PUBLICATIONS DE L'INSTITUT MATHEMATIQUE
Nouvelle série, tome 8 (22), 1968. p. 76–86.

РИМАНОВЫ ПРОСТРАНСВА, СОДЕРЖАЩИЕ ГЕОДЕЗИЧЕСКОЕ ПОЛЕ НАПРАВЛЕНИЙ

Милева Прванович

(Поступило 24-ого марта 1967 г.)

1. Пространство, содержащее геодезическое поле направлений. Пусть у $n+r$ — мерного пространства аффинной связности A_{n+r} задано r линейно независимых векторных полей $\overset{\alpha}{v}{}^i$ $(i, j, k=1, 2, \ldots, n+r;\ \alpha, \beta, \gamma=1, 2, \ldots, r)$. Они в A_{n+r} определяют поле r—мерных направлений. Предположим, что это поле является голономным, т. е. что в A_{n+r} существует система подпространств r—измерений, удовлетворяющая следующим условям:

1) через каждую точку A_{n+r} проходит одно из подпространств системы;

2) векторы $\overset{\alpha}{v}{}^i$, определяющие направление поля в данной точке, касательны к соответствующему подпространству системы.

Вышеупомянутые подпространства, определяемые голономным полем r—мерных направлений, условимся называть v_α—многообразиями. Я. Л. Шапиро определяет геодезическое поле направлений следующим образом [1]:

Голономное поле r—мерных направлений будем называть геодезическим, если многообразие $r+1$ измерений, образованное v_α — многообразиями поля, проходящими через точки любой геодезической линии A_{n+r}, является вполне геодезическим.

Пространство A_{n+r}, содержащее геодезическое поле r—мерных направлений, будем обозначать через $A_{n+r}(\overset{r}{v})$.

Векторы $\overset{\alpha}{v}{}^i$ определяют геодезическое поле направлений в A_{n+r} тогда и только тогда, когда они удовлетворяют системе уравнений [1]:

$$\overset{\alpha}{v}{}^i{}_{,k} = T^\alpha \delta^i_k + B^\alpha_{\beta k} \overset{\beta}{v}{}^i \tag{1.1}$$

где T^α и $B^\alpha_{\beta k}$ некоторые функции.

В пространстве $A_{n+r}(\overset{r}{v})$ можно выбрать специальную систему координат, связанную с заданным голономным полем r — мерных направлений. Выберем, с этой целю, v_α—мнообразия в качестве координатных многообразий и обозначим через x^α координаты точки этого r—мерного многообразия. Если числа x^a $(a, b, c=r+1, \ldots, n+r)$ фиксируют положение этого многообразия в A_{n+r}, то $n+r$ чисел x^α, x^a будут координатами точки пространства A_{n+r} в специальной системе координат. Специальная система координат не определяется полем однозначно. Всякая другая система координат получается из данной преобразованием

$$(1.2) \qquad \begin{cases} \bar{x}^a = \bar{x}^a(x^b) \\ \bar{x}^\alpha = \bar{x}^\alpha(x^\beta, x^b) \end{cases}$$

при котором v_α—многообразия остаются координатными многообразиями.

Векторы $\overset{\alpha}{v}{}^i$, определяющие геодезическое поле направлений, определяются, в специальной системе координат, уравнениями:

$$(1.3) \qquad \overset{\alpha}{v}{}^i = \delta^i_\alpha,$$

причем коэффициенты связности пространства $A_{n+r}(\overset{r}{v})$ имеют, в той же системе координат, вид [1]:

$$(1.4) \qquad \begin{cases} \Gamma^a_{ji} = \Pi^a_{ij} x^b) + \varphi_{(i}\delta^a_{j)}. \\ \Pi^a_{\alpha j} = 0 \end{cases}$$

$$i,\ j,\ k = 1,\ 2, \dots,\ n+r; \qquad \alpha,\ \beta,\ \gamma = 1,\ 2, \dots,\ r;$$

$$a,\ b,\ c = r+1, \dots,\ n,\ n+1, \dots,\ n+r.$$

При этом величины Π^a_{ij} не зависят од координат x^α, а

$$(1.5) \qquad \varphi_\alpha = T^\alpha.$$

2. Предмет работы. — В этой работе мы будем исследовать пространство $A_{n+r}(\overset{r}{v})$, обладающее римановой метрикой, т. е. пространство $V_{n+r}(\overset{r}{v})$. В работе [1] показано, что в случае, когда геодезическое поле направлений не является изотропным, пространство $V_{n+r}(\overset{r}{v})$ полуприводимо, т. е. метрика пространства $V_{n+r}(\overset{r}{v})$, в специальной системе координат выражается в виде

$$ds^2 = g_{\alpha\beta}(x^\gamma)\, dx^\alpha\, dx^\beta + e^{2P} g_{ab}(x^c)\, dx^a\, dx^b,$$

где функция P зависит только от координат x^α.

В § 3 мы получим вид метрики пространства $V_{n+r}(\overset{r}{v})$ в случае, когда геодезическое поле направлений является вполне изотропным.

В случае, когда v_α — многообразия являются плоскими, пространство $A_{n+r}(\overset{r}{v})$ будет частично проективным, а при $r=1$ субпроективным пространством В. Ф. Кагана [5]*. В силу этого, мы в § 4, специализируя результаты § 3, выразым метрику риманова частично проективного пространства в виде, полученном раньше Г. Врэнчану [2].

Наконец, в § 5 установим, что пространство $V_{n+r}(\overset{r}{v})$, геодезическое поле направлений котрого вполне изотропно, является римановым рас-

* Частично проективное пространство называется тоже обобщенным субпроективным пространством [7]

ширением пространства аффинной связности, риманово частично проективное пространство, допускающее изотропно геодезическое поле направлений, является римановым расширением проективно-евклидова пространства.

3. Пространсто $\overset{r}{V}_{n+r}(v)$ содержащее вполне изотропное геодезическое поле направлений. — Чтобы в специальной системе координат определить вид метрики

$$ds^2 = g_{ij}\, dx^i\, dx^j$$

пространства $\overset{r}{V}_{n+r}(v)$, заметим, прежде всего, что если площадки, определенные векторами (1.3), вполне изотропны то

$$g_{ij}\, \delta^i_\alpha\, \delta^j_\beta = g_{\alpha\beta} = 0.$$

Поэтому, обозначая через $[ij,\, k]$ символы Христоффеля 1—ого а через $\{^{k}_{ij}\}$ символы Христоффеля 2—ого рода, имеем

$$[ij,\ \alpha] = g_{\alpha k} \left\{ {k \atop ij} \right\} = g_{\alpha a} \left\{ {a \atop ij} \right\}$$

и, учитывая (1.4), получим

$$\frac{\partial g_{i\alpha}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{j\alpha}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^\alpha} = 2 g_{\alpha a}\, \Pi^a_{ij} + g_{\alpha a}\, (\delta^a_i\, \varphi_j + \delta^a_j\, \varphi_i). \tag{3.1}$$

Полагая $i = \beta$, $j = b$, приведем это равенство к виду

$$\frac{\partial g_{b\alpha}}{\partial x^\beta} - \frac{\partial g_{b\beta}}{\partial x^\alpha} = g_{\alpha b}\, \varphi_\beta,$$

ибо, согласно (1.4) $\Pi^a_{\alpha j} = 0$. При $\alpha = \beta$ эта формула дает

$$g_{\alpha b}\, \varphi_\alpha = 0,$$

где α фиксированный индекс. Так как для любого индекса α найдется такой индекс b что $g_{\alpha b} \neq 0$, ибо в противном случае матрика била бы вырожденной, то

$$\varphi_\alpha = 0.$$

Но тогда из (1.5) следует $T^\alpha = 0$, так что равенство (1.1) принимает вид

$$\overset{\alpha}{v}{}^i{}_{,\,k} = B^\alpha_{\beta k}\, \overset{\beta}{v}{}^i. \tag{3.2}$$

Но (3.2) является неопходимым и достаточным условыем параллельности поля площадок определяемых векторными полями $\overset{\alpha}{v}{}^i$ [3]. Итак:

Если геодезическое поле площадок вполне изотропно, то оно является и полем параллельных площадок.

С другой стороны, известно [3], что у пространства V_{n+r}, допускающего поле параллельных r—мерных изотропных плоскостей, должно быть $n \geqslant r$ и, в одной из специальных систем координат, матрица метрического тензора имеет вид [4]

$$
(3.3) \quad \left\{ \begin{aligned} &(g_{ij}) = \begin{pmatrix} g_{\alpha\beta} & g_{\alpha s} & g_{\alpha\nu} \\ g_{t\beta} & g_{ts} & g_{t\nu} \\ g_{\mu\beta} & g_{\mu s} & g_{\mu\nu} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} O & O & E \\ O & A & H \\ E & H & B \end{pmatrix} \\ &\alpha,\ \beta,\ \gamma = 1,2, \ldots, r; \quad s,\ t,\ p,\ q = r+1, \ldots, n; \\ &\nu,\ \mu,\ \tau,\ \sigma = n+1, \ldots, n+r; \quad \alpha' = n+\alpha \end{aligned} \right.
$$

причем E — единичная матрица, а матрицы (g_{st}) и $(g_{t\nu})$ не зависят от координат x^α.

Учитывая (3.3), (3.1) записывается в виде

$$
(3.4) \qquad \frac{\partial g_{i\alpha}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{j\alpha}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^\alpha} = 2\,\Pi_{ij}^{\alpha'}(x^a) + \varphi_i \delta_j^{\alpha'} + \varphi_j \delta_i^{\alpha'}.
$$

Полагая в (3.4) $i=t$, $j=s$, получим

$$
\frac{\partial g_{t\alpha}}{\partial x^s} + \frac{\partial g_{s\alpha}}{\partial x^t} - \frac{\partial g_{st}}{\partial x^\alpha} = 2\,\Pi_{st}^{\alpha'}(x^b) + \varphi_s \delta_t^{\alpha'} + \varphi_t \delta_s^{\alpha'}.
$$

откуда

$$
\Pi_{st}^{\alpha'} = 0.
$$

Если в (3.4) положить $i=t$, $j=\nu$, то имеем

$$
\frac{\partial g_{t\alpha}}{\partial x^\nu} + \frac{\partial g_{\nu\alpha}}{\partial x^t} - \frac{\partial g_{t\nu}}{\partial x^\alpha} = 2\,\Pi_{t\nu}^{\alpha'}(x^a) + \varphi_t \delta_\nu^{\alpha'} + \varphi_\nu \delta_t^{\alpha'},
$$

откуда

$$
2\,\Pi_{t\nu}^{\alpha'}(x^a) + \varphi_t \delta_\nu^{\alpha'} = 0,
$$

т. е.

$$
(3.5) \qquad \varphi_t = -2\,\Pi_{t\nu}^{\nu}(x^\alpha).
$$

Это соотношение показывает, что величины φ_t не зависят од координат x^α.

При $i=\mu$, $j=\nu$ равенство (3.4) перепишется в виде

$$
\frac{\partial g_{\mu\alpha}}{\partial x^\nu} + \frac{\partial g_{\nu\alpha}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\alpha} = 2\,\Pi_{\mu\nu}^{\alpha'}(x^a) + \varphi_\mu \delta_\nu^{\alpha'} + \varphi_\nu \delta_\mu^{\alpha'},
$$

т. е. в виде

$$
(3.6) \qquad -\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\alpha} = 2\,\Pi_{\mu\nu}^{\alpha'}(x^a) + \varphi_\mu \delta_\nu^{\alpha'} + \varphi_\nu \delta_\mu^{\alpha'}.
$$

С другой стороны

$$
(3.7) \qquad [ij,\ s] = g_{sk}\left\{ {k \atop ij} \right\} = g_{st}\left\{ {t \atop ij} \right\} + g_{s\nu}\left\{ {\nu \atop ij} \right\}.
$$

Заменяя здесь символы Христоффеля 2-ого рода их выражениями (1.4), имеем

$$
(3.8) \qquad \frac{\partial g_{is}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{js}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^s} = 2\,g_{st}\,\Pi_{ij}^{t}(x^a) + 2\,g_{s\nu}\,\Pi_{ij}^{\nu}(x^a) + \\ + g_{st}(\delta_i^t \varphi_j + \delta_j^t \varphi_i) + g_{s\nu}(\delta_i^\nu \varphi_j + \delta_j^\nu \varphi_i)
$$

откуда, полагая $i=\mu$, $j=\tau$ получим

$$\frac{\partial g_{\mu s}}{\partial x^{\tau}}+\frac{\partial g_{\tau s}}{\partial x^{\mu}}-\frac{\partial g_{\mu\tau}}{\partial x^{j}}=2g_{st}\Pi^{t}_{\mu\tau}+2g_{s\nu}\Pi^{\nu}_{\mu\tau}+g_{s\mu}\psi_{\tau}+g_{s\tau}\psi_{\mu}.$$

Дифференцируя это уравнение по x^{α}, имеем

$$\frac{\partial^2 g_{\mu\tau}}{\partial x^{s}\partial x^{\alpha}}=0. \tag{3.9}$$

Дифференцируя (3.6) по x^{t} и учитывая (3.9), получим:

$$\frac{\partial}{\partial x^{t}}[2\Pi^{\alpha'}_{\mu\nu}+\varphi_{\mu}\delta^{\alpha'}_{\nu}+\varphi_{\nu}\delta^{\alpha'}_{\mu}]=0. \tag{3.10}$$

Полагая в (3.8) $i=p$, $j=\mu$, приведем это равенство к виду

$$\frac{\partial g_{ps}}{\partial x^{\mu}}+\frac{\partial g_{\mu s}}{\partial x^{p}}-\frac{\partial g_{p\mu}}{\partial x^{s}}=2g_{st}\Pi^{t}_{p\mu}+2g_{s\nu}\Pi^{\nu}_{p\mu}+g_{sp}\varphi_{\mu}+g_{s\mu}\varphi_{p}. \tag{3.11}$$

Мы уже установили, что все величины, появлющиеся в этом соотнощении, кроме φ_{μ}, не зависят от координат x^{α}. Отсюда следует, что величины φ_{μ} тоже не зависят от координат x^{α}. Но тогда правая часть уравнения (3.6) от координат x^{α} не зависит, так что интегрируя и учитывая (3.9), имеем

$$g_{\mu\nu}=-[2\Pi^{\alpha'}_{\mu\nu}+\varphi_{\mu}\delta^{\alpha'}_{\nu}+\varphi_{\nu}\delta^{\alpha'}_{\mu}]\xi_{\alpha'}+a_{\mu\nu}(x^{\tau}), \tag{3.12}$$

где положено

$$x^{\alpha}=\xi_{\alpha'}. \tag{3.13}$$

Таким образом:

В римановом пространстве, содержащем r—мерное изотропное геодезическое поле направлений, существует специальная система координат, в которой матрица метрического тензора имеет вид (3.3). При этом матрицы (g_{st}) и $(g_{t\nu})$ не зависят от координат x^{α}, а элементы матрицы $(g_{\mu\nu})$ выражаются в виде (3.12), (3.10).

Пространство с метрикой (3.3), (3.10), (3.12) всегда содержит геодезическое поле r — мерных направлений. Чтобы это показать, достаточно установить что удовлетворены соотношения (1.4). В самом деле, в статье [1] показано что если для коэффициентов связности A_{n+r} имеют место соотношения (1.4), то A_{n+r} содержит геодезическое поле r — мерных направлений, определяемое векторами $\overset{\alpha}{v}{}^{i}=\delta^{i}_{\alpha}$.

Так как для метрики (3.3), (3.10), (3.12)

$$\left\{ {\alpha' \atop ij} \right\}=g^{\alpha' k}[ij,k]=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{i\alpha}}{\partial x^{j}}+\frac{\partial g_{j\alpha}}{\partial x^{i}}-\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^{\alpha}}\right)=-\frac{1}{2}\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^{\alpha}},$$

$$\left\{ {s \atop ij} \right\}=g^{sk}[ij,k]=g^{s\alpha}[ij,\alpha]+g^{st}[ij,t]=$$

$$=-\frac{1}{2}g^{\alpha s}\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^{\alpha}}+\frac{1}{2}g^{st}\left(\frac{\partial g_{it}}{\partial x^{j}}+\frac{\partial g_{jt}}{\partial x^{i}}-\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^{t}}\right),$$

то имеем:

$$(3.14)\qquad \begin{cases} \left\{ {\alpha' \atop \alpha\beta} \right\} = \left\{ {\alpha' \atop \alpha s} \right\} = \left\{ {\alpha' \atop \alpha\mu} \right\} = \left\{ {\alpha' \atop st} \right\} = \left\{ {\alpha' \atop s\mu} \right\} = 0 \\ \left\{ {\alpha' \atop \mu\nu} \right\} = \Pi^{\alpha'}_{\mu\nu} + \frac{1}{2}\varphi_\mu \delta^{\alpha'}_\nu + \frac{1}{2}\varphi_\nu \delta^{\alpha'}_\mu \\ \left\{ {s \atop \alpha\beta} \right\} = \left\{ {s \atop \alpha t} \right\} = \left\{ {s \atop \alpha\mu} \right\} = 0 \end{cases}$$

$$(3.15)\qquad \left\{ {s \atop pq} \right\} = \frac{1}{2} g^{st} \left(\frac{\partial g_{pt}}{\partial x^q} + \frac{\partial g_{qt}}{\partial x^p} - \frac{\partial g_{pq}}{\partial x^t} \right)$$

$$(3.16)\qquad \left\{ {s \atop p\mu} \right\} = \frac{1}{2} g^{st} \left(\frac{\partial g_{pt}}{\partial x^\mu} + \frac{\partial g_{\mu t}}{\partial x^p} - \frac{\partial g_{p\mu}}{\partial x_t} \right)$$

$$(3.17)\qquad \left\{ {s \atop \mu\nu} \right\} = -\frac{1}{2} \sum_\alpha g^{\alpha s} [\Pi^{\alpha'}_{\mu\nu} + \varphi_\mu \delta^{\alpha'}_\nu + \varphi_\nu \delta^{\alpha'}_\mu] + \frac{1}{2} g^{st} \left(\frac{\partial g_{\mu t}}{\partial x^\nu} + \frac{\partial g_{\nu t}}{\partial x^\mu} \right).$$

Но величины $g_{st}(x^p, x^\mu)$ всегда можно выразить в виде

$$g_{st} = e^{\varphi(x^p, x^\nu)} a_{st}^{(x^p, x^\nu)}.$$

Тогда уравнения (3.15) и (3.16) можно записать в виде

$$\left\{ {s \atop pq} \right\} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x^q} \delta^s_p + \frac{\partial \varphi}{\partial x^p} \delta^s_q - \frac{\partial \varphi}{\partial x^t} a^{st} a_{pq} \right) + \frac{1}{2} a^{st} \left(\frac{\partial a_{pt}}{\partial x^q} + \frac{\partial a_{qt}}{\partial x^p} - \frac{\partial a_{pq}}{\partial x^t} \right)$$

$$\left\{ {s \atop p\mu} \right\} = \frac{1}{2} \frac{\partial \varphi}{\partial x^\mu} \delta^s_p + \frac{1}{2} a^{st} \frac{\partial a_{pt}}{\partial x^\mu} + \frac{1}{2} g^{st} \left(\frac{\partial g_{\mu t}}{\partial x^p} - \frac{\partial g_{p\mu}}{\partial x^t} \right)$$

или в виде

$$(3.18)\qquad \left\{ {s \atop pq} \right\} = \Pi^s_{pq} + \frac{1}{2} (\varphi_p \delta^s_q + \varphi_q \delta^s_p)$$

$$(3.19)\qquad \left\{ {s \atop p\mu} \right\} = \Pi^s_{p\mu} + \frac{1}{2} \varphi_\mu \delta^s_p,$$

где мы положили

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x^q} = \varphi_q, \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial x^\mu} - \Phi_\mu = \varphi_\mu$$

$$\Pi^s_{pq} = -\frac{1}{2} \varphi_t a^{st} a_{pq} + \frac{1}{2} a^{st} \left(\frac{\partial a_{pt}}{\partial x^q} + \frac{\partial a_{qt}}{\partial x^p} - \frac{\partial a_{pq}}{\partial x^t} \right)$$

$$\Pi^s_{p\mu} = \frac{1}{2} a^{st} \frac{\partial a_{pt}}{\partial x^\mu} + \frac{1}{2} g^{st} \left(\frac{\partial g_{\mu t}}{\partial x^p} - \frac{\partial g_{p\mu}}{\partial x^t} \right) + \Phi_\mu$$

а Φ_μ какие то функции.

Наконец, если введено обозначение

$$\Pi^s_{\mu\nu} \frac{1}{2} \sum_\alpha g^{\alpha s} [\Pi^{\alpha'}_{\mu\nu} + \varphi_\mu \delta^{\alpha'}_\nu + \varphi_\nu \delta^{\alpha'}_\mu] + \frac{1}{2} g^{st} \left(\frac{\partial g_{\mu t}}{\partial x^\nu} + \frac{\partial g_{\nu t}}{\partial x^\mu} \right),$$

уравнения (3.17) перепищутся в виде

$$\left\{ {s \atop \mu\nu} \right\} = \Pi^{s}_{\mu\nu}. \tag{3.20}$$

Уравнения (3.14), (3.18), (3.19) и (3.20) показывают что все соотношения (1.4) удовлетворены.

Таким овразом:

Если в римановом пространстве V_{n+r} существует специальная система координат, в которой матрица метрического тензора имеет вид (3.3), матрицы (g_{st}) и $(g_{t\nu})$ не зависят от координат x^{α} а элементы матрицы $(g_{\mu\nu})$ выражаются в виде (3.12), (3.10), то пространство V_{n+r} содержит геодезическое поле r—мерных направлений определяемое векторами $\overset{\alpha}{v^i} = \delta^i_{\alpha}$.

4. Частично проективное пространство. — Рассмотрим такое пространство $V_{n+r}(\overset{r}{v})$ у которого v_{α} — многообразия — плоские пространства. Тогда $(r+1)$ — мерное пространство, образованное v_{α} — многообразиями, проходящими через точки любой геодезической линии пространства A_{n+r}, тоже будет плоским пространством. В самом деле, это пространство, с одной стороны, вполне геодезическое, а с другой его образующие — r—мерное плоские пространства. Значит, геодезическая пространства A_{n+r} принадлежит какой то $(r+1)$—мерной плоскости. Но в таком случае, пространство $A_{n+r}(\overset{r}{v})$ является частично проективним пространством [5].

Наоборот, вякое частично проективное пространство является пространством, содержащим геодезическое поле направлений. Действительно, $(r+1)$—мерная плоскость, содержащая геодезическую, является вполне геодезическим подпространством пространства A_{n+r}. В этих $(r+1)$—мерных плоскостях, через каждую точку геодезической, можно выбрать r—мерное направление, совокупность которых образует геодезическое поле направлений.

Если v_{α} — многообразия являются плоскостями, то в уравнениях (1.4) величины Π^{a}_{ij} равны нулю. Из-за того уравнения (1.4) принимают простой вид

$$\Gamma^{a}_{ij} = \varphi_{(i}\,\delta^{a}_{j)} \tag{4.1}$$

$$a = r+1, \ldots, n,\ n+1, \ldots, n+r; \qquad i, j = 1,\ 2, \ldots, n+r$$

а уравнения (3.6) и (3.12) вид

$$-\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\alpha}} = \varphi_{\mu}\,\delta^{\alpha'}_{\nu} + \varphi_{\nu}\,\delta^{\alpha'}_{\mu}, \tag{4.2}$$

$$g_{\mu\nu} = -(\varphi_{\mu}\,\delta^{\alpha'}_{\nu} + \varphi_{\nu}\,\delta^{\alpha'}_{\mu})\,\xi_{\alpha'} + a_{\mu\nu}(x^{\tau}). \tag{4.3}$$

Дифференцируя уравнение (4.2) по x^t, имеем

$$-\frac{\partial^2 g_{\mu\nu}}{\partial x^{\alpha}\,\partial x^{t}} = \frac{\partial\varphi_{\mu}}{\partial x^{t}}\,\delta^{\alpha'}_{\nu} + \frac{\partial\varphi_{\nu}}{\partial x^{t}}\,\delta^{\alpha'}_{\mu}.$$

Полагая $\nu = \alpha'$, получим

$$-\frac{\partial^2 g_{\mu\alpha'}}{\partial x^{\alpha}\,\partial x^{t}} = 2\,\frac{\partial\varphi_{\mu}}{\partial x^{t}}. \tag{4.4}$$

С другой стороны, из (3.9) имеем равенство

$$\frac{\partial^2 g_{\mu\alpha'}}{\partial x^s \partial x^\alpha} = 0,$$

сравнением которого с (4.4), получим

$$\frac{\partial \varphi_\mu}{\partial x^t} = 0.$$

Значит, величины φ_μ не зависят от координат x^t. Другими словами, φ_μ являются функциями только координат x^ν.

Полагая в (3.8) $i=p$, $j=q$, имеем

$$\frac{\partial g_{ps}}{\partial x^q} + \frac{\partial g_{qs}}{\partial x^p} - \frac{\partial g_{pq}}{\partial x^s} = \varphi_p g_{sq} + \varphi_q g_{sp},$$

или

$$\frac{\partial g_{ps}}{\partial x^q} + \frac{\partial g_{qs}}{\partial x^p} - \frac{\partial g_{pq}}{\partial x^s} = 0, \tag{4.5}$$

ибо в случае частично проективных пространств, из (3.5), следует что $\varphi_p = 0$.

Заменяя в (4.5) места индексов p и s, мы получим еще одно уравнение

$$\frac{\partial g_{ps}}{\partial x^q} + \frac{\partial g_{qp}}{\partial x^s} - \frac{\partial g_{sq}}{\partial x^p} = 0,$$

складывание которого с (4.5) даст

$$\frac{\partial g_{ps}}{\partial x^q} = 0.$$

Величины g_{ps}, значит, зависят только от координат x^ν.

В случае частично проективных пространств соотношение (3.11) принимает вид

$$\frac{\partial g_{ps}}{\partial x^\mu} + \frac{\partial g_{\mu s}}{\partial x^p} - \frac{\partial g_{p\mu}}{\partial x^s} = \varphi_\mu g_{sp}. \tag{4.6}$$

Так как $\frac{\partial g_{ps}}{\partial x^\mu}$ и $\varphi_\mu g_{sp}$ зависят только от координат x^ν а $\frac{\partial g_{\mu s}}{\partial x^p}$ и $\frac{\partial g_{p\mu}}{\partial x^s}$ зависят кроме того еще и от координат x^t, то должно быть

$$\frac{\partial g_{ps}}{\partial x^\mu} = \varphi_\mu g_{sp}, \quad \frac{\partial g_{\mu s}}{\partial x^p} = \frac{\partial g_{p\mu}}{\partial x^s}. \tag{4.7}$$

Из первого уравнения (4.7) следует, что

$$g_{ps} = e^\varphi c_{ps},$$

где

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x^\mu} = \varphi_\mu, \tag{4.8}$$

а c_{ps} являются константами. Второе уравнение (4.7) даст

$$g_{\mu s} = \frac{\partial G_\mu}{\partial x^s},$$

причем функции G_μ не зависят от координат x^α. Преобразованием координат

$$\bar{x}^\alpha = x^\alpha + G_{\alpha'}$$

можно добиться того, что $\bar{g}_{\mu s} = 0$.

Таким образом, в римановом частично проективном пространстве, геодезическое поле r—мерных направлений которого вполне изотропно, существует специальная система координат в которой матрица метрического тензора выражается в виде

$$(4.9)\qquad \begin{pmatrix} g_{\alpha\beta} & g_{\alpha s} & g_{\alpha\nu} \\ g_{t\beta} & g_{ts} & g_{t\nu} \\ g_{\mu\beta} & g_{\mu s} & g_{\mu\nu} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} O & O & E \\ O & e^\varphi c_{ps} & O \\ E & O & -\frac{1}{2}\left[\frac{\partial\varphi}{\partial x^\mu}\delta_\nu^{\alpha'} + \frac{\partial\varphi}{\partial x^\nu}\delta_\mu^{\alpha'}\right]\xi_{\alpha'} + a_{\mu\nu} \end{pmatrix}$$

При зтом φ является функцией только координат x^ν, c_{ps} являются константами, а $G_{\mu\nu} = G_{\mu\nu}(x^\sigma)$ не зависят от координат x^α, x^t. Но зто именно каноническая форма метрики риманова частично проективного пространства, полученния Г. Врэнчану ([2], фор. 26).

Такая же каноническая форма получена Г. И. Кручковичем [8] но другим способом.

5. Пространство $\overset{r}{V}_{n-r}(v)$ как риманово расширение. — Рассмотрим преобразование координат

$$(5.1)\qquad \bar{x}^\tau = f^\tau(x^\nu),\quad \bar{\xi}_\tau = \frac{\partial x^\nu}{\partial \bar{x}^\tau}(\xi_\nu + \eta_\nu),\quad \bar{x}^t = x^t$$

где f^τ — независимые функции координат x^ν, а η_ν — какие то функции координат x^ν. Это преобразование координат принадлежит к числу преобразований (1.2). С другой стороны, при таких преобразованиях вид (3.3) метрики пространства $\overset{r}{V}_{n+r}(v)$ не нарушается, пока величины g_{st}, $g_{s\mu}$, $g_{\rho\mu}$ изменяются по закону

$$\bar{g}_{st} = g_{st}$$

$$(5.2)\qquad \bar{g}_{s\mu} = g_{s\tau}\frac{\partial x^\tau}{\partial \bar{x}^\mu}$$

$$(5.3)\qquad \bar{g}_{\rho\mu} = \left(g_{\tau\sigma} - \frac{\partial\eta_\tau}{\partial x^\sigma} - \frac{\partial\eta_\sigma}{\partial x^\tau}\right)\frac{\partial x^\tau}{\partial \bar{x}^\mu}\frac{\partial x^\sigma}{\partial \bar{x}^\rho} - 2\frac{\partial^2 x^\nu}{\partial \bar{x}^\rho\partial \bar{x}^\mu}(\xi_\nu + \eta_\nu).$$

Но у пространства $\overset{r}{V}_{n+r}(v)$, геодезическое поле направлений которого изотропно, величины $g_{\tau\sigma}$ выражаются в виде (3.12). Если это подставить в (5.3), то получим

$$(5.4)\qquad \bar{g}_{\rho\mu} = \left[-(2\Pi_{\tau\sigma}^\nu + \varphi_\tau\delta_\sigma^\nu + \varphi_\sigma\delta_\tau^\nu)\xi_\nu + a_{\sigma\tau} - \frac{\partial\eta_\tau}{\partial x^\sigma} - \frac{\partial\eta_\sigma}{\partial x^\tau}\right]\frac{\partial x^\tau}{\partial \bar{x}^\mu}\frac{\partial x^\sigma}{x\bar{x}^\rho} - $$
$$-2\frac{\partial^2 x^\nu}{\partial \bar{x}^\rho\partial \bar{x}^\mu}(\xi_\nu + \eta_\nu).$$

Это можно записать в виде

$$\bar{g}_{\rho\mu}=\left[-(2\,\Pi^{\nu}_{\tau\sigma}+\varphi_{\tau}\,\delta^{\nu}_{\sigma}+\varphi_{\sigma}\,\delta^{\nu}_{\tau})\,(\xi_{\nu}+\eta_{\nu})+(2\,\Pi^{\nu}_{\tau\sigma}+\varphi_{\tau}\,\delta^{\nu}_{\sigma}+\varphi_{\sigma}\,\delta^{\nu}_{\tau})\,\eta_{\nu}+\right.$$

$$\left.+a_{\sigma\tau}-\frac{\partial\eta_{\tau}}{\partial x^{\sigma}}-\frac{\partial\eta_{\sigma}}{\partial x^{\tau}}\right]\frac{\partial x^{\tau}}{\partial\bar{x}^{\mu}}\,\frac{\partial x^{\sigma}}{\partial\bar{x}^{\rho}}-2\,\frac{\partial^{2}x^{\nu}}{\partial\bar{x}^{\rho}\,\partial\bar{x}^{\mu}}\,(\xi_{\nu}+\eta_{\nu}),$$

или в виде

$$\bar{g}_{\rho\mu}=-2\left\{\left[\Pi^{\nu}_{\tau\sigma}+\frac{1}{2}(\varphi_{\tau}\,\delta^{\nu}_{\sigma}+\varphi_{\sigma}\,\delta^{\nu}_{\tau})\right]\frac{\partial x^{\tau}}{\partial\bar{x}^{\mu}}\,\frac{\partial x^{\sigma}}{\partial\bar{x}^{\rho}}+\frac{\partial^{2}x^{\nu}}{\partial\bar{x}^{\rho}\,\partial\bar{x}^{\mu}}\right\}(\xi_{\nu}+\eta_{\nu})+$$

$$+\left[(2\,\Pi^{\nu}_{\tau\sigma}+\varphi_{\tau}\delta^{\nu}_{\sigma}+\varphi_{\sigma}\delta^{\nu}_{\tau})\,\eta_{\nu}+a_{\sigma\tau}-\frac{\partial\eta_{\tau}}{\partial x^{\sigma}}-\frac{\partial\eta_{\sigma}}{\partial x^{\tau}}\right]\frac{\partial x^{\tau}}{\partial\bar{x}^{\mu}}\,\frac{\partial x^{\sigma}}{\partial\bar{x}^{\rho}}.$$

Таким образом, (5.4), после введения обозначений

$$(5.5)\qquad\left\{\begin{aligned}&\bar{a}_{\rho\mu}=a_{\sigma\tau}+(2\,\Pi^{\nu}_{\tau\sigma}+\varphi_{\tau}\delta^{\nu}_{\sigma}+\varphi_{\sigma}\delta^{\nu}_{\tau})\,\eta_{\nu}-\frac{\partial\eta_{\tau}}{\partial x^{\sigma}}-\frac{\partial\eta_{\sigma}}{\partial x^{\tau}}\\&\bar{\Pi}^{\varkappa}_{\rho\mu}\,\frac{\partial x^{\nu}}{\partial\bar{x}^{\varkappa}}=\left[\Pi^{\nu}_{\tau\sigma}+\frac{1}{2}(\varphi_{\tau}\,\delta^{\nu}_{\sigma}+\varphi_{\sigma}\,\delta^{\nu}_{\tau})\right]\frac{\partial x^{\tau}}{\partial\bar{x}^{\mu}}\,\frac{\partial x^{\sigma}}{\partial\bar{x}^{\rho}}+\frac{\partial^{2}x^{\nu}}{\partial\bar{x}^{\rho}\,\partial\bar{x}^{\mu}},\end{aligned}\right.$$

принимает вид

$$\bar{g}_{\rho\mu}=-2\,\bar{\Pi}^{\varkappa}_{\rho\mu}\,\frac{\partial x^{\nu}}{\partial\bar{x}^{\varkappa}}\,(\xi_{\nu}+\eta_{\nu})+a_{\rho\mu}$$

или, учитывая второе уравнение (5.1), вид

$$(5.6)\qquad\bar{g}_{\rho\mu}=-2\,\bar{\Pi}^{\varkappa}_{\rho\mu}\,\bar{\xi}_{\varkappa}+\bar{a}_{\rho\mu}.$$

Таким образом, преобразование (5.1) не изменяет ни вид (3.3) метрики пространства, ни вид величин $g_{\rho\mu}$. В самом деле, из (3.12) видно, что $g_{\rho\mu}$ являются полиномами первого рода относительно координат ξ_{ν}, а из (5.6) — что $\bar{g}_{\rho\mu}$ являются тоже полиномами первого рода относительно координат $\bar{\xi}_{\nu}$. При этом величины $\Pi^{\nu}_{\tau\sigma}$ преобразуются по закону для коэффициентов аффинной связности в пространстве координат $\{x^{\nu}\}$. Таким образом, преобразования вида (5.1) определяют, в пространстве координат $\{x^{\nu}\}$, аффинную связность. Поэтому пространство $\overset{r}{V}_{n+r}(v)$ является римановым расширением [6] r—мерного пространства аффинной связности. Из (5.5) видно, что эта аффинная связность определена с точностю до проективных преобразований. Итак:

Пространство $\overset{r}{V}_{n+r}(v)$, геодезическое поле направлений которого изотропно, является римановым расширением r—мерного пространства аффиной связности.

Если $\Pi^{\nu}_{\tau\sigma}=0$, то $\overset{r}{V}_{n+r}(v)$ яаляется римановым расщирением проективно евклидова пространства. С другой стороны, в § 4 показано, что пространство $\overset{r}{V}_{n+r}(v)$, у которого $\Pi^{a}_{ij}=0$, является частично проективным. Таким образом

Римановo частично проективное пространство $\overset{r}{V}_{n+r}(v)$, *геодезическое поле направлений которого изотропно, является римановым расширением* r — *мерного проективно-евклидова пространства.*

Из (5.2) видно, что при преобразованиях (5.1), вид (4.9) метрики этого просранства не нарушается.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Я. Л. Шапиро: *Геодезическое поле направлений и проективные системы путей,* Математический сборник, т. 36 (71):1, 1955,

[2] Г. Врэнчану: *Метрика частично-проективных римановых пространств,* Revue de mathématiques pures et appliquées, Acad. RPR, 5/1960/ No 2, 211—227

[3] Walker A. G.: *On parallel fields of partially null vector spaces,* Quart. J. Math 20/1949/, 135—145

[4] Walker A. G.: *A canonical form for a Riemannian spaces with a parallel field of null planes,* Quart. J. Math. /2/ 1 /1950/, 69—79

[5] G. Vranceanu: *Leçon de géométrie différentielle,* vol. II, Bucuresti, 1957

[6] Patterson E. M. and Walker A. G.: *Riemann extensions,* Quart. J. Math. /2/ 2/ /1962/ 19—28

[7] Г. И. Кручкович: *О пространствах В. Ф. Кагана,* статья в книге: В. Ф. Каган: *Субпроективные пространства,* Москва 1960.

[8] Г. И. Кручкович: *Пространство Кагана и нетранзитивные групы движений,* Труды сем. по вект. и тензорному анализу, вып. XIV, 144—159

[9] Г. И. Кручкович: А. С. Солодовников: *Постоянные симметрические тензоры в римановых пространствах,* Известия вузов, Матем. 1959 № 3 (10)