1}{r}\frac{\partial(rv_\theta)}{\partial z} = 0, \qquad \frac{1}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial\theta} + \frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial r} = 0, \\ &\frac{\partial\Phi}{\partial z} + \frac{1}{r}\frac{\partial(rv_\theta)}{\partial r} = 0, \qquad \frac{\partial}{\partial r}(rv_r) + \frac{\partial}{\partial z}(rv_z) = 0. \end{aligned} \tag{15}$$

Die letzte Gleichung (15) ist mit der Strömungfunktion $\psi(r,\ z)$ befriedigt,

$$v_r = \frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial z}, \qquad v_z = -\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r}, \tag{16}$$

solange sich die ersten drei in der folgender Form darstellen können:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial r}=\frac{1}{r}\frac{\partial (rv_\theta)}{\partial z}, \qquad \frac{\partial \Phi}{\partial \theta}=-D_1^2\psi, \qquad \frac{\partial \Phi}{\partial z}=-\frac{1}{r}\frac{\partial (rv_\theta)}{\partial r}, \tag{17}$$

worin $D_1^2=\frac{\partial^2}{\partial r^2}-\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}$ Operator ist. Aus den Gleichungen (17) folgen zwei Bedingungen ihrer Kompatibilität

$$D_1^2(rv_\theta)=0, \qquad D_1^2\psi=\text{Const.} \tag{18}$$

Die dynamischen Gleichungen der pseudo-achsensymmetrischen Strömung II Klasse mit dem Wirbelpotential kann man wegen der Bedingungen (18) durch die Strömungsfunktion $\psi(r, z)$ als

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{p}{\rho}-U\right)&=\frac{1}{r}\frac{D\left(\psi, \frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)}{D(r, z)}+\frac{1}{r}v_\theta^2,\\
\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{p}{\rho}-U\right)&=\frac{1}{r}\frac{D(\psi, rv_\theta)}{D(r, z)},\\
\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{p}{\rho}-U\right)&=-\frac{1}{r}\frac{D\left(\psi, \frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)}{D(r, z)},
\end{aligned} \tag{19}$$

darstellen.

Weil die rechten Seiten der Gleichungen (19) nur von r und z abhängig, bekommt man aus der zweiten Gleichung

$$\frac{p}{\rho}-U=F_1(r, z)\theta+F(r, z).$$

Die Uniformheit des Druckes erfordert $F_1(r, z)=0$ so ist endgültig

$$\frac{p}{\rho}-U=F(r, z).$$

Der letzten Abhängigkeit halber, ergibt die zweite Gleichung (19)

$$rv_\theta=F_2(\psi), \tag{20}$$

und die Bedingung der Kompatibil.ät der ersten und dritten Gleichung (19) lautet jetzt:

$$\frac{D\left(\psi, r^{-2}D_1^2\psi\right)}{D(r, z)}+\frac{2}{r}v_\theta\frac{\partial v_\theta}{\partial z}=0,$$

woraus man, nach Benützung der Bedingungen (18) und des Integrierens

$$rv_0=\sqrt{r^2 g(r)-2C}, \tag{21}$$

erhält. Wenn man die Abhängigkeiten (20) und (21) vergleicht, sieht man, dass $r^2 g(r)$ eine Funktion von ψ sein muss, bzw. ψ eine Funktion von r. Man kann also feststellen, dass es

$$rv_\theta=h(r), \tag{22}$$

ist. Wie ψ nur von r abhängig ist, so geht die zweite Gleichung (18) in eine gewöhnliche Differentialgleichung über,

$$\frac{d^2\psi}{dr^2}-\frac{1}{r}\frac{d\psi}{dr}=C,$$

deren Lösung

$$\psi=\frac{C}{2}r^2\ln r+\frac{1}{2}\left(C_1-\frac{C}{2}\right)r^2+C_2 \tag{23}$$

ist, worin C_1 und C_2 die integralsche Konstanten sind. Man kann annehmen, dass $C_2=0$, da die Funktion ψ immer mit der Genauigkeit bis zur additiven Konstante bestimmt ist. Mit $C_2=0$, aus (23) werden die Geschwindigkeits-projektionen erhalten

$$v_r=0, \qquad v_z=-C\ln r-C_1,$$

in welchen sich die Konstanten C und C_1 aus den Grenzbedingungen $v_z=v_0$ für $r=a$ und $v_z=0$ für $r=b$ bestimmen können. Es geht hervor, dass die

$$C=\frac{v_0}{\ln(b/a)}, \qquad C_1=-v_0\frac{\ln b}{\ln(b/a)}$$

sind, und dann

$$v_z=v_0\frac{\ln(b/r)}{\ln(b/a)}$$

ist. Wenn der Ausdruck (22) in die erste Bedingung der Kompatibilität (18) eingetragen wird, erhält man die Differentialgleichung

$$h''(r)-\frac{1}{r}h'(r)=0,$$

wessen Lösung

$$h(r)=rv_\theta=\frac{1}{2}k_1r^2+k$$

ist. Die integralsche Konstanten k_1 und k kann man aus den folgenden Grenzbedingungen bestimmen: $v_\theta=a\,\omega_1$ für $r=a$ und $v_\theta=b\,\omega_2$ für $r=b$. Man bekommt

$$\frac{1}{2}k_1=\frac{1}{b^2-a^2}(b^2\omega_2-a^2\omega_1), \qquad k=\frac{a^2b^2}{b^2-a^2}(\omega_1-\omega_2),$$

und

$$v_\theta=\frac{1}{b^2-a^2}\left[(b^2\omega_2-a^2\omega_1)\,r+a^2b^2(\omega_1-\omega_2)\frac{1}{r}\right]$$

ist. Die Wirbelprojektionen haben in diesem Fall die Werte:

$$2\,\omega_r=0, \qquad 2\,\omega_\theta=\frac{v_0}{\ln(b/a)}\frac{1}{r}, \qquad 2\,\omega_z=\frac{2}{b^2-a^2}(b^2\omega_2-a^2\omega_1).$$

Auch dieser Beispiel bestimmt das Geschwindigkeitsfeld und das Potentialfeld des Wirbels zwischen zwei koaxialen Zylindern mit den Achsen in der z-Achse Richtung, wessen Halbmesser a und b sind. Wenn sich der innere Zylinder nicht in der Richtung z-Achse bewegt ($v_0 = 0$) bekommt man die klassische Lösung des Geschwindigkeitsfeldes zwischen den Zylindern, die sich mit den verschiedenen und konstanten Winkelgeschwindigkeiten drehen. Unterdessen hat dann der Wirbel nur eine Projektion ($2\,\omega_z$) und ist im ganzen Strömungsfeld konstant.

SCHRIFTTUM

[1] K. Voronjec, *Primena monogenih kvaterniona u Mehanici fluida*, Glas SAN, CCXVII, № 5 (1961).

[2] K. Voronjec, *Sur l'application de quaternions monogènes dans l'écoulement à potentiels de tourbillons*, Publications de l'Institut Mathématique t. 7 (21), 1967.