PUBLICATIONS DE L'INSTITUT MATHÉMATIQUE
Nouvelle série, tome 8 (22), 1968, p. 124—129.

SUR UNE EQUATION FONCTIONNELLE DE k-tième ORDRE

P. M. Vasić et *R. R. Janić*

(Présenté le 7 avril 1967)

Dans l'article [1] le théorème suivant est démontré:

Théorème 1. *La solution générale de l'équation fonctionnelle*

$$
\begin{aligned}
(1)\qquad & f(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n)\, f(x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots, x_{2n}) \\
&= f(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_{n+1})\, f(x_n, x_{n+2}, \ldots, x_{2n}) \\
&\quad + f(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_{n+2})\, f(x_{n+1}, x_n, x_{n+3}, \ldots, x_{2n}) \\
&\quad + \cdots \\
&\quad + f(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_{2n})\, f(x_{n+1}, \ldots, x_{2n-1}, x_n),
\end{aligned}
$$

où la fonction inconnue f est une fonction complexe des variables complexes, est donnée par

$$
(2)\qquad f(u_1, u_2, \ldots, u_n) = \Delta\,(H_1(u_1), H_2(u_2), \ldots, H_n(u_n))
= \begin{vmatrix} H_1(u_1) & H_1(u_2) & \ldots & H_1(u_n) \\ H_2(u_1) & H_2(u_2) & & H_2(u_n) \\ \vdots & & & \\ H_n(u_1) & H_n(u_2) & & H_n(u_n) \end{vmatrix},
$$

où H_i $(i=1, 2, \ldots, n)$ sont des fonctions arbitraires complexes des variables complexes.

Soit $\theta_{i,j}$ un opérateur que fait le changement des arguments à i-ième et j-ième place dans la fonction F, c'est-à-dire

$$
\begin{aligned}
(3)\qquad & \theta_{i,j} F(x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{j-1}, x_j, x_{j+1}, \ldots, x_{n-1}, x_n) \\
&= F(x_1\ x_2, \ldots, x_{i-1}, x_j, x_{i+1}, \ldots, x_{j-1}, x_i, x_{j+1}, \ldots, x_{n-1}, x_n).
\end{aligned}
$$

Considérons l'équation fonctionnelle

$$
\begin{aligned}
(4)\qquad & (k-1)\, F(x_1, x_2, \ldots, x_{kn}) \\
&= \sum_{r=n+1}^{kn} \theta_{n,r} F(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n, x_{n+1}, \ldots, x_{kn}),
\end{aligned}
$$

avec

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_{kn}) = \prod_{i=0}^{k-1} f(x_{ni+1}, x_{ni+2}, \ldots, x_{ni+n}).$$

Dans l'équation (4) on a $f\colon C^n \to C$ ($n>2$; C ensemble des nombres complexes).

Nous allons démontrer le résultat suivant:

Théorème 2. *La solution générale de l'équation* (4) *est donnée par* (2).

Pour démontrer le théorème 2, nous allons utiliser:

Lemme. Si $a_1, a_2, \ldots, a_n$ ($a_i \in C$; $i=1, 2, \ldots, n$) *sont des nombres complexes tels que*

$$f(a_1, a_2, \ldots, a_n) \neq 0,$$

on a

$$f(a_n, u_1, \ldots, u_{n-2}, a_n) \equiv 0.$$

Démonstration du lemme. Supposons, au contraire, que l'on a

$$f(a_n, u_1, \ldots, u_{n-2}, a_n) \neq 0. \tag{5}$$

Alors, en posant

$$x_i = a_i \qquad (i=1, 2, \ldots, n),$$
$$x_{rn+1} = x_{(r+1)n} = a_n \qquad (r=1, 2, \ldots, k-1),$$
$$x_{rn+j+1} = u_j \qquad (r=1, 2, \ldots, k-1;\ j=1, 2, \ldots, n-2),$$

l'équation (4) devient

$$\begin{aligned}(k-1)\big(f(a_n, u_1, \ldots, u_{n-2}, a_n)\big)^{k-2} & \\ \times \big(f(a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n)\, f(a_n, u_1, \ldots, u_{n-2}, a_n) & \\ + f(a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, u_1)\, f(a_n, a_n, u_2, \ldots, u_{n-2}, a_n) & \\ + f(a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, u_2)\, f(a_n, u_1, a_n, u_3, \ldots, u_{n-2}, a_n) & \\ + \cdots & \\ + f(a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, u_{n-2})\, f(a_n, u_1, \ldots, u_{n-3}, a_n, a_n)\big) = 0. &\end{aligned} \tag{6}$$

D'après l'hypothèse (5), à partir de (6), on a

$$\begin{aligned} f(a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n)\, f(a_n, u_1, u_2, \ldots, u_{n-2}, a_n) & \\ + f(a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, u_1)\, f(a_n, a_n, u_2, \ldots, u_{n-2}, a_n) & \\ + f(a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, u_2)\, f(a_n, u_1, a_n, u_3, \ldots, u_{n-2}, a_n) & \\ + \cdots & \\ + f(a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, u_{n-2})\, f(a_n, u_1, \ldots, u_{n-3}, a_n, a_n) = 0. &\end{aligned} \tag{7}$$

Soit $E_{n-2} = \{1, 2, \ldots, n-2\}$ et soit S_r ($0<r\leqslant n-2$) un sous-ensemble quelconque de E_{n-2} contenant r éléments. Pour $r=n-2$ on a $S_{n-2}=E_{n-2}$. En posant dans (4) $x_i = a_n$ ($i=1, 2, \ldots, kn$), on trouve

$$f(a_n, a_n, \ldots, a_n, a_n) = 0. \tag{8}$$

Supposons que l'on ait

(9) $$f(a_n, v_1, v_2, \ldots, v_{n-2}, a_n)=0,$$

où

(10) $$\begin{aligned} v_i &= a_n \qquad (i \in S_r) \\ &= y_i \qquad (i \in E_{n-2} \setminus S_r). \end{aligned}$$

Nous allons démontrer que

(11) $$f(a_n, w_1, \ldots, w_{n-2}, a_n)=0,$$

où

(12) $$\begin{aligned} w_i &= a_n \qquad (i \in S_{r-1}) \\ &= y_i \qquad (i \in E_{n-2} \setminus S_{r-1}) \end{aligned}$$

si l'hypothèse (9) est vraie.

Si l'on pose $u_i = w_i$, d'après l'hypothèse (9), à partir de (7) on obtient

$$rf(a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n)\, f(a_n, w_1, w_2, \ldots, w_{n-2}, a_n)=0.$$

De là, on trouve

$$f(a_n, w_1, w_2, \ldots, w_{n-2}, a_n)=0.$$

Donc, nous avons démontré par induction que

$$f(a_n, u_1, u_2, \ldots, u_{n-2}, a_n)=0$$

si précisément r $(0 \leqslant r \leqslant n-2)$ éléments parmi $u_1, u_2, \ldots, u_{n-2}$ sont égaux à a_n.

Pour $r=0$ on obtient

$$f(a_n, u_1, \ldots, u_{n-2}, a_n) \equiv 0$$

ce que est contraire à l'hypothèse (5).

Donc, le lemme est démontré.

Démonstration du théorème 2. Nous allons démontrer le théorème 2 par induction.

Pour $n=2$, l'équation (4) a la forme suivante

(13) $$\begin{aligned} (k-1)\, & f(x_1, x_2)\, f(x_3, x_4) \cdots f(x_{2k-1}, x_{2k}) \\ = \;& f(x_1, x_3)\, f(x_2, x_4) \cdots f(x_{2k-1}, x_{2k}) \\ & + f(x_1, x_4)\, f(x_3, x_2) \cdots f(x_{2k-1}, x_{2k}) \\ & + \cdots \\ & + f(x_1, x_{2k-1})\, f(x_3, x_4) \cdots f(x_2, x_{2k}) \\ & + f(x_1, x_{2k})\, f(x_3, x_4) \cdots f(x_{2k-1}, x_2). \end{aligned}$$

Si l'on pose $x_i = u$ $(i=1, 2, \ldots, 2k)$, l'équation (13) prend la forme que voici

(14) $$f(u, u) \equiv 0.$$

Pour toute solution non triviale de l'équation (13) il existe au moins un couple des nombres complexes (a, b), tels que $f(a, b) \neq 0$.

L'équation (13), au moyen des substitutions

$$x_{2i-1}=a \quad (i=1, 2, \ldots, k), \quad x_{2j}=b \quad (j=2, 3, \ldots, k), \quad x_2=u,$$

prend la forme

$$f(a, b)^{k-1}\big(f(u, b)+f(b, u)\big)=0,$$

d'où

$$f(u, b)=-f(b, u). \tag{15}$$

De (15) il vient

$$f(a, b)\neq 0.$$

Pour $x_{2i-1}=a$, $x_{2i}=b$ $(i=1, 2, \ldots, k-1)$, $x_{2k-1}=u$, $x_{2k}=v$, l'équation (13), d'après (15), devient

$$f(a, b)^{k-1} f(u, v)=f(a, b)^{k-2}\big(f(a, u)\, f(b, v)-f(a, v)\, f(b, u)\big).$$

De là, avec les notations

$$\frac{f(a, u)}{f(a, b)}=H_1(u), \quad f(b, u)=H_2(u),$$

on obtient que la fonction

$$f(u, v)=\Delta\big(H_1(u),\ H_2(v)\big),$$

est la solution générale de l'équation (4) dans le cas $n=2$, car elle contient la solution triviale $f(x, y)=0$.

Supposons maintenant que la solution générale de l'équation fonctionnelle

$$(k-1)\, F(x_1, x_2, \ldots . x_{k(n-1)}) = \sum_{r=n}^{k(n-1)} \theta_{n-1,r} F(x_1, x_2, \ldots, x_{n-2}, x_{n-1}, x_n, \ldots, \dot{x}_{k(n-1)}) \tag{16}$$

avec

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_{k(n-1)})=\prod_{i=0}^{k-1} f(x_{(n-1)i+1}, x_{(n-1)i+2}, \ldots, x_{(n-1)i+n-1})$$

soit donnée par la fonction suivante

$$f(u_1, u_2, \ldots, u_{n-1})=\Delta\big(H_1(u_1), H_2(u_2), \ldots, H_{n-1}(u_{n-1})\big), \tag{17}$$

c'est-à-dire que le théorème 2 soit vrai pour $n-1$.

Soit $f(a_1, a_2, \ldots, a_n)\neq 0$. En posant

$$x_{ni+1}=a_n, \qquad (i=0, 1, 2, \ldots, k-1),$$

$$f(\dot{a}_n, x_2, x_3, \ldots, x_n)=g(x_2, x_3, \ldots, x_n) \qquad (f: C^n\to C;\ g: C^{n-1}\to C),$$

d'après le lemme, de (4) on obtient

$$\begin{aligned}(k-1)\, g(x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n)\, g(x_{n+2}, x_{n+3}, \ldots, x_{2n})\cdots g(x_{(k-1)\dot{n}+2}, \ldots, x_{kn}) \\ = g(x_2, \ldots, x_{n-1}, x_{n+2})\, g(x_n, x_{n+3}, \ldots, x_{2n})\cdots g(x_{(k-1)n+2}, \ldots, x_{kn}) \\ + g(x_2, \ldots, x_{n-1}, x_{n+3})\, g(x_{n+2}, x_n, x_{n+4}, \ldots, x_{2n})\cdots g(x_{(k-1)n+2}, \ldots, x_{kn}) \\ + \cdots \\ + g(x_2, \ldots, x_{n-1}, x_{kn})\, g(x_{n+2}, \ldots, x_{2n})\cdots g(x_{(k-1)n+2}, \ldots, x_{kn-1}, x_n).\end{aligned} \tag{18}$$

D'après l'hypothèse inductive, on obtient que la solution générale de l'équation (18) est

$$(19)\qquad g(u_1, u_2, \ldots, u_{n-1}) = f(a_n, u_1, u_2, \ldots, u_{n-1})$$
$$= \Delta\big(H_1(u_1),\ H_2(u_2),\ \ldots,\ H_{n-1}(u_{n-1})\big),$$

où $H_i : C \to C$ $(i = 1, 2, \ldots, n-1)$ sont des fonctions arbitraires.

Si l'on pose dans (4)

$$x_i = a_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n-1), \quad x_n = u_1,$$
$$x_{nj+m} = a_m \quad (j = 1, 2, \ldots, k-1; \quad m = 1, 2, \ldots, n),$$
$$x_{(k-1)n+1} = a_n, \quad x_{(k-1)n+r} = u_r \quad (r = 2, 3, \ldots, n),$$

on obtient

$$(20)\qquad f(a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n)\, f(u_1, u_2, \ldots, u_n)$$
$$= f(a_1, \ldots, a_{n-1}, u_1)\, f(a_n, u_2, \ldots, u_n)$$
$$- f(a_1, \ldots, a_{n-1}, u_2)\, f(a_n, u_1, u_3, \ldots, u_n)$$
$$- \cdots$$
$$- f(a_1, \ldots, a_{n-1}, u_n)\, f(a_n, u_2, \ldots, u_{n-1}, u_1).$$

La propriété (19) conduit à l'égalité

$$(21)\qquad f(a_n, \ldots, u_{i-1}, u_i, u_{i+1}, \ldots, u_{j-1}, u_j, u_{j+1}, \ldots, u_{n-1})$$
$$= -f(a_n, \ldots, u_{i-1}, u_j, u_{i+1}, \ldots, u_{j-1}, u_i, u_{j+1}, \ldots, u_{n-1})$$
$$(1 \leqslant i < j \leqslant n-1).$$

Mettant à profit (19), (20) et (21), avec la notation

$$\frac{f(a_1, \ldots, a_{n-1}, u)}{f(a_1, \ldots, a_n)} = H_n(u),$$

on obtient que $f(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ est de la forme (2).

Inversement, nous allons prouver que la fonction (2) est justement la solution de l'équation (4). A cet effet, considérons l'identité

$$(22)\quad D(j) = \begin{vmatrix} H_1(x_1) & H_2(x_1) & \ldots\ H_n(x_1) & 0 & 0 & \ldots\ 0 \\ H_1(x_2) & H_2(x_2) & H_n(x_2) & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & \\ H_1(x_{n-1}) & H_2(x_{n-1}) & H_n(x_{n-1}) & 0 & 0 & 0 \\ H_1(x_n) & H_2(x_n) & H_n(x_n) & H_1(x_n) & H_2(x_n) & H_n(x_n) \\ H_1(x_{nj+1}) & H_2(x_{nj+1}) & H_n(x_{nj+1}) & H_1(x_{nj+1}) & H_2(x_{nj+1}) & H_n(x_{nj+1}) \\ \vdots & & & & & \\ H_1(x_{nj+n}) & H_2(x_{nj+n}) & H_n(x_{nj+n}) & H_1(x_{nj+n}) & H_2(x_{nj+n}) & H_n(x_{nj+n}) \end{vmatrix} = 0.$$

D'après (22) on conclue que l'identité suivante est vraie

$$\sum_{j=1}^{k-1} D(j) \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{k-1} \Delta\big(H_1(x_{ni+1}),\ H_2(x_{ni+2}),\ \ldots,\ H_n(x_{ni+n})\big)=0. \tag{23}$$

En évaluant le déterminant $D(j)$ d'après la règle de Laplace et en utilisant l'identité (23), on vérifie que la fonction (2) est la solution de l'équation (4).

Donc, le théorème 2 est ainsi démontré.

REFERENCES

[1] P. M. Vasić, *Équation fonctionnelle d'un certain type de déterminants*, Publications de l'Institut mathématique de Belgrade, t. 2 (16) (1962), 65—70.

Voir aussi:

P. M. Vasić, *O nekim kvadratnim funkcionalnim jednačinama*, Publications de la Faculté d'Électrotechnique de l'Université de Belgrade, série: Mathématiques et physique, № **131** (1964), 19—24.