PUBLICATIONS DE L'INSTITUT MATHÉMATIQUE
Nouvelle série, tome 8 (22), 1968. p. 106—120.

SUR UNE CLASSE D'EQUATIONS FONCTIONNELLES LINEAIRES

Dušan D. Adamović

(Communiqué le 23 juin 1967)

Le but principal de cet article est la discussion complète des solutions de l'équation fonctionnelle de la forme

$$\sum_{1 \leqslant i,\, j \leqslant n} a_{ij} f(x_i, x_j) = 0 \quad (n \geqslant 2), \tag{1}$$

où la fonction $f\colon \mathcal{S} \times \mathcal{S} \to \mathcal{L}$ ($\mathcal{S}$ ensemble non vide, $\mathcal{L}$ espace linéaire sur le corps commutatif $\mathcal{F}$ dont la caractéristique n'est pas 2) est inconnue et $a_{ij} \in \mathcal{F}$ $(1 \leqslant i, j \leqslant n)$ sont constantes données. En particulier, $\mathcal{L}$ peut coïncider avec $\mathcal{F}$.

Notons que ces résultats ne sont pas comparables, du point de vue de la généralité, à ceux de *S. Prešić* contenus dans [1], lesquels se rapportent au cas de l'équation fonctionnelle linéaire homogène, où f est fonction d'un nombre arbitraire de variables indépendantes et où les coefficients sont fonctions données des mêmes variables, mais sont soumis à certaines conditions qu'ils ne satisfont automatiquement s'ils sont constants.

Avant de passer à la discussion de l'équation (1) sous forme générale, nous allons exposer un résultat supplémentaire, à savoir

0. Etude de l'équation fonctionnelle

$$af(x, y) + bf(y, x) + cf(x, x) + df(y, y) = g(x, y) \tag{2}$$

($f\colon \mathcal{S} \times \mathcal{S} \to \mathcal{L}$ fonction inconnue; $g\colon \mathcal{S} \times \mathcal{S} \to \mathcal{L}$ fonction donnée; a, b, c, d $(\in \mathcal{F})$ constantes données)

Dans ce qui suit jusqu'à la fin de l'article nous désignerons partout par F une fonction arbitraire de deux variables indépendantes ($F\colon \mathcal{S} \times \mathcal{S} \to \mathcal{L}$), par G et H des fonctions arbitraires d'une variable indépendante ($G, H\colon \mathcal{S} \to \mathcal{L}$) et par C une constante arbitraire ($C \in \mathcal{L}$), sans le noter explicitement.

En posant dans (2) $y = x$, on obtient

$$(a + b + c + d) f(x, x) = g(x, x). \tag{3}$$

0.1. Soit

$$a + b + c + d \neq 0.$$

Alors (3) entraîne

$$f(x, x) = \frac{1}{a + b + c + d} g(x, x),$$

de manière que (2) devient

$$af(x, y)+bf(y, x)=h(x, y), \tag{4}$$

avec

$$h(x, y)=g(x, y)-\frac{cg(x, x)+dg(y, y)}{a+b+c+d}. \tag{5}$$

Nous allons distinguer quatre cas possibles:

0.1.1. (6) $$a^2-b^2 \neq 0.$$

L'équation (4) et l'équation obtenue par la permutation des lettres x et y

$$bf(x, y)+af(y, x)=h(y, x)$$

forment un système linéaire par rapport à $f(x, y)$ et $f(y, x)$. D'après (6), il en résulte

$$f(x, y)=\frac{ah(x, y)-bh(y, x)}{a^2-b^2}.$$

Etant donné que cette expression pour $f(x, y)$ satisfait identiquement l'équation (2), ce qu'on vérifie immédiatement, *dans ce cas la solution générale est donnée par l'égalité précédente, ou bien, d'après* (5), *par*

$$f(x, y)=\frac{(a+b+c+d)[ag(x, y)-bg(y, x)]+(bd-ac)g(x, x)+(bc-ad)g(y, y)}{(a^2-b^2)(a+b+c+d)}.$$

0.1.2. $$a=b \neq 0.$$

(4) devient

$$a[f(x, y)+f(y, x)]=h(x, y). \tag{7}$$

Il en résulte

$$h(x, y)=h(y, x), \tag{8}$$

ou bien, d'après (5),

$$g(x, y)-g(y, x)=\frac{(c-d)[g(x, x)-g(y, y)]}{2a+c+d}. \tag{8'}$$

Cette condition-là est nécessaire pour que l'équation (2) possède une solution dans ce cas. En supposant (8'), c'est-à-dire (8), après la substitution

$$f(x, y)=\frac{1}{2a}h(x, y)+\varphi(x, y) \quad (\varphi \text{ nouvelle fonction inconnue}), \tag{9}$$

(7) se réduit à

$$\varphi(x, y)+\varphi(y, x)=0;$$

d'où

$$\varphi(x, y)=F(x, y)-F(y, x).$$

D'après tout ce qui précède et une vérification facile: *dans le cas considéré,* (8') *représente la condition nécessaire et suffisante pour que l'équation* (2) *ait une solution et sous cette condition-là la solution de* (2) *est donnée par*

$$f(x, y)=\frac{(2a+c+d)g(x, y)-cg(x, x)-dg(y, y)}{}+F(x, y)-F(y, x).$$

0.1.3. (10) $$a = -b \neq 0.$$

(4) prend la forme

$$a[f(x, y) - f(y, x)] = h(x, y).$$

Il en résulte

$$h(x, y) = -h(y, x), \tag{11}$$

c'est-à-dire, d'après (5) et (10),

$$g(x, y) + g(y, x) = g(x, x) + g(y, y), \tag{12}$$

une condition nécessaire pour que (2) ait une solution dans ce cas. En supposant (12), c'est-à-dire (11), la substitution (9) conduit à

$$\varphi(x, y) - \varphi(y, x) = 0,$$

d'où

$$\varphi(x, y) = \Phi(x, y) + \Phi(y, x),$$

et puis, d'après (9) et (5),

$$f(x, y) = \frac{(c+d)\, g(x, y) - cg(x, x) - dg(y, y)}{2a(c+d)} + \Phi(x, y) + \Phi(y, x).$$

En posant $y = x$, il vient

$$f(x, x) = 2\,\Phi(x, x),$$

c'est-à-dire, d'après (3),

$$\Phi(x, x) = \frac{g(x, x)}{2(c+d)}.$$

Donc,

$$\Phi(x, y) = F(x, y) - F(x, x) + \frac{g(x, x)}{2(c+d)},$$

de manière que l'expression précédente pour $f(x, y)$ devient

$$f(x, y) = \frac{(c+d)\, g(x, y) + (a-c)\, g(x, x) + (a-d)\, g(y, y)}{2a(c+d)} +$$

$$+ F(x, y) + F(y, x) - F(x, x) - F(y, y).$$

Une vérification immédiate montre que (12) *représente la condition nécessaire et suffisante et que la solution générale est donnée par la dernière égalité.*

0.1.4. $$a = b = 0.$$

On voit sans difficulté que *la condition nécessaire et suffisante pour que* (2) *ait une solution peut être exprimée comme il suit*

$$g(x, y) = \mathrm{cm}(x) + \mathrm{dm}(y)$$

et que *si* $m(x)$ *figure dans l'équation précédente, la solution générale de* (2) *est donnée par*

$$f(x, y) = m(x) + F(x, y) - F(x, x).$$

0.2. (13) $$a+b+c+d=0.$$

En posant $y=x$ dans (2), on obtient une condition nécessaire pour qu'on ait une solution dans ce cas:

(14) $$g(x, x)=0.$$

Considérons le système linéaire formé par (2) et l'équation obtenue pa la permutation de x et y:

(15) $$\begin{cases} af(x, y)+bf(y, x)+cf(x, x)+df(y, y)=g(x, y) \\ bf(x, y)+af(y, x)+df(x, x)+cf(y, y)=g(y, x). \end{cases}$$

0.2.1. $$a^2-b^2 \neq 0.$$

On obtient de (15)

$$(a^2-b^2)f(x, y)=(bd-ac)f(x, x)+(bc-ad)f(y, y)+ag(x, y)-bg(y, x),$$

ou bien, étant donné que l'on a, d'après (13),

$$bd-ac=-(a+b)(b+c), \quad bc-ad=(a+b)(a+c),$$

(16) $$f(x, y)=\frac{ag(x, y)-bg(y, x)}{a^2-b^2}+(b+c)G(x)-(a+c)G(y).$$

L'équation (2) étant, sous la condition (14), identiquement satisfaite par la fonction f donnée par (16), avec une fonction arbitraire G, on conclut que *la condition* (14) *est nécessaire et suffisante pour qu'on ait une solution et que, sous cette condition-là, la solution générale est donnée par* (16).

0.2.2.

(17) $$a=b \neq 0.$$

(15) devient

$$\begin{cases} a[f(x, y)+f(y, x)]+cf(x, x)+df(y, y)=g(x, y) \\ a[f(y, x)+f(x, y)]+df(x, x)+cf(y, y)=g(y, x), \end{cases}$$

d'où

(18) $$(c-d)[f(x, x)-f(y, y)]=g(x, y)-g(y, x).$$

0.2.2.1. $$c=d(=-a).$$

(18) donne

(19) $$g(x, y)=g(y, x),$$

ce qui représente la seconde condition nécessaire. En supposant les conditions (14) et (19) remplies, après la substitution

(20) $$f(x, y)=\frac{1}{2a}g(x, y)+\varphi(x, y),$$

l'équation (2) devient

$$\varphi(x, y)+\varphi(y, x)-\varphi(x, x)-\varphi(y, y)=0,$$

d'où

$$\varphi(x, y)=F(x, y)-F(y, x)+G(x),$$

et puis, d'après (20),

(21) $$f(x, y)=\frac{1}{2a}g(x, y)+F(x, y)-F(y, x)+G(x).$$

Après vérification, on établit que *dans ce cas la condition nécessaire et suffisante est* (14) $\wedge$ (19) et que *la solution générale est donnée par* (21).

0.2.2.2. $c \neq d.$

On a, d'après (18),

$$g(x, y) - g(y, x) = (c-d)[\alpha(x) - \alpha(y)] \tag{22}$$

(la seconde condition nécessaire dans ce cas), avec

$$\alpha(x) = f(x, x). \tag{23}$$

En posant dans (22) $y = y_0$ (y_0 élément fixé de $\mathscr{S}$, arbitrairement choisi), on obtient

$$\alpha(x) = \frac{g(x, y_0) - g(y_0, x)}{c-d} + C, \tag{24}$$

avec $C(=\alpha(y_0))$ constant. La condition (22), d'après (24), prend la forme

$$g(x, y) - g(y, x) = g(x, y_0) - g(y_0, x) - g(y, y_0) + g(y_0, y) \qquad (y_0 \in \mathscr{S}). \tag{25}$$

Après la substitution (20), (2) devient, d'après (14), (22) et (23),

$$g(x, y) + \frac{d-c}{2}[\alpha(x) - \alpha(y)] + a[\varphi(x, y) + \varphi(y, x)] + c\,\alpha(x) + d\,\alpha(y) = g(x, y),$$

c'est-à-dire, d'après (13) et (17),

$$\varphi(x, y) - \alpha(x) + \varphi(y, x) - \alpha(y) = 0.$$

Il en résulte

$$\varphi(x, y) = \alpha(x) + F(x, y) - F(y, x)$$

et puis, d'après (20) et (24),

$$f(x, y) = \frac{1}{2a} g(x, y) + \frac{g(x, y_0) - g(y_0, x)}{c-d} + F(x, y) - F(y, x) + C. \tag{26}$$

En supposant les conditions (14) et (25) remplies, la substitution montre que la fonction $f(x, y)$ donnée par (26) satisfait (2) pour C et $F(x, y)$ arbitraires. Donc, *la condition* (14) $\wedge$ (25) *est nécessaire et suffisante pour que l'équation ait une solution dans ce cas et, sous cette condition-là, la solution générale est donnée par* (26).

0.2.3. $a = -b \neq 0.$

On a, d'après (13),

$$d = -c,$$

de manière que (2) devient

$$a[f(x, y) - f(y, x)] + c[f(x, x) - f(y, y)] = g(x, y). \tag{27}$$

Etant donnée que l'on a aussi

$$a[f(y, x) - f(x, y)] + c[f(y, y) - f(x, x)] = g(y, x),$$

on obtient, comme condition nécessaire,

$$g(x, y) + g(y, x) = 0 \tag{28}$$

(cette condition implique (14)).

En supposant (28), après la substitution (20) l'équation (27) devient

$$a[\varphi(x, y)-\varphi(y, x)]+c[\varphi(x, x)-\varphi(y, y)]=0,$$

c'est-à-dire

$$a\varphi(x, y)+c\varphi(x, x)-[a\varphi(y, x)+c\varphi(y, y)]=0,$$

d'où

(29) $$a\varphi(x, y)=-c\,\alpha(x)+\Phi(x, y)+\Phi(y, x),$$

avec

$$(a+c)\,\alpha(x)=2\,\Phi(x, x),$$

puisque $\alpha(x)=\varphi(x, x)$. Donc,

$$\Phi(x, y)=F(x, y)-F(x, x)+\frac{a+c}{2}\alpha(x),$$

ce qui donne, d'après (29),

$$\varphi(x, y)=-\frac{c}{a}\alpha(x)+F(x, y)+F(y,x)-F(x, x)-F(y, y)+\frac{a+c}{2a}\alpha(x)+\frac{a+c}{2a}\alpha(y)$$

$$=F(x, y)+F(y, x)-F(x, x)-F(y, y)+\frac{a-c}{2a}\alpha(x)+\frac{a+c}{2a}\alpha(y),$$

ou

$$\varphi(x, y)=F(x, y)+F(y, x)-F(x, x)-F(y, y)+(a-c)\,G(x)+(a+c)\,G(y)$$

et puis, d'après (20),

(30) $$f(x, y)=\frac{1}{2a}g(x, y)+F(x, y)+F(y, x)-F(x, x)-F(y, y)+$$
$$+(a-c)\,G(x)+(a+c)\,G(y).$$

L'équation (27) étant satisfaite par (30), sous la condition (28), on conclut que (28) *est la condition nécessaire et suffisante pour ce cas et que la solution générale et donnée par* (30).

0.2.4. $a=b=0.$

On a de nouveau $d=-c$, de manière que l'équation (2) se réduit à

$$c[f(x, x)-f(y, y)]=g(x, y).$$

0.2.4.1. $c=0.$

Evidemment: *la condition nécessaire et suffisante est*

$$g(x, y)=0$$

et la solution générale est donnée par

$$f(x, y)=F(x, y).$$

0.2.4.2. $c\neq 0.$

Une condition nécessaire est

(31) $$g(x, y)=c[\alpha(x)-\alpha(y)],$$

d'où

$$\alpha(x)=\frac{1}{c}g(x, y_0)+C \quad (C=\text{const}, \ y_0\in\mathcal{S}),$$

de sorte que (31) devient

(32) $$g(x, y)=g(x, y_0)-g(y, y_0).$$

On en conclut que *la condition* (32) *est nécessaire et suffisante et que la solution générale est donnée par*

$$f(x, y)=\frac{1}{c}g(x, y_0)+F(x, y)-F(x, x)+C.$$

0′. La discussion que nous venons d'achever montre que, si en particulier

$$g(x, y)=0 \quad (x, y \in S),$$

l'équation (2) a toujours des solutions.

Ce cas particulier (que l'on peut considérer aussi comme cas particulier de l'équation (1)) possède les formes suivantes des solutions générales, correspondantes aux cas précédemment traités, respectivement:

0′. $$a+b+c+d \neq 0.$$

0′.1′.1′. $$a^2-b^2 \neq 0:$$

$$f(x, y)=0.$$

0′.1′.2′. $$a=b \neq 0:$$

$$f(x, y)=F(x, y)-F(y, x).$$

0′.1′.3′. $$a=-b \neq 0:$$

$$f(x, y)=F(x, y)+F(y, x)-F(x, x)-F(y, y).$$

0′.1′.4′. $$a=b=0:$$

$$f(x, y)=F(x, y)-F(x, x).$$

0′.2′. $$a+b+c+d=0.$$

0′.2′.1′. $$a^2-b^2 \neq 0:$$

$$f(x, y)=(b+c)\,G(x)-(a+c)\,G(y).$$

0′.2′.2′. $$a=b \neq 0:$$

0′.2′.2′.1′. $$c=d:$$

$$f(x, y)=F(x, y)-F(y, x)+G(x).$$

0′.2′.2′.2′. $$c \neq d:$$

$$f(x, y)=F(x, y)-F(y, x)+C.$$

0′.2′.3′. $$a=-b \neq 0:$$

$$f(x, y)=F(x, y)+F(y, x)-F(x, x)-F(y, y)+(a-c)\,G(x)+(a+c)\,G(y).$$

0′.2′.4′. $$a=b=0.$$

0′.2′.4′.1′. $$c=0:$$

$$f(x, y)=F(x, y).$$

0′.2′.4′.2′. $$c \neq 0.$$

$$f(x, y)=F(x, y)-F(x, x)+C.$$

1. Discussion de l'équation

$$\sum_{1 \leqslant i,\, j \leqslant n} a_{ij} f(x_i,\ x_j) = 0 \qquad (n \geqslant 2). \tag{1}$$

Dans ce qui suit on va employer les désignations:

$$\Delta_{kl}^{ij} = \begin{vmatrix} a_{ij} & a_{ji} \\ a_{kl} & a_{lk} \end{vmatrix}, \quad \sum = \sum_{1 \leqslant i,\, j \leqslant n} a_{ij},$$

$$P_k = \sum_{1 \leqslant j \leqslant n} a_{kj}, \quad Q_k = \sum_{1 \leqslant i \leqslant n} a_{ik}, \quad A_k = \sum_{j \neq k} a_{kj}.$$

Supposons que l'on ait

$$\Delta_{kl}^{ij} = 0 \quad (1 \leqslant i < j \leqslant n,\ 1 \leqslant k \neq l \leqslant n)$$

et que tous les coefficients $a_{ij}\,(1 \leqslant i \neq j \leqslant n)$ ne soient pas nuls. Si, par exemple, $a_{pq} \neq 0\,(p \neq q)$, on a alors, pour $1 \leqslant i < j \leqslant n$, $a_{ij} = \lambda_{ij} a_{pq}$, $a_{ji} = \lambda_{ij} a_{qp}$ et comme, d'autre part,

$$\Delta_{qp}^{pq} = a_{pq}^2 - a_{qp}^2 = 0, \text{ d'où } a_{qp} = \lambda a_{pq}\,(\lambda \in \{-1,\ 1\}), \text{ on obtient}$$

$$a_{ji} = \lambda_{ij} \lambda a_{pq} = \lambda a_{ij} \quad (1 \leqslant i < j \leqslant n;\ \lambda \in \{-1,\ 1\}).$$

On peut donc distinguer les quatre possibilités **1.1 — 1.4** suivantes, s'excluant mutuellement.

1.1. Un des déterminants $\Delta_{kl}^{ij}\,(i < j,\ k \neq l)$ est différent de zéro. Soit, par exemple, avec $(p < q,\ r \neq s)$,

$$\Delta_{rs}^{pq} \neq 0. \tag{33}$$

La permutation des lettres $x_i\,(1 \leqslant i \leqslant n)$

$$\begin{pmatrix} \cdots x_p \cdots x_q \cdots \\ \cdots x_r \cdots x_s \cdots \end{pmatrix}$$

conduit au système d'équations

$$\cdots + a_{pq} f(x_p,\ x_q) + \cdots + a_{qp} f(x_q,\ x_p) + \cdots = 0$$

$$\cdots + a_{rs} f(x_p,\ x_q) + \cdots + a_{sr} f(x_q,\ x_p) + \cdots = 0.$$

En y posant $x_p = x$, $x_q = y$, $x_k = x_0 = \text{const}$ pour $k \notin \{p,\ q\}$, on obtient

$$a_{pq} f(x,\ y) + a_{qp} f(x,\ y) = \alpha(x) + \beta(y)$$

$$a_{rs} f(x,\ y) + a_{sr} f(y,\ x) = \gamma(x) + \delta(y),$$

d'où, d'après (33),

$$f(x,\ y) = u(x) + v(y). \tag{34}$$

La substitution (34) dans (1) donne

$$\sum_{1 \leqslant k \leqslant n} [P_k u(x_k) + Q_k v(x_k)] = 0. \tag{35}$$

1.1.1. $\qquad P_k = Q_k = 0 \quad (1 \leqslant k \leqslant n).$

On a, évidemment, *la solution générale*

$$f(x, y) = G(x) + H(y).$$

1.1.2. Pour un $k \in \{1, \ldots, n\}$ au moins toutes les deux constantes P_k et Q_k ne sont pas égales à zéro. Soit, par exemple,

$$Q_r \neq 0.$$

On obtient de (35), en y posant $x_r = x$, $x_k = x_0 = \text{const}$ pour $k \neq r$,

$$P_r u(x) + Q_r v(x) = \text{const},$$

d'où

$$v(x) = -\frac{P_r}{Q_r} u(x) + C_0 \quad (C_0 = \text{const}). \tag{36}$$

La substitution (36) dans (35) donne

$$\sum_{1 \leqslant k \leqslant n} (P_k Q_r - P_r Q_k) u(x_k) + C_1 \sum = 0 \quad (C_1 = \text{const}), \tag{37}$$

puisque

$$\sum_{1 \leqslant k \leqslant n} Q_k = \sum.$$

1.1.2.1. (38) $\begin{vmatrix} P_k & Q_k \\ P_r & Q_r \end{vmatrix} = P_k Q_r - Q_k P_r = 0 \quad (1 \leqslant k \leqslant n).$

(37) devient

$$C_1 \sum = 0. \tag{39}$$

1.1.2.1.1. $\sum = 0.$

La solution générale, d'après (34), (36), (37) et (38), *est*

$$f(x, y) = Q_r G(x) - P_r G(y) + C.$$

1.1.2.1.2. $\sum \neq 0.$

D'après (39), $C_1 = 0$. Donc, la solution générale est donnée par

$$f(x, y) = Q_r G(x) - P_r G(y).$$

En posant dans (1) $x_k = x$ $(1 \leqslant k \leqslant n)$, on obtient

$$\sum f(x, x) = 0, \quad \text{d'où} \quad f(x, x) = 0.$$

D'après cette remarque, *la solution générale pour ce cas peut être mise sous la forme*

$$f(x, y) = G(x) - G(y).$$

1.1.2.2. Pour un $k \in \{1, \ldots, n\}$ on a

$$\begin{vmatrix} P_k & Q_k \\ P_r & Q_r \end{vmatrix} \neq 0.$$

On obtient alors, en posant dans (37) $x_k = x$, $x_i = x_0 = \text{const}$ pour $i \neq k$, $u(x) = \text{const}$ et puis, d'après (34) et (36), $f(x, y) = \text{const}$.

1.1.2.2.1. $\sum = 0.$

La solution générale est

$$f(x, y) = C.$$

1.1.2.2.2. $\sum \neq 0.$

Solution générale:

$$f(x, y) = 0.$$

Il est clair que l'hypothèse $P_r \neq 0$ au lieu de $Q_r \neq 0$ conduirait aux mêmes résultats.

1.2. $a_{ij} = a_{ji}$ $(1 \leqslant i < j \leqslant n)$ et pour une paire (i, j) $(i < j)$ au moins $a_{ij} \neq 0$.

Soit donc, avec $p < q$,

$$a_{pq} \neq 0. \tag{40}$$

L'équation (1) devient

$$\sum_{1 \leq i < j \leq n} a_{ij} \psi(x_i, x_j) + \sum_{1 \leq k \leq n} a_{kk} f(x_k, x_k) = 0, \tag{41}$$

où l'on a écrit

$$\psi(x, y) = f(x, y) + f(y, x). \tag{42}$$

En posant dans (40) $x_p = x$, $x_q = y$, $x_k = x_0 = \text{const}$ pour $k \notin \{p, q\}$, on obtient, d'après (41),

$$\psi(x, y) = \alpha(x) + \beta(y). \tag{43}$$

Etant donné que l'on a $\psi(x, y) = \psi(y, x)$, ou $\alpha(x) + \beta(y) = \alpha(y) + \beta(x)$, et par suite

$$\alpha(x) - \beta(x) = \text{const},$$

(43) devient

$$\psi(x, y) = \gamma(x) + \gamma(y),$$

c'est-à-dire, d'après (42),

$$f(x, y) - \gamma(x) + f(y, x) - \gamma(y) = 0,$$

d'où

$$f(x, y) = \gamma(x) + F(x, y) - F(y, x). \tag{44}$$

Avec cette expression-là pour $f(x, y)$, (41) devient

$$\sum_{1 \leq k \leq n} P_k \gamma(x_k) = 0. \tag{45}$$

1.2.1. $P_k = 0 \qquad (1 \leqslant k \leqslant n).$

On conclut, d'après ce qui précède, que *la solution générale est*

$$f(x, y) = F(x, y) - F(y, x) + G(x).$$

1.2.2. La condition précédente n'est pas remplie.

On a, d'après (45), en procédant comme ci-dessus,

$$\gamma(x) = \text{const},$$

de manière que (44) devient

$$f(x, y) = F(x, y) - F(y, x) + C_2 \qquad (C_2 = \text{const}).$$

1.2.2.1. $\sum = 0.$

Solution générale:

$$f(x, y) = F(x, y) - F(y, x) + C.$$

1.2.2.2. $\sum \neq 0.$

Solution générale:

$$f(x, y) = F(x, y) - F(y, x).$$

1.3. (46) $a_{ij} = -a_{ji} \qquad (1 \leqslant i < j \leqslant n)$

et pour une paire (i, j) $(i<j)$ au moins $a_{ij} \neq 0$.

L'équation (1) devient

$$\sum_{1 \leq i < j \leq n} a_{ij} \theta(x_i, x_j) + \sum_{1 \leq k \leq n} a_{kk} f(x_k, x_k) = 0, \tag{47}$$

avec

$$\theta(x, y) = f(x, y) - f(y, x).$$

En procédant comme dans les cas précédents, on conclut que l'on a

$$f(x, y) - f(y, x) = \theta(x, y) = u(x) + v(y).$$

Il en résulte, puisque $\theta(x, x) = 0$,

$$v(x) = -u(x).$$

Donc,

$$f(x, y) - f(y, x) = u(x) - u(y),$$

ou

$$f(x, y) - u(x) = f(y, x) - u(y),$$

ce qui entraîne

$$f(x, y) = u(x) + \Phi(x, y) + \Phi(y, x). \tag{48}$$

La substitution dans (47) donne, d'après (46),

$$\sum_{1 \leq k \leq n} A_k u(x_k) + \sum_{1 \leq k \leq n} a_{kk} [2\Phi(x_k, x_k) + u(x_k)] = 0. \tag{49}$$

1.3.1. $A_k = 0 \qquad (1 \leqslant k \leqslant n).$

(49) se réduit à

$$\sum_{1 \leq k \leq n} a_{kk} [2\Phi(x_k, x_k + u(x_k)] = 0.$$

1.3.1.1. $a_{kk} = 0 \qquad (1 \leqslant k \leqslant n).$

Solution générale:

$$f(x, y) = F(x, y) + F(y, x) + G(x).$$

1.3.1.2. La condition précédente n'est pas remplie. On a alors

$$u(x) = -2\Phi(x, y) + C_3 \qquad (C_3 = \text{const}),$$

c'est-à-dire, d'après (48),

$$f(x, y) = \Phi(x, y) + \Phi(y, x) - 2\Phi(x, x) + C_3.$$

Avec cette représentation-là pour $f(x, y)$, (47) devient

$$C_3 \sum_{1 \leq k \leq n} a_{kk} = 0,$$

c'est-à-dire, puisque dans ce cas

$$\sum = \sum_{1 \leq k \leq n} A_k + \sum_{1 \leq k \leq n} a_{kk} = \sum_{1 \leq k \leq n} a_{kk}, \tag{50}$$

$$C_3 \sum = 0.$$

1.3.1.2.1. $\sum = 0.$

Solution générale:

$$f(x, y) = F(x, y) + F(y, x) - 2F(x, x) + C.$$

1.3.1.2.2. $\sum \neq 0.$

Solution générale:

$$f(x, y) = F(x, y) + F(y, x) - 2F(x, x).$$

1.3.2. Pour un $k \in \{1, \ldots, n\}$ au moins $A_k \neq 0$.

Soit $A_p \neq 0$. En posant dans (47) $x_p = x$, $x_k = y$ pour $k \neq p$, on obtient

(51) $$af(x, y) + bf(y, x) + cf(x, x) + df(y, y) = 0,$$

où

$$a = A_p, \quad b = -A_p, \quad c = a_{pp}, \quad d = \sum_{i, j \neq p} a_{ij};$$

(52) $$a + b + c + d = \sum.$$

1.3.2.1. $\sum = 0.$

D'après **0.'2.'3,'** (51) donne

(53) $$f(x, y) = \Phi(x, y) + \Phi(y, x) - \Phi(x, x) - \Phi(y, y) + (A_p - a_{pp})\, u(x) + (A_p + a_{pp})\, u(y).$$

Etant donné que l'on a alors

$$f(x, y) - f(y, x) = 2a_{pp}[u(y) - u(x)], \quad f(x, x) = 2A_p u(x),$$

avec la représentation (53) de $f(x, y)$ (47) devient, d'après (46),

(54) $$2 \sum_{1 \leq k \leq n} (A_p a_{kk} - A_k a_{pp})\, u(x_k) = 0.$$

1.3.2.1.1. (55) $\quad A_p a_k - A_k a_{pp} = 0 \quad (1 \leqslant k \leqslant n)$

La solution générale est

$$f(x, y) = F(x, y) + F(y, x) - F(x, x) - F(y, y) + (A_p - a_{pp})\, G(x) + (A_p + a_{pp})\, G(y).$$

Notons que *la condition* (55) *est remplie si, en particulier,* $a_{kk} = 0$ $(1 \leqslant k \leqslant n)$ et que *dans ce cas-là la solution générale peut être écrite sous la forme*

$$f(x, y) = F(x, y) + F(y, x) - F(x, x) - F(y, y) + G(x) + G(y).$$

1.3.2.1.2. La condition précédente n'est pas remplie.

On a alors, d'après (54),

$$u(x) = C_4 = \text{const},$$

de manière que (53) devient

$$f(x, y) = \Phi(x, y) + \Phi(y, x) - \Phi(x, x) - \Phi(y, y) + C_4.$$

Etant donné que l'on a alors

$$f(x, y) - f(y, x) = 0, \; f(x, x) = C_4$$

et que, d'après (46),

$$\sum_{1\leqslant k\leqslant n} a_{kk} = \sum = 0,$$

la solution générale est

$$f(x, y) = F(x, y) + F(y, x) - F(x, x) - F(y, y) + C.$$

1.3.2.2. $\sum \neq 0.$

On a, d'après (52) et **0'.1'.3'**,

(55) $$f(x, y) = F(x, y) + F(y, x) - F(x, x) - F(y, y),$$

et puisqu'on a alors

$$f(x, y) = f(y, x),\ f(x, x) = 0,$$

par cette expression pour $f(x, y)$ l'équation (47) est satisfaite. *La solution générale est,* donc, *donnée par* (55).

1.4. $a_{ij} = 0 \quad (i \neq j).$

1.4.1. $\sum \left(= \sum_{1\leqslant k\leqslant n} a_{kk}\right) = 0.$

1.4.1.1. $a_{kk} = 0 \quad (1 \leqslant k \leqslant n).$

Solution générale:

$$f(x, y) = F(x, y).$$

1.4.1.2. La condition précédente n'est pas remplie.

On obtient $f(x, x) = \text{const}$, d'où la conclusion que *la solution générale est*

$$f(x, y) = F(x, y) - F(x, x) + C.$$

1.4.2. $\sum \left(= \sum_{1\leqslant k\leqslant n} a_{kk}\right) \neq 0.$

On a maintenant $f(x, x) = 0$ et par conséquent *la solution générale est*

$$f(x, y) = F(x, y) - F(x, x). —$$

A la fin de cette discussion, nous notons que, *pour* $n \geqslant 3$, *toutes les cas que l'on y vient de distinguer, c'est-à-dire tous les ensembles de conditions correspondant à ces cas, sont effectivement possibles et cela dans tout corps commutatif* $\mathcal{F}$ *dont la caractéristique n'est pas 2.*

En effet, voici un aperçu des cas non trivials et des valeurs des coefficients qui réalisent les conditions correspondantes:

1.1.1. (Avec $\Delta_{21}^{12} \neq 0.$)

$$a_{12} = a_{23} = -a_{13} = -a_{22} = a \neq 0, \text{ les autres } a_{ij} = 0.$$

1.1.2.1.1. $(\Delta_{21}^{12} \neq 0,\ P_2 = Q_2 \neq 0)$

$$a_{12} = a_{23} = -a_{13} = -a_{11} = a \neq 0, \text{ les autres } a_{ij} = 0.$$

1.1.2.1.2. $(\Delta_{21}^{12} \neq 0,\ P_2 = Q_2 \neq 0)$

$$a_{12} = a_{23} = -a_{13} = a \neq 0, \text{ les autres } a_{ij} = 0.$$

1.1.2.2.1. $\left(\Delta_{21}^{12}\neq 0, \begin{vmatrix} P_1 & Q_1 \\ P_3 & Q_3 \end{vmatrix}\neq 0\right)$

$$a_{12}=-a_{31}=a\neq 0, \text{ les autres } a_{ij}=0.$$

1.1.2.2.2. $\left(\Delta_{21}^{12}\neq 0, \begin{vmatrix} P_1 & Q_1 \\ P_3 & Q_3 \end{vmatrix}\neq 0\right)$

$$a_{12}=-a_{31}=-a_{22}=a\neq 0, \text{ les autres } a_{ij}=0.$$

1.2.1. $(a_{12}\neq 0)$

$$a_{12}=a_{21}=-a_{11}=-a_{22}=a\neq 0, \text{ les autres } a_{ij}=0.$$

1.2.2.1. $(a_{12}\neq 0,\ P_1\neq 0)$.

$$a_{12}=a_{21}=-a_{22}=-a_{33}=a\neq 0, \text{ les autres } a_{ij}=0.$$

1.2.2.2. $(a_{12}\neq 0,\ P_1\neq 0)$.

$$a_{12}=a_{21}=-a_{22}=a\neq 0, \text{ les autres } a_{ij}=0$$

1.3.1. $(a_{12}\neq 0)$

$$a_{12}=-a_{21}=a_{31}=-a_{13}=a_{23}=-a_{32}=a\neq 0, \text{ les autres } a_{ij}=0.$$

On établit sans difficulté que pour $n=2$ les cas **1.1.1, 1.1.2.1.2, 1.1.2.2.1** et **1.3.1** ne sont pas possibles. Ce fait s'accorde avec le fait que les représentations des solutions générales qui correspondent à ces cas-là ne se trouvent pas parmi les solutions générales énumérées dans **0'**.

2. Quelques remarques supplémentaires

2.1. En ce qui concerne l'équation fonctionnelle

$$\sum_{1\leqslant i,\, j\leqslant n} a_{ij}f(x_i, x_j)=a_0\ (0\neq a_0\in\mathscr{L},\ a_0=\text{const}), \tag{56}$$

on établit, en y posant $x_k=x\ (1\leqslant k\leqslant n)$, que (56) *possède une solution si et seulement si*

$$\sum\neq 0, \tag{57}$$

et que sous la condition (57), *par la substitution*

$$f(x, y)=\frac{a_0}{\sum}+\varphi(x, y),$$

(56) *se réduit à une équation de la forme* (1).

Le résultat précédent est valable aussi dans le cas général d'équation linéaire à coefficients constants

$$\sum_{1\leqslant i_1,\, i_2,\, \ldots,\, i_m\leqslant n} a_{i_1 i_2 \ldots i_m}f(x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_m})=a_0.$$

2.2. *Supposons que* $\mathscr{S}$ *soit un espace topologique,* $\mathscr{L}$ *un espace linéaire topologique sur* $\mathscr{F}$ *et* $g\,(:\mathscr{S}\times\mathscr{S}\to\mathscr{L})$ *une fonction continue donnée. Alors chacune des solutions générales, obtenues dans* **0** *et* **1**, *où* $F\,(:\mathscr{S}\times\mathscr{S}\to\mathscr{S})$, $G\,(:\mathscr{S}\to\mathscr{L})$ *et* $H\,(:\mathscr{S}\to\mathscr{L})$ *sont des fonctions continues arbitraires, représente la solution continue générale pour le cas correspondant.* (Bien entendu, on suppose l'ensemble $\mathscr{S}\times\mathscr{S}$ muni de la topologie de l'espace-produit.)

En effet, dans le cas **0'.1'.2'**, par exemple, la solution générale est donnée par (*) $f(x, y)=F(x, y)-F(y, x)$ (F fonction arbitraire). Avec une fonction continue F quelconque, la fonction $f(x, y)$ donnée par (*) est continue et satisfait l'équation (2); d'autre part, si $f(x, y)$ est une solution continue de (2), on a $f(x, y)=-f(y, x)$ et par suite

$$f(x, y)=\frac{1}{2} f(x, y)-\frac{1}{2} f(y, x)=F(x, y)-F(y, x),$$

où la fonction $F(x, y)=\frac{1}{2} f(x, y)$ est continue.

Un autre exemple: dans le cas **1.1.1** on a la solution générale

$$f(x, y)=G(x)+H(y). \tag{58}$$

Si les fonctions G et H sont continues, alors la fonction $f(x, y)$ donnée par (58) est continue et satisfait l'équation (1); si, d'autre part, $f(x, y)$ est la solution continue de (1), alors $f(x, y)$ a la représentation (58) avec les fonctions continues F et G, ce qu'on établit en posant dans (58) $y=y_0=\text{const.}$

En procédant semblablement, on peut prouver la validité de notre assertion pour tous les cas dans **0** et **1**.

2.3. *D. S. Mitrinović* et *P. M. Vasić* ont étudié dans [2] l'équation fonctionnelle

$$af(x, y, z)+bf(y, z, x)+cf(z, x, y)=\alpha f(x, x, y)+\beta f(y, y, z)+\gamma f(z, z, x), \tag{59}$$

où les constantes sont des nombres réels et l'inconnue f est une fonction réelle de variables réelles. Sans entrer dans les détails, nous remarquons que l'on pourrait abréger et simplifier leur discussion à l'aide des résultats contenus dans **1**. En outre, leurs résultats concernant la solution générale de (59) restent valables sous la forme correspondante des hypothèses plus générales relatives aux coefficients et à la fonction $f(:\mathcal{S}^3 \to \mathcal{L})$ que nous avons formulées au commencement de cet article.

BIBLIOGRAPHIE

[1] S. B. Prešić, *Méthode de résolution d'une classe d'équations fonctionnelles linéaires*, Publications de la Faculté d'Electrotechnique de l'Université à Belgrade, Série: Mathématiques et physique, № 119 (1963), pp. 21—28.

[2] D. S. Mitrinović et P. M. Vasić, *Equations fonctionnelles linéaires généralisées*, Publ. Inst. Math., t. 4 (18), 1964, pp. 63—76.