PUBLICATIONS DE L'INSTITUT MATHÉMATIQUE
Nouvelle série, tome 8 (22), 1968, p. 121—123.

ÜBER EINE FUNKTIONALGLEICHUNG IM HILBERTRAUM

Z. Daróczy

(Eingegangen am 27. Januar 1967)

In gewissen Funktionalgleichungen treten ausser den unbekannten Funktionen und den Veränderlichen auch bekannte Funktionen und gegebene konstante Grössen auf. A priori sind diese Konstanten und Funktionen beliebig wählbar, aber nicht jedem möglichen Wert derselben entsprechen nichttriviale Lösungen der Funktionalgleichung. Ziel der vorliegenden Arbeit ist es, für eine Funktionalgleichung von solchem Typus notwendige und hinreichende Bedingungen für die Existenz nichtkonstanter (stetiger) Lösungen zu bestimmen.

Es sei H ein reeller Hilbertraum mit dem inneren Produkt (x, y) $(x, y \in H)$ und $\varphi: H \to R$ (R ist der Körper der reellen Zahlen) ein Funktional, welches der Funktionalgleichung

$$\varphi[A(x)+y]=\beta\varphi(x)+\varphi(y) \qquad (x, y \in H) \tag{1}$$

genügt, wobei $A: H \to H$ ein beschränkter von Null verschiedener linearer Operator und $\beta \neq 0$ ein konstanter Wert aus R ist. Im eindimensionalen Fall geht (1) in die bekannte Funktionalgleichung

$$\varphi(ax+y)=\beta\varphi(x)+\varphi(y) \tag{2}$$

über, wobei $a \neq 0$ eine reelle Zahl und $\varphi: R \to R$ eine reelle Funktion ist. Für die Funktionalgleichung (2) hat *J. Aczél* in [1] bewiesen, dass diese nur im Falle $a=\beta$ stetige nichtkonstante Lösungen besitzt (vgl. [2]). Wenn φ eine nichtstetige Funktion ist, dann gilt diese Behauptung nicht mehr, wie es die Untersuchungen der Arbeit [3] (vgl. auch [4], [6] und [2]) zeigen.

Im § 1 beweisen wir eine Verallgemeinerung des Satzes von *J. Aczél*. Im § 2 untersuchen wir den n-dimensionalen euklidischen Raum und geben eine Verallgemeinerung von Satz 3 der Arbeit [3] an. In diesem Paragraphen werden wir die Stetigkeitsvoraussetzung weglassen.

§ 1. STETIGE LÖSUNGEN

Wir wollen den folgenden Satz beweisen:

Satz 1. *Die Funktionalgleichung* (1) *hat dann und nur dann eine stetige nichtkonstante Lösung, wenn* β *ein Eigenwert des adjungierten Operators* A^* *ist. In diesem Fall ist die allgemeine stetige und nichtkonstante Lösung von* (1)

$$\varphi(x)=(x, b) \qquad (x \in H), \tag{3}$$

wobei $b \neq 0$ *ein beliebiges zu* β *gehöriges Eigenelement von* A^* *ist.*

Beweis. 1) Es sei $\varphi: H \to R$ eine stetige nichtkonstante Lösung der Funktionalgleichung (1). Mit der Substitution $x=y=0$ ergibt sich aus (1) $\varphi(0)=0$. Setzen wir jetzt in (1) $y=0$, so erhalten wir die Gleichung

$$\varphi[A(x)] = \beta\varphi(x) \qquad (x \in H). \tag{4}$$

Aus (1) und (4) gewinnen wir die Gleichung $\varphi[A(x)+y]=\varphi[A(x)]+\varphi(y)$ $(x, y \in H)$ und daraus folgt, dass φ der Gleichung

$$\varphi(l+y)=\varphi(l)+\varphi(y) \tag{5}$$

genügt, wobei $l \in L = \overline{A(H)}$ und $y \in H$ beliebig ist. Hier ist $A(H)=\{y \mid y = A(x),\ x \in H\}$ und $\overline{A(H)}$ die Abschliessung des linearen Unterraums $A(H)$. In dem Unterraum L gilt die Funktionalgleichung $\varphi(l_1+l_2)=\varphi(l_1)+\varphi(l_2)$ $(l_1, l_2 \in L)$ und wegen der Stetigkeit von φ hat sie nach dem Satz von *Riesz* (S. [7]) die Gestalt

$$\varphi(l)=(l, a) \qquad (l \in L),$$

wobei a ein Element aus L ist. Aus der Gleichung (4) folgt dann

$$\varphi(x)=\frac{1}{\beta}\varphi[A(x)]=\frac{1}{\beta}(A(x), a)=\left(x, \frac{1}{\beta}A^*(a)\right) \qquad (x \in H). \tag{6}$$

Wir führen jetzt die Bezeichnung $b=\frac{1}{\beta}A^*(a)$ ein. Es gilt $b \neq 0$, weil das Funktional φ nichtkonstant ist. Nach (6) haben wir die Darstellung

$$\varphi(x)=(x, b) \qquad (x \in H,\ b \neq 0) \tag{3}$$

und mit der Berüchsichtigung von (4) gilt die Gleichung $(A(x), b)=\beta(x, b)$ $(x \in H)$. Daraus folgt $A^*(b)=\beta b$, also ist das Element $b \neq 0$ ein zu β gehöriges Eigenelement von A^*.

2) Wir werden jetzt zeigen, dass (3) eine stetige nichtkonstante Lösung von (1) ist, wenn $A^*(b)=\beta b\ (b \neq 0)$ gilt. Die Stetigkeit von φ ist trivial und es gilt

$$\varphi[A(x)+y]=(A(x)+y, b)=(A(x), b)+(y, b)=$$
$$=(x, A^*(b))+\varphi(y)=(x, \beta b)+\varphi(y)=\beta\varphi(x)+\varphi(y).$$

Damit haben wir den Satz 1 bewiesen.

§ 2. NICHTKONSTANTE LÖSUNGEN

In der Arbeit [3] hat der Verfasser die folgende Behauptung bewiesen (S. [3], Satz 3): *Ist a eine rationale Zahl, so ist zur Existenz einer nichtkonstanten Lösung der Funktionalgleichung* (2) *notwendig und hinreichend, das $b=\beta$ ist.*

Wir werden jetzt dieses Ergebnis verallgemeinern. Es bezeichne $H=R^n$ den n-dimensionalen reellen euklidischen Raum. Wir beginnen mit der folgenden

Definition. Ein linearer Operator $A: R^n \to R^n$ wird *rational* gennant, wenn das charakteristische Polynom von A^* ein Polynom mit rationalen Koeffizienten ist.

In dem eindimensionalen Raum gilt die folgende Behauptung: Der lineare Operator $A(x)=ax$ ist dann und nur dann rational, wenn a eine rationale Zahl ist. Es ist leicht einzusehen, dass A ein rationaler Operator ist, wenn es ein Orthonormalsystem von R^n gibt, in dem die Matrixdarstellung von A aus rationalen Zahlen besteht.

Wir können jetzt den folgenden Satz beweisen:

Satz 2. *Ist A ein linearer invertierbarer rationaler Operator von R^n, so hat die Funktionalgleichung* (1) *dann und nur dann eine nichtkonstante Lösung, wenn β ein Eigenwert des adjungierten Operators A^* ist.*

Beweis. 1) Es sei φ: $R^n \to R$ eine nichtkonstante Lösung der Funktionalgleichung (1). Man kann leicht zeigen, dass $\varphi(0)=0$ und

$$\varphi[A(x)]=\beta\varphi(x) \qquad (x\in R^n) \tag{7}$$

ist. Aus (7) folgt $\varphi[A(x)+y]=\varphi[A(x)]+\varphi(y)$ und daraus erhalten wir die Gleichung

$$\varphi(x+y)=\varphi(x)+\varphi(y) \qquad (x,\ y\in R^n), \tag{8}$$

weil der Operator A invertierbar ist. Aus (8) erhält man

$$\varphi(\rho x)=\rho\varphi(x) \tag{9}$$

für alle $\rho\in\mathcal{R}$, wobei $\mathcal{R}$ die Menge der rationalen Zahlen ist. Es sei jetzt $p(t)=\rho_n t^n+\rho_{n-1}t^{n-1}+\cdots+\rho_1 t+\rho_0$ ein Polynom mit rationalen Koeffizienten. Aus (7), (8) und (9) folgt die Identität

$$\varphi[p(A)(x)]=p(\beta)\varphi(x) \qquad (x\in R^n). \tag{10}$$

Es bezeichne $\Delta(t)$ das charakteristische Polynom von A^*. Da A ein rationaler Operator ist, hat $\Delta(t)$ rationale Koeffizienten. Nach dem Satz von *Cayley-Hamilton* (S. [5]) gilt $\Delta(A^*)=0$, woraus sich $\Delta(A)=0$ ergibt. So erhalten wir aus (10)

$$0=\varphi(0)=\varphi[0(x)]=\varphi[\Delta(A)(x)]=\Delta(\beta)\varphi(x) \qquad (x\in R^n).$$

Da $\varphi(x)$ nichtkonstant ist, muss $\Delta(\beta)=0$ sein, d. h. β ist ein Eigenwert des Operators A^*.

2) Ist $\beta\neq 0$ ein Eigenwert von A^* und $b\neq 0$ ein zu β gehöriges Eigenelement, so ist $\varphi(x)=(x,\ b)$ eine nichtkonstante Lösung von (1), wie wir dies schon im Beweis des Satzes 1 gezeigt haben.

LITERATUR

[1] J. Aczél, *Über eine Klasse von Funktionalgleichungen*, Commentarii Math. Helvetici, **21** (1948), 247—256.

[2] J. Aczél, *Lectures on Functional Equations and their Applications*, Academic Press, New York and London, 1966.

[3] Z. Daróczy, *Notwendige und hinreichende Bedingungen für die Existenz von nichtkonstanten Lösungen linearer Funktionalgleichungen*, Acta Sci. Math., **22** (1961), 31—41.

[4] Z. Daróczy, *A bilineáris függvényegyenletek egy osztályáról*, Matematikai Lapok. **15** (1964), 52—86.

[5] F. R. Gantmacher, *Matrizenrechnung I.*, Berlin 1958.

[6] L. Losonczi, *Bestimmung aller nichtkonstanten Lösungen von linearen Funktionalgleichungen*, Acta Sci. Math., **25** (1964), 250—254.

[7] F. Riesz — B. Sz.-Nagy, *Vorlesungen über Funktionalanalysis*, Berlin 1956,